



ВЕСНІК

БРЭСЦКАГА ЁНІВЕРСІТЭТА

Рэдакцыйная калегія

галоўны рэдактар
Ю. П. Голубеў

намеснік галоўнага рэдактара
А. А. Трафімук

адказны рэдактар
М. М. Сэндзер

А. Б. Антаневіч (Беларусь)
А. І. Басік (Беларусь)
А. Я. Будзько (Беларусь)
В. М. Волкаў (Беларусь)
М. А. Громаў (Расія)
А. У. Дзямідчык (Беларусь)
М. І. Ляўчук (Беларусь)
І. П. Мартынаў (Беларусь)
А. І. Мелькер (Расія)
В. С. Манахаў (Беларусь)
У. А. Плещохоў (Беларусь)
В. М. Радзькоў (Беларусь)

Пасведчанне аб рэгістрацыі
ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:
224016, г. Брэст,
бульвар Касманаўтаў, 21
тэл.: +375-(162)-21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага
ўніверсітэта» выдаецца
са снежня 1997 г.

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы на год

**Заснавальнік – установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»**

№ 1 / 2024

У адпаведнасці з Дадаткам да загада
Вышэйшай атэстацыйнай камісіяй Рэспублікі Беларусь
ад 06.02.2024 № 30 (са змяненнямі, унесенымі загадам
ад 03.05.2024 № 109) часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта.
Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў у 2024 г.
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

◇ ◇ ◇

У адпаведнасці з дагаворам паміж установай адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»
і ТАА «Навуковая электронная бібліятэка» (ліцэнзійны дагавор
№ 457-11/2020 ад 03.11.2020) часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта.
Серыя 4. Фізіка. Матэматыка »
размяшчаецца на платформе eLIBRARY.RU
і ўключаны ў Расійскі індэкс навуковага цытавання (РІНЦ)

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Плетюхов В. А., Кузьмич А. М.

О квантовании релятивистских волновых уравнений с изоспиновыми степенями свободы 5

Бурый А. В., Ивашкевич А. В.

Нерелятивистская частица со спином 2 в магнитном поле 22

Семенюк О. А., Бурый А. В., Ивашкевич А. В., Редьков В. М.

Поля Штюкельберга – Огиевецкого – Полубаринова – Кальбо – Рамона – Максвелла, калибровочные степени свободы 32

Гладковский В. И., Кушнер Т. Л., Пинчук А. И., Шепелевич В. Г., Шилько В. М.

Некоторые физико-механические свойства сплава Al-7 масс. % Вi 50

Макоед И. И., Демеш А. С.

Рамановская спектроскопия мультиферроиков, синтезированных на основе феррита висмута 57

МАТЭМАТЫКА

Пантелеева Е. В.

Условия обратимости операторов взвешенного сдвига, заданных матрицами верхнетреугольного вида, в пространстве вектор-функций $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^3)$ 68

Матысик О. В., Горбач М. С., Олихвер П. О.

Регуляризирующий алгоритм для некорректных уравнений первого ряда с самосопряженным ограниченным оператором 72

Качаловская Е. И., Грицук Д. В.

Спектральные методы переменных направлений для задач математической физики 92

Кот М. Г.

Резольвентная сходимость операторов, аппроксимирующих систему уравнений с дельта-образными коэффициентами 103

Павлушко П. А., Трофимук А. А.

О производной длине разрешимых групп с ограничениями на индексы неабелевых максимальных подгрупп 112

Юдов А. А., Арабчик Е. В., Арабчик Д. С., Кислюк Е. В.

Группы симметрии подгрупп группы S_4 119

Editorial Board

editor-in-chief
Yu. P. Golubeu

deputy editor-in-chief
A. A. Trafimuk

managing editor
M. M. Sender

A. B. Antanievich (Belarus)
A. I. Basik (Belarus)
A. Ya. Budzko (Belarus)
V. M. Volkau (Belarus)
M. A. Gromau (Russia)
A. U. Dziamidchyk (Belarus)
M. I. Liauchuk (Belarus)
I. P. Martynau (Belarus)
A. I. Melkier (Russia)
V. S. Manakhau (Belarus)
U. A. Plietsiukhou (Belarus)
V. M. Radzkou (Belarus)

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
nr 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224016, Brest,
21, Kosmonavtov Boulevard
tel.: +375-(162)-21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued twice a year

Founder – Educational Establishment
«Brest State A. S. Pushkin University»

№ 1 / 2024

According to the Supplement to the order of Supreme Certification
Commission of the Republic of Belarus from February 06, 2024 nr 30
(with the amendments made by the order of Supreme Certification
Commission from May 03, 2024 nr 109)
the journal «Vesnik of Brest University.

Series 4. Physics. Mathematics» has been included
to the List of scientific editions of the Republic of Belarus
for publication of the results of scientific research in 2024
in physics-mathematical sciences (Physics)

◇ ◇ ◇

According to the agreement
between Educational Establishment
«Brest State A. S. Pushkin University» and Pvt Ltd «Scientific Electronic
Library» (licence contract № 457-11/2020 from 03.11.2020)
the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics»
is placed on the platform eLIBRARY.RU
and included in the Russian Science Citation Index (RSCI)

CONTENTS

PHYSICS

Vladimir Pletyukhov, Anastasiya Kuzmich On Quantization of Relativistic Wave Equations with Isospin Degrees of Freedom.....	5
Anton Bury, Alina Ivashkevich Nonrelativistic Spin 2 Particle in Magnetic Field.....	22
Olga Semenyuk, Anton Bury, Alina Ivashkevich, Viktor Red'kov Stueckelberg – Ogievetsky – Polubarinov – Calb – Ramond – Maxwell Fields, the Gauge Degrees of Freedom	32
Victar Hladcouski, Tatsiana Kushner, Aliaksandr Pinchuk, Vasilii Shepelevich, Victor Shilko Some Physical and Mechanical Properties of the Alloy Al-7 wt. % Bi.....	50
Igor Makoed, Anastasia Demesh Raman Spectroscopy of Multiferroics, Synthesis Based on Bismuth Ferrite	57

MATHEMATICS

Katsiaryna Pantsialeveva Conditions for Invertibility of Weighted Shift Operators Specified by Matrices of Upper Triangular View in the Space of Vector of Functions $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^3)$	68
Oleg Matysik, Maria Gorbach, Pavel Olikhver Regularizing Algorithm for Ill-Posed Equations of the First Kind with a Self-Adjoint and Bounded Operator.....	72
Ekaterina Kachalouskaya, Dmitry Gritsuk Spectral Methods of Variable Directions for Problems of Mathematical Physics	92
Marina Kot Resolvent Convergence of Operators Approximating a System of Equations with Delta-Shaped Coefficients.....	103
Polina Pavlushko, Alexandr Trofimuk On the Derived Length of Soluble Groups with Restrictions on the Indices of Non-Abelian Maximal Subgroups.....	112
AleksandrYudov, YelenaArabchik, Dmitriy Arabchik, Yelena Kisilyuk Groups Symmetry in a Finite Groups S_4	119

УДК 539.12:530.145

Владимир Анестиевич Плетюхов¹, Анастасия Михайловна Кузьмич²¹*д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*²*преподаватель-стажер каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Vladimir Pletyukhov¹, Anastasiya Kuzmich²**¹*Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor, Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of Brest State A. S. Pushkin University*²*Lecturer-Trainee of the Department of General and Theoretical Physics
of Brest State A. S. Pushkin University*e-mail: ¹pletyukhov@yandex.by**О КВАНТОВАНИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ
С ИЗОСПИНОВЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ**

На основе метода проективных операторов исследован вопрос о связи спина и статистики в теории релятивистских волновых уравнений первого порядка для частиц с внутренними (изоспиновыми) степенями свободы, набором спиновых состояний. Показано, что при условии отказа от положительной определенности метрики пространства состояний возможно получение причинных перестановочных соотношений при квантовании как по обычной статистике, т. е. целого (полуцелого) спина по Бозе – Эйнштейну (Ферми – Дираку), так и по инверсной – целого (полуцелого) спина по Ферми – Дираку (Бозе – Эйнштейну). Установлено также, что если изоспиновые степени свободы описываются некомпактными группами, то включение взаимодействия, не нарушающего внутренней симметрии теории, не приводит к появлению в ней отрицательных значений вероятности.

Ключевые слова: релятивистские волновые уравнения, квантование, спин, статистика.

On Quantization of Relativistic Wave Equations with Isospin Degrees of Freedom

The article employs the projection operator method to discuss the spin and statistics correlation in first order relativistic wave equation theory for particles with internal (isospin) degrees of freedom and the spin state array in general. The research demonstrates that rejecting positive definiteness of the space of states metric allows obtaining causal commutation connections by both standard (i.e. integer (half-integer) Bose – Einstein (Fermi – Dirac) spin) and inverse, i. e. integer (half-integer) Fermi – Dirac (Bose – Einstein) spin) statistic quantization. Besides, the research findings show that if isospin degrees of freedom are described by non-compact groups, adding interaction without breaking the internal symmetry of the theory does not result in negative probability values.

Key words: relativistic wave equations, quantization, spin, statistics.

Введение

Как было замечено Дираком [1] и Паули [2], однозначная связь между спином и статистикой теряется при использовании индефинитной метрики в пространстве состояний. В работе [2] показана возможность квантового описания скалярного фермиона и бозона со спином $\frac{1}{2}$ (терминология Паули) без нарушения принципа причинности. В рамках метода проективных операторов [3; 4] в результате простых рассуждений устанавливается, что аналогичная возможность квантования по инверсной статистике, т. е. целого спина по Ферми – Дираку и полуцелого – по Бозе – Эйнштейну, имеет место для частиц с произвольным значением спина.

Такая процедура квантования предполагает, однако, разбиение пространства состояний H на подпространства H_+ и H_- , в которых нормы векторов состояний частицы являются, соответственно, положительно ($\|f\| > 0$) и отрицательно ($\|h\| < 0$) определенными. Поэтому если при включении взаимодействия матричный элемент M перехода

между состояниями из H_+ и H_- отличен от нуля, то возникают отрицательные вероятности $W_{fh} = |M|^2 / \|h\| \|f\|$. Соответствующая теория является внутренне противоречивой и физически неприемлема. Именно это и имеет место как в примерах, рассмотренных в работе [2], так и в теории произвольного спина без внутренних (изоспиновых) степеней свободы.

По-иному выглядит ситуация при наличии у частицы изоспиновых степеней свободы, описываемых некомпактными группами внутренней симметрии. В данном случае при условии отказа от дефинитности метрики возможно не только непротиворечивое с точки зрения принципа причинности квантование целого и полуцелого спинов по инверсной статистике, но и получение при этом корректной вероятностной интерпретации теории.

В настоящей работе данная проблема исследуется в рамках теории релятивистских волновых уравнений (РВУ) первого порядка с использованием метода проективных операторов.

К вопросу о вторичном квантовании РВУ без внутренних степеней свободы с использованием индефинитной метрики

Обсудим возможность квантового описания произвольного целого (полуцелого) спина по статистике Ферми – Дирака (Бозе – Эйнштейна) для полей без внутренних степеней свободы при условии отказа от дефинитности метрики. Следуя Паули [2], постулируем для операторов рождения a^+, b^+ и уничтожения a, b перестановочные соотношения

$$\{a_k(p), a_{k'}^+(p')\}_\pm = \delta_{kk'} \delta(p - p'), \quad (1.1)$$

$$\{b_k(p), b_{k'}^+(p')\}_\pm = -\delta_{kk'} \delta(p - p'), \quad (1.2)$$

где коммутатор (антикоммутатор) отвечает полуцелому (целому) спину, а все остальные коммутаторы (антикоммутаторы) равны нулю. Здесь обозначения a и b относятся к состояниям частицы и античастицы соответственно, индекс k характеризует спиновое состояние при заданном импульсе p . Соотношения (1.1) и (1.2) отличаются от обычных перестановочных соотношений «неправильным» знаком в правой части (1.2), который и обуславливает необходимость введения индефинитной метрики в пространстве состояний для обеспечения положительной определенности энергии во вторично квантованной теории. Используя стандартные разложения волновых функций $\Psi(x)$ и $\bar{\Psi}(x)$ ($\bar{\Psi} = \Psi^* \eta$, η – матрица билинейной инвариантной формы) по плоским волнам:

$$\Psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_k \int (a_k(p) \Psi_k(p) e^{ipx} + b_k^+(p) \Psi_k(-p) e^{-ipx}) d^3p, \quad (1.3)$$

$$\bar{\Psi}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_k \int (a_k^+(p) \bar{\Psi}_k(p) e^{-ipx} + b_k(p) \bar{\Psi}_k(-p) e^{ipx}) d^3p, \quad (1.4)$$

с помощью условий (1.1), (1.2) вычислим выражения $\{\Psi_\alpha(x'), \bar{\Psi}_\beta(x'')\}_\pm$. В результате, полагая $x' - x'' = x$, получим

$$\begin{aligned} & \{\Psi_\alpha(x'), \bar{\Psi}_\beta(x'')\}_\pm \Rightarrow \{\Psi(x') \cdot \bar{\Psi}(x'')\}_\pm = \\ & = (2\pi)^{-3} \sum_k \int ([(\Psi_k(p) \cdot \bar{\Psi}_k(p)) e^{ipx} \pm (\Psi_k(-p) \cdot \bar{\Psi}_k(-p)) e^{-ipx}] d^3p, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\Psi \cdot \bar{\Psi} = (\Psi_\alpha \bar{\Psi}_\beta)$ означает прямое (диадное) произведение.

При выборе нормировки по заряду $\bar{\Psi}\gamma_4\Psi = \pm 1$ имеем для целого и полуцелого спинов соответственно [3; 4]:

$$\Psi_k(\pm p) \cdot \bar{\Psi}_k(\pm p) = \frac{m}{|p_0|} \tau_k^{(\pm)}(\hat{p}), \quad (1.6)$$

$$\Psi_k(\pm p) \cdot \bar{\Psi}_k(\pm p) = \pm \frac{m}{|p_0|} \tau_k^{(\pm)}(\hat{p}), \quad (1.7)$$

где $\tau_k^{(\pm)}(\hat{p}) = \alpha_{\pm}(\hat{p})\beta_k$ – проективный оператор, выделяющий состояние с данным импульсом знаком массы и проекции спина.

Подставляя (1.6), (1.7) в (1.5) и учитывая обсуждаемое соответствие знаков в этих выражениях характеру спина частицы (целочисленность либо полуцелочисленность), получим в обоих случаях одинаковое выражение

$$\{\Psi(x') \cdot \bar{\Psi}(x'')\}_{\pm} = (2\pi)^{-3} m \int \frac{d^3 p}{|p_0|} (\alpha_+(\hat{p})e^{ipx} - \alpha_-(\hat{p})e^{-ipx}). \quad (1.8)$$

Сумма \sum_k в (1.8) исключена вследствие равенства $\sum_k \beta_k = I$. Соотношение (1.8) в точности совпадает с формулой (33.45) в [4] и, следовательно, приводится к виду:

$$\{\Psi(x') \cdot \bar{\Psi}(x'')\}_{\pm} = -2im\alpha_+(\hat{\nabla})\Delta_0(x), \quad (1.9)$$

где $\hat{\nabla} = \gamma_{\mu} \partial_{\mu}$ и

$$\Delta_0(x) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3 p}{|p_0|} e^{ipx} \sin |p_0|x_0 - \quad (1.10)$$

инвариантная дельта-функция.

Таким образом, при квантовании произвольного целого (полуцелого) спина по Ферми – Дираку (Бозе – Эйнштейну) с помощью условий (1.1), (1.2) для операторных волновых функций получаются причинные перестановочные соотношения.

Однако при этом, как уже указывалось выше, вследствие «неправильного» знака в правой части (1.2) векторы состояний античастицы будут иметь отрицательную норму. Учитывая, что при наличии электромагнитного взаимодействия матричный элемент M для таких, например, процессов, как аннигиляция, фоторождение пары и другое, отличен от нуля, приходим к выводу о наличии в рассматриваемой теории физически бессмысленных отрицательных вероятностей.

Метод проективных операторов в теории РВУ с внутренними степенями свободы

Рассмотрим теперь уравнение для частицы, обладающей изоспиновыми степенями свободы. Запишем его в стандартной матричной форме

$$(\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + m)\Psi(x) = 0 \quad (2.1)$$

или в импульсном представлении [4]

$$(\hat{p} + m)\Psi(p) = 0 \quad (\hat{p} = ip_{\mu} \gamma_{\mu}), \quad (2.2)$$

где волновая функция Ψ преобразуется по набору неприводимых представлений $\tau_{l_1 l_2}$ собственной группы Лоренца.

Матрица γ_4 содержит в себе основную физическую информацию, относящуюся к данному уравнению. В базисе Гельфанда – Яглома [5; 6] она имеет вид прямой суммы $\gamma_4 = \bigoplus \sum_l C^l \otimes I_{2l+1}$, где I_{2l+1} – единичная матрица размерности $(2l+1) \times (2l+1)$, C^l – спиновый блок, сопоставляемый спину l ($|l_1 - l_2| \leq l \leq l_1 + l_2$) в том смысле, что

если C^l имеет ненулевые собственные значения, то частица обладает данным спином. Собственные значения блоков C^l определяют также спектр массовых состояний частицы.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением полей с одним значением массы и набором спинов. Минимальные полиномы блоков C^l , а значит, и матрицы γ_4 таких РВУ содержат только один (с точностью до знака) ненулевой корень ± 1 , причем знак «+» отвечает положительно-частотным, а «-» – отрицательно-частотным решениям.

В данном формализме наличие у частицы изоспиновых степеней свободы выражается в том, что в характеристических полиномах блоков C^l (по крайней мере, одного из них) корень ± 1 является кратным. Этим степеням свободы всегда можно сопоставить некоторый оператор $\hat{\Pi}$ (один или несколько), коммутирующий с операторами 4-импульса \hat{p} , квадрата спина \hat{s}^2 и проекции спина \hat{s}_n на произвольное направление \underline{n} и образующий вместе с ними полный набор коммутирующих операторов для данного класса РВУ. Если преобразования группы внутренней симметрии коммутируют с лоренцевскими генераторами, то оператор $\hat{\Pi}$ содержится среди этих преобразований. В противном случае для релятивистски ковариантного описания изоспиновых степеней свободы необходимо выходить за рамки группы внутренней симметрии уравнения.

Чтобы не сужать общность рассмотрения, ограничимся здесь вышеприведенными соображениями относительно свойств оператора $\hat{\Pi}$, дополнив их лишь естественными требованиями его диагонализруемости и вещественности собственных значений, а также коммутационным условием

$$\hat{\Pi}\eta = \eta\hat{\Pi}^+ \quad (2.3)$$

по аналогии с соответствующими свойствами операторов \hat{s}^2 и \hat{s}_n .

Собственные значения операторов $\hat{\Pi}$, которые в дальнейшем будем называть Π -четностью, обозначим через λ_i (индекс i нумерует различные возможные значения Π -четности). Поскольку кратность (в вышеуказанном смысле) ненулевого корня в различных спиновых блоках может быть разной, это означает, что фиксированное значение Π -четности присуще не каждому спиновому состоянию, т. е. каждому значению спина может отвечать свой набор значений Π -четности. Эту ситуацию можно трактовать и иначе, считая, что состоянию с фиксированной Π -четностью соответствует некоторый спектр спиновых состояний.

В дальнейшем для простоты (но без ущерба для существования вопроса) будем считать, что спектр значений Π -четности не зависит от спина, т. е. квантовое число i пробегает один и тот же ряд значений для любого спина l .

Применение метода проективных операторов к исследуемому классу уравнений предполагает помимо операторов $\alpha_{\pm}(\hat{p})$ и β_k [4]

$$\alpha_{\pm}(\hat{p}) = \frac{P_{\pm}(\hat{p})}{P_{\pm}(\pm m)}, \quad (\hat{p} \pm m)P_{\pm}(\hat{p}) \equiv P(\hat{p}) = 0, \quad (2.4)$$

$$\beta_k = Q_k(\mathcal{S}_n)/Q_k(k), \quad (\mathcal{S}_n - k)Q_k(\mathcal{S}_n) \equiv Q(\mathcal{S}_n) = 0,$$

выделяющих состояния с данным импульсом, знаком массы и проекцией спина, введение проективных операторов абсолютной величины спина σ_i^2 и Π -четности π_i , выделяющих, соответственно, состояния с данным спином и Π -четностью. Операторы π_i и σ_i^2 по аналогии с (2.4) определяются соотношениями:

$$\pi_i = P_i(\hat{\Pi})/P_i(\lambda_i), \quad (\hat{\Pi} - \lambda_i)P_i(\hat{\Pi}) \equiv P(\hat{\Pi}) = 0, \quad (2.5)$$

$$\sigma_i^2 = Q_i(\mathcal{S}^2)/Q_i[l(l+1)], \quad [\mathcal{S}^2 - l(l+1)]Q_i(\mathcal{S}^2) \equiv Q(\mathcal{S}^2) = 0 \quad (2.6)$$

В определениях (2.4) – (2.6) $P(\hat{p})$, $P(\hat{\Pi})$, $Q(\mathcal{S}^2)$, $Q(\mathcal{S}_n)$ – минимальные полиномы операторов \hat{p} , $\hat{\Pi}$, \mathcal{S}^2 , \mathcal{S}_n ; $P_i(\hat{\Pi})$, $Q_l(\mathcal{S}^2)$, $Q_K(\mathcal{S}_n)$ – их «усеченные» минимальные полиномы. Проективные операторы π_i и σ_l^2 так же, как и β_k , удовлетворяют очевидному соотношению

$$\sum_i \pi_i = \sum_l \sigma_l^2 = \sum_K \beta_K = I, \quad (2.7)$$

вытекающему из их смысла.

Проективный оператор, выделяющий единственное (при отсутствии других степеней свободы) состояние с фиксированными значениями 4-импульса, знака массы, Π -четности, спина и его проекции будет иметь вид

$$\tau_{ilk}^{(\pm)} = \alpha_{\pm}(\hat{p}) \pi_i \sigma_l^2 \beta_k \quad (2.8)$$

По аналогии с [4] можно установить, что знаки плотности энергии и заряда классической полевой системы определяются, соответственно, знаками выражений $S_p(\tau_{ilk}^{\pm} \eta)$ и $S_p(\gamma_4 \tau_{ilk}^{(\pm)} \eta)$, вычисленными в системе покоя.

Анализ этих выражений для уравнений с одним спином и без Π -четности показывает, что знаки плотности энергии (заряда), во-первых, не зависят от значения проекции спина и, во-вторых, в положительно-частотных и отрицательно-частотных состояниях знаки указанных величин одинаковы в случае целого (полуцелого) и противоположны в случае полуцелого (целого) спина. Для уравнений же с Π -четностью и набором спинов знаки плотности энергии и заряда уже могут зависеть от квантовых чисел i и l , т. е. и энергия, и заряд для такого класса РВУ будут индефинитными.

Чтобы учесть данное обстоятельство, введем нормировочную переменную $g_{is}^{(\pm)}$, значение которой соответствует знаку плотности энергии в состоянии $\Psi_{is}(\pm p) \equiv \Psi_{is}^{(\pm)}(p)$ и вычисляется в системе покоя частицы:

$$g_{is}^{(\pm)} = \text{Sign} \left[S_p(\tau_{is}^{(\pm)} \eta) \right]. \quad (2.9)$$

(Здесь и далее, если не будет оговорено, под индексом s для удобства будем понимать объединенный индекс $\{lk\}$, характеризующий спиновое состояние частицы как в смысле абсолютной величины, так и проекции спина). При этом важно обратить внимание на то, что зависимость плотности энергии от квантового числа i означает некомпактность группы внутренней симметрии, присущей уравнению.

Существенным моментом является и то, что для рассматриваемого класса РВУ теряется строго определенное соответствие между знаками плотности энергии (заряда) в положительно- и отрицательно-частотных состояниях с одной стороны, и целочисленным либо полуцелочисленным характером спина – с другой.

Так, в зависимости от типа уравнения и способа задания оператора $\hat{\Pi}$ для плотности энергии в случае целого спина наряду с «обычным» (т. е. свойственным теориям без изоспиновых степеней свободы) соответствием, когда

$$g_{is}^{(+)} = g_{is}^{(-)}, \quad (2.10)$$

может выполняться и равенство

$$g_{is}^{(+)} = -g_{is}^{(-)}. \quad (2.11)$$

Аналогічна для полуцелого спина возможно выполнение как условия (2.11), так и (2.10). Плотность заряда имеет (для любого спина) противоположные знаки в состояниях $\Psi_{is}^{(+)}$ и $\Psi_{is}^{(-)}$ в случае (2.10) и одинаковые в случае (2.11).

Остановимся подробно на ситуации, когда для целого выполняются условия (2.10) и полуцелого – (2.11). Вводя обозначение $g_{is}^{(+)} = g_{is}$, представим получающееся соответствие знаков плотности энергии и заряда различным состояниям частицы с помощью следующей таблицы (2.12):

Состояние	Целый спин		Полуцелый спин	
	энергия	заряд	энергия	заряд
$\Psi_{is}^{(+)}$	g_{is}	g_{is}	g_{is}	g_{is}
$\Psi_{is}^{(-)}$	g_{is}	$-g_{is}$	$-g_{is}$	g_{is}

Нормировка по заряду в соответствии с таблицей (2.12) характеризуется соотношениями

$$\bar{\Psi}_{is}^{(\pm)} \gamma_4 \Psi_{is}^{(\pm)} = \pm g_{is}, \quad \bar{\Psi}_{is}^{(\pm)} \Psi_{is}^{(\pm)} = \frac{m}{|p_0|} g_{is} \quad (2.13)$$

в случае целого спина и

$$\bar{\Psi}_{is}^{(\pm)} \gamma_4 \Psi_{is}^{(\pm)} = g_{is}, \quad \bar{\Psi}_{is}^{(\pm)} \Psi_{is}^{(\pm)} = \pm \frac{m}{|p_0|} g_{is} \quad (2.14)$$

для полуцелого.

Обращаясь теперь к проективному оператору τ и используя (2.3), перепишем определение (2.8) в виде

$$\tau_{is}^{(\pm)}(\hat{p}) = c \Psi_{is}^{(\pm)}(p) \cdot \bar{\Psi}_{is}^{(\pm)}(p). \quad (2.15)$$

Учитывая условия (2.13), (2.14) а также то, что $S_p \tau_{is}^{(\pm)} = 1$ и $(g_{is})^2 = 1$, найдем нормировочный множитель c в (2.15), а значит, и выражения для матриц-диад $\Psi \cdot \bar{\Psi}$ через проективный оператор τ , которые понадобятся нам в дальнейшем:

$$\Psi_{is}^{(\pm)} \cdot \bar{\Psi}_{is}^{(\pm)} = \frac{m}{|p_0|} g_{is} \tau_{is}^{(\pm)} \quad (\text{целый спин}), \quad (2.16)$$

$$\Psi_{is}^{(\pm)} \cdot \bar{\Psi}_{is}^{(\pm)} = \pm \frac{m}{|p_0|} g_{is} \tau_{is}^{(\pm)} \quad (\text{полуцелый спин}). \quad (2.17)$$

Вторичное квантование

С учетом квантового числа i , отвечающего P -четности, разложение операторных волновых функций $\Psi(x)$ и $\bar{\Psi}(x)$ при переходе ко вторично квантовой теории запишется так:

$$\Psi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_i \sum_s \int [\alpha_{is}(p) \Psi_{is}^{(+)}(p) e^{ipx} + \beta_{is}^+(p) \Psi_{is}^{(-)}(p) e^{-ipx}] d^3 p, \quad (3.1)$$

$$\bar{\Psi}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_i \sum_s \int [\alpha_{is}^+(p) \bar{\Psi}_{is}^{(+)}(p) e^{-ipx} + \beta_{is}^-(p) \bar{\Psi}_{is}^{(-)}(p) e^{ipx}] d^3 p, \quad (3.2)$$

Подставляя разложения (3.1), (3.2) в выражения для заряда

$$Q = \int \rho d^3 x = e \int \bar{\Psi}(x) \gamma_4 \Psi(x) d^3 x \quad (3.3)$$

и энергии

$$E = \int \omega d^3 x = \int p_0 \bar{\Psi}(x) \gamma_4 \Psi(x) d^3 x, \quad (3.4)$$

получим

$$Q = e \left[\sum_i \sum_s a_{is}^+ a_{is} (\Psi_{is}^{(+)} \gamma_4 \Psi_{is}^{(+)}) + \sum_i \sum_s b_{is} b_{is}^+ (\Psi_{is}^{(-)} \gamma_4 \Psi_{is}^{(-)}) \right],$$

$$E = \sum_i \sum_s a_{is}^+ a_{is} |p_0| (\Psi_{is}^{(+)} \gamma_4 \Psi_{is}^{(+)}) - \sum_i \sum_s b_{is} b_{is}^+ |p_0| (\Psi_{is}^{(-)} \gamma_4 \Psi_{is}^{(-)}).$$

Отсюда, учитывая нормировочные соотношения (2.13), (2.14), приходим к следующим выражениям для Q и E :

$$Q = e \left[\sum_{p_0>0}^i \sum_s g_{is} a_{is}^+ a_{is} \mp \sum_{p_0<0}^i \sum_s g_{is} b_{is} b_{is}^+ \right], \quad (3.5)$$

$$E = \sum_{p_0>0}^i \sum_s g_{is} a_{is}^+ a_{is} |p_0| \pm \sum_{p_0<0}^i \sum_s g_{is} b_{is} b_{is}^+ |p_0|. \quad (3.6)$$

В (3.5) и (3.6) верхние знаки соответствуют целому, а ниже – полуцелому спину.

Рассмотрим сначала квантование по обычной статистике: целый спин – по Бозе – Эйнштейну, полуцелый – по Ферми – Дираку.

Постулируем перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения:

$$\{a_{is}, a_{i's'}^+\}_{\mp} = \{b_{is}, b_{i's'}^+\}_{\mp} = g_{is} \delta_{ii'} \delta_{ss'} \delta_{(p-p')}, \quad (3.7)$$

а все остальные коммутаторы (антикоммутаторы) равны нулю.

В (3.7) коммутатор отвечает целому, антикоммутатор – полуцелому спину. Операторы числа частиц, соответствующие такому квантованию, определяются следующим образом:

$$N_{is}^{(+)} = g_{is} a_{is}^+ a_{is}, \quad N_{is}^{(-)} = g_{is} b_{is}^+ b_{is}. \quad (3.8)$$

(Множитель g_{is} введен в (3.8) для того, чтобы обеспечить правильные собственные значения этих операторов: 0, 1, 2... – при квантовании по Бозе и 0, 1 – по Ферми).

Выражая из (3.7) произведение $b_{is}^+ b_{is}$ через $b_{is}^+ b_{is}$ и подставляя с учетом соответствия знаков в (3.5), (3.6), приведем величины Q и E к виду (с точностью до бесконечных констант, устранимых обычным образом):

$$Q = e \left[\sum_{p_0>0}^i \sum_s g_{is} a_{is}^+ a_{is} - \sum_{p_0<0}^i \sum_s g_{is} b_{is}^+ b_{is} \right], \quad (3.9)$$

$$E = \sum_{p_0>0}^i \sum_s g_{is} a_{is}^+ a_{is} |p_0| \pm \sum_{p_0<0}^i \sum_s g_{is} b_{is}^+ b_{is} |p_0|, \quad (3.10)$$

одинаковому для целого и полуцелого спинов. Отсюда, используя определения (3.8), получим

$$Q = e \sum_i \sum_s (N_{is}^{(+)} - N_{is}^{(-)}), \quad (3.11)$$

$$E = \sum_i \sum_s (N_{is}^{(+)} \varepsilon_{is}^{(+)} + N_{is}^{(-)} \varepsilon_{is}^{(-)}), \quad (3.12)$$

где $\varepsilon_{is}^{(\pm)} = |p_0|$, индексы у $\varepsilon_{is}^{(\pm)}$ указывают на принадлежность к соответствующему состоянию.

Вычислим выражения $\{\Psi_\alpha(x'), \Psi_\beta(x'')\}_{\pm}$, где по-прежнему коммутаторы (антикоммутаторы) отвечают целому (полуцелому) спину:

$$\begin{aligned} & \{\Psi_\alpha(x'), \bar{\Psi}_\beta(x'')\}_\mp \Rightarrow \{\Psi(x') \cdot \bar{\Psi}(x'')\}_\mp = \\ & = (2\pi)^{-3} \sum_i \sum_s \int [\{a_{is}, a_{is}^+\}_\mp \times (\Psi_{is}^{(+)} \cdot \bar{\Psi}_{is}^{(+)}) e^{ipx} \mp \{b_{is}, b_{is}^+\}_\mp (\Psi_{is}^{(-)} \cdot \\ & \quad \bar{\Psi}_{is}^{(-)}) e^{ipx}] d^3p. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Подставляя в (3.13) при верхних знаках соотношения (2.16), а при нижних – (2.17) и учитывая условия (3.7), приходим в обоих случаях к одинаковому выражению в правой части:

$$\{\Psi_\alpha(x'), \bar{\Psi}_\beta(x'')\}_\mp = (2\pi)^{-3} \sum_i \sum_s \int \frac{m}{|p_0|} (\tau_{is}^{(+)} e^{ipx} - \tau_{is}^{(+)} e^{-ipx}) d^3p. \quad (3.14)$$

Учтем определение (2.8) оператора $\tau_{is}^{(\pm)} \equiv \tau_{ilk}^{(\pm)}$ и то, что в соответствии с тождествами (2.7)

$$\sum_i \sum_s \tau_{is}^{(\pm)} = \sum_i \sum_l \sum_k \alpha_\pm(\hat{p}) \pi_i \sigma_l \beta_k = \alpha_\pm(\hat{p}).$$

Следовательно, соотношение (3.14) преобразуется к виду (1.8) – (1.10). Этот результат совместно с формулами (3.11), (3.12) означает, что перестановочные соотношения (3.7) приводят к правильной корпускулярной картине поля и носят причинный характер.

Теперь исследуем возможность квантования рассматриваемого класса РВУ по инверсной статистике (целый спин – по Ферми – Дираку, полуцелый – по Бозе – Эйнштейну). Для этого постулируем перестановочные соотношения:

$$\{a_{is}(p), a_{i's'}^+(p')\}_\pm = -\{b_{is}(p), b_{i's'}^+(p')\}_\pm = g_{is} \delta_{ii'} \delta_{ss'} \delta_{(p-p')}, \quad (3.15)$$

в которых антикоммутатор соответствует целому, а коммутатор – полуцелому спину. При таком квантовании операторы числа частиц задаются следующим образом:

$$N_{is}^{(+)} = g_{is} a_{is}^+ a_{is}, \quad N_{is}^{(-)} = -g_{is} b_{is}^+ b_{is}. \quad (3.16)$$

Выражая из (3.15) $b_{is}^+ b_{is}$ и подставляя в (3.5), (3.6), получим одинаковые для обоих типов спина выражения для заряда и энергии:

$$Q = e \left[\sum_{p_0 > 0} \sum_i g_{is} a_{is}^+ a_{is} + \sum_{p_0 < 0} \sum_i g_{is} b_{is}^+ b_{is} \right], \quad (3.17)$$

$$E = \sum_{p_0 > 0} \sum_i g_{is} a_{is}^+ a_{is} |p_0| - \sum_{p_0 < 0} \sum_i g_{is} b_{is}^+ b_{is} |p_0|, \quad (3.18)$$

которые с учетом (3.16) приводятся к виду (3.11), (3.12) соответственно.

Преобразуя с помощью условий квантования (3.15) формулу (3.13), где на этот раз коммутатор (антикоммутатор) отвечает полуцелому (целому) спину, получим:

$$\{\Psi(x') \cdot \bar{\Psi}(x'')\}_\pm = (2\pi)^{-3} \sum_i \sum_s \int g_{is} [(\Psi_{is}^{(+)} \cdot \bar{\Psi}_{is}^{(+)}) e^{ipx} \mp (\Psi_{is}^{(-)} \cdot \bar{\Psi}_{is}^{(-)}) e^{-ipx}] d^3p. \quad (3.19)$$

Применим к (3.19) при верхнем знаке соотношение (2.16), а при нижнем – (2.17). В результате приходим в обоих случаях к одинаковому выражению, совпадающему с (3.14).

Таким образом, при квантовании по инверсной статистике способом (3.15) так же, как и по обычной с помощью условий (3.7), получаются правильные выражения для заряда Q и энергии E и перестановочные соотношения для операторных волновых функций имеют причинный характер. Достигается это за счет различных разбиений

пространства состояний H на подпространства H_+ и H_- , в которых нормы векторов состояний являются, соответственно, положительно и отрицательно определенными.

Аналогично проводится анализ и тогда, когда для целого спина выполняется условие (2.11), а для полуцелого – (2.10). Корректные (в вышеуказанном смысле) перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения в этом случае имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \{a_{is}(p), a_{i's'}^+(p')\}_{\mp} &= -\{b_{is}(p), b_{i's'}^+(p')\}_{\mp} = g_{is} \delta_{ii'} \delta_{ss'} \delta(p-p') \\ N_{is}^{(+)} &= g_{is} a_{is}^+ a_{is}, \quad N_{is}^{(-)} = -g_{is} b_{is}^+ b_{is} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \{a_{is}(p), a_{i's'}^+(p')\}_{\pm} &= \{b_{is}(p), b_{i's'}^+(p')\}_{\pm} = g_{is} \delta_{ii'} \delta_{ss'} \delta(p-p') \\ N_{is}^{(+)} &= g_{is} a_{is}^+ a_{is}, \quad N_{is}^{(-)} = -g_{is} b_{is}^+ b_{is} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

при квантовании по обычной и инверсной статистикам соответственно.

Вероятностная интерпретация теории

Квантование с помощью соотношений (3.7), (3.15), (3.20), (3.21) так же, как и (1.1), (1.2), предполагает отказ от условия положительной дефинитности метрики пространства состояний. Нарушение этого условия приводит, как уже отмечалось выше, к проблеме вероятностной интерпретации теории. Указанная трудность может быть разрешена, если в теории наряду со «стандартными» имеются дополнительные законы сохранения, совместно приводящие к правилам суперотбора, т. е. запрету на переходы между состояниями с положительной и отрицательной нормой.

Существование дополнительного закона сохранения связано с наличием у рассматриваемой полевой системы изоспиновых степеней свободы (Π -четности) и обеспечивается при условии инвариантности лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}(x)(\gamma_{\mu} \nabla_{\mu} + m)\Psi(x),$$

где (∇_{μ} – «удлиненная» производная) относительно фазовых преобразований

$$\Psi \rightarrow e^{eG\theta}\Psi = \Lambda\Psi, \quad (4.1)$$

где θ – параметр, $\Lambda^+ \eta \Lambda = \eta$ и $G \neq 1$ – матричный оператор, удовлетворяющий условию:

$$\{\gamma_{\mu}, G\}_- = 0. \quad (4.2)$$

Дополнительный сохраняющийся «заряд» G определяется при этом так:

$$G \sim \int \bar{\Psi}(x) \gamma_{\mu} G \Psi(x) d^3x. \quad (4.3)$$

В интересующем нас случае теорий с некомпактными группами внутренней симметрии при условии независимости переменной g_{is} от квантового числа s в качестве искомого оператора G всегда может быть выбран оператор Π -четности. Сохраняющийся «заряд» G (4.3) с помощью выкладок, аналогичных тем, которые были проделаны при получении формулы (3.11), приводится тогда к виду

$$G \sim \sum_i \sum_s \lambda_i (N_{is}^{(+)} - N_{is}^{(-)}). \quad (4.4)$$

Проследим механизм совместного действия законов сохранения зарядов Q (3.11) и G (4.4), обеспечивающий исключение переходов, характеризующихся отрицательными вероятностями. Для выяснения существа дела сначала достаточно проанализиро-

вать ситуацию, когда квантовое число i принимает два значения ($i = 1, 2$). Нормировочная переменная g_{is} задается при этом следующим образом:

$$g_{1s} = -g_{2s} = 1. \quad (4.5)$$

При квантовании по обычной статистике с помощью соотношений (3.7) в данном случае в подпространства H_+ и H_- попадают состояния, определяемые операторами

$$\begin{aligned} H_+ &: (\Psi_{1s}^{(+)}, \Psi_{1s}^{(-)}), \\ H_- &: (\Psi_{2s}^{(+)}, \Psi_{2s}^{(-)}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

а при квантовании по инверсной статистике посредством условий (3.15) получается разбиение:

$$\begin{aligned} H_+ &: (\Psi_{1s}^{(+)}, \Psi_{2s}^{(-)}), \\ H_- &: (\Psi_{2s}^{(+)}, \Psi_{1s}^{(-)}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Полагая $\hat{G} = \hat{\Pi}$ и выбирая собственные значения оператора Π -четности в виде $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$, получим для заряда G (4.4) выражение

$$G \sim \sum_s (N_{1s}^{(+)} - N_{2s}^{(+)} - N_{1s}^{(-)} + N_{2s}^{(-)}). \quad (4.8)$$

Введем операцию зарядового сопряжения \hat{C} , устанавливающую соответствие между состояниями частицы и античастицы. Относительно такой операции перестановочные соотношения для величин a, a^+, b, b^+ должны быть инвариантны. Применительно к рассматриваемому случаю при квантовании по обычной статистике соотношения (3.7) инвариантны относительно преобразований

$$\hat{C} a_{is} \hat{C}^{-1} = b_{is}, \quad \hat{C} a_{is}^+ \hat{C}^{-1} = b_{is}^+, \quad (4.9)$$

тогда как при квантовании по инверсной статистике (перестановочные соотношения (3.15)) операцию зарядового сопряжения следует определять так:

$$\begin{aligned} \hat{C} a_{1s} \hat{C}^{-1} &= b_{2s}, \quad \hat{C} a_{2s} \hat{C}^{-1} = b_{1s}, \\ \hat{C} a_{1s}^+ \hat{C}^{-1} &= b_{2s}^+, \quad \hat{C} a_{2s}^+ \hat{C}^{-1} = b_{1s}^+, \end{aligned} \quad (4.10)$$

т. е. связывать с ней изменения не только знака электрического заряда, но и Π -четности.

Выпишем теперь выражение для заряда Q (3.11) в развернутом виде:

$$Q \sim \sum_s (N_{1s}^{(+)} + N_{2s}^{(+)} - N_{1s}^{(-)} - N_{2s}^{(-)}). \quad (4.11)$$

Из сравнения разбиений (4.6), (4.7) с выражениями (4.8), (4.11) для G и Q следует, что одночастичным состояниям, относящимся к подпространствам H_+ , H_- , соответствуют заряды (первая цифра в скобках в (4.12), (4.13) относится к электрическому, вторая – к дополнительному заряду G)

$$\begin{aligned} H_+ &: (1, 1), (-1, -1), \\ H_- &: (-1, 1), (1, -1) \end{aligned} \quad (4.12)$$

при первом способе квантования и

$$\begin{aligned} H_+ &: (1, 1), (-1, 1), \\ H_- &: (1, -1), (-1, -1) - \end{aligned} \quad (4.13)$$

при втором. Очевидно, что в случае (4.6), (4.12) для взаимодействий, не нарушающих эту симметрию, совместное выполнение законов сохранения для Q и G приводит к запрету физически неприемлемых переходов между состояниями из H_+ и H_- и наоборот.

В случае (4.7), (4.13) возможны, казалось бы, характеризующиеся отрицательными вероятностями процессы, такие как фоторождение (аннигиляция) пары частиц в состояниях, определяемых операторами $\Psi_{1s}^{(+)}$, $\Psi_{1s}^{(-)}$ или $\Psi_{2s}^{(+)}$, $\Psi_{2s}^{(-)}$. Однако здесь надо учесть, что в силу определения (4.11) операции зарядового сопряжения для этого случая указанные состояния не являются по отношению друг к другу состояниями частицы и античастицы, или, другими словами, система из двух таких частиц не обладает определенным значением зарядовой четности. В самом деле, подействуем на состояние $|a_{1s}^+ b_{1s}^+ |0\rangle$ данной системы оператором \hat{C} (4.11). В результате получим соотношение

$$\hat{C} |a_{1s}^+ b_{1s}^+ |0\rangle = |\hat{C} a_{1s}^+ \hat{C}^{-1} b_{1s}^+ \hat{C}^{-1} |0\rangle = |b_{2s}^+ a_{2s}^+ |0\rangle = |b_{2s}^+ a_{2s}^+ |0\rangle,$$

из которого видно, что состояние $|a_{1s}^+ b_{1s}^+ |0\rangle$ не является собственным вектором оператора \hat{C} и, следовательно, фоторождение пары частиц в таком состоянии противоречит закону сохранения зарядовой четности. Таким образом, законы сохранения для зарядов Q и G с привлечением в необходимых случаях условия сохранения зарядовой четности при квантовании по инверсной статистике также запрещают переходы, нарушающую вероятностную интерпретацию теории.

Вышеприведенные рассуждения без особых затруднений можно перенести на теории с некомпактными группами внутренней симметрии типа $SU(p, q)$, $SO(p, q)$, $SP(p, q)$, для чего надо лишь определенным образом задать оператор Π -четности: его собственные значения по-прежнему должны быть равны $\lambda = \pm 1$, причем значение $\lambda = +1(-1)$ должно отвечать состояниям Ψ_{is} (i – обобщенный изоспиновый индекс), для которых $g_{is} = +1$, $i = 1, 2, \dots, p$ ($g_{is} = -1$, $i = p + 1, p + 2, \dots, p + q$). Соответствующие компактным подгруппам степени свободы частицы будут при этом описываться некоторыми другими операторами, выбор которых не влияет на характер рассуждений и на окончательные выводы.

До сих пор мы подробно анализировали случай квантования с помощью перестановочных соотношений (3.7), (3.15). Для РВУ, квантуемых посредством соотношений (3.20), (3.21), механизм действия правил суперотбора по устранению отрицательных вероятностей является в известном смысле противоположным рассмотренному выше. Здесь при квантовании по инверсной статистике (квантовые условия (3.19)) для обеспечения запрета на физически бессмысленные переходы между H_+ и H_- достаточно применения законов сохранения для Q и G , в то время как при квантовании по обычной статистике (условия (3.18)) необходимо дополнительно привлекать соображения, связанные с законом сохранения зарядовой четности. Так что в целом этот механизм носит симметричный характер по отношению к обоим способам квантования и не является предпочтительным по отношению к какому-либо из них для рассматриваемого класса РВУ.

Примеры

1. $SU(1,1)$ -инвариантная теория дираковского поля.

Рассмотрим систему из двух уравнений Дирака:

$$\begin{aligned} (\gamma_\mu^D \partial_\mu + m)\Psi_1 &= 0, \\ (\gamma_\mu^D \partial_\mu + m)\Psi_2 &= 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где Ψ_1, Ψ_2 – биспиноры, γ_μ^D – дираковские матрицы размерности 4×4 ; $\gamma_4^D = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$.

Записав ее в стандартной матричной форме (2.1), получим для матриц γ_μ выражение:

$$\gamma_\mu = I_2 \otimes \gamma_\mu^D. \quad (5.2)$$

Лангранжиан L системы выберем в виде разности лагранжианов L_1 и L_2 каждого из уравнений, т. е.

$$L = L_1 + L_2, \quad (5.3)$$

что равносильно следующему заданию матрицы билинейной лоренц-инвариантной формы:

$$\eta = \sigma_3 \otimes \gamma_4^D, \quad \sigma_3 = \text{diag}(1, -1) - \text{матрица Паули}. \quad (5.4)$$

Построенная таким образом модель описывает частицу со спином $S = \frac{1}{2}$, но в отличие от уравнения Дирака обладает некомпактной внутренней симметрией, соответствующей группе $SU(1,1)$. Преобразования U этой группы удовлетворяют условиям:

$$\{\gamma_\mu, U\}_- = 0, \quad U^+ \eta U = \eta, \quad \det U = 1. \quad (5.5)$$

Изоспиновая степень свободы, присущая данному уравнению, может быть описана оператором $\hat{\Pi}$, содержащимся среди преобразований U . Выбирая в соответствии с рекомендациями п. 4 значения Π -четности, равными ± 1 , получим для оператора $\hat{\Pi}$ выражение

$$\hat{\Pi} = \sigma_3 \otimes I_4. \quad (5.6)$$

Нетрудно убедиться, что оператор (5.6) действительно удовлетворяет всем требованиям, сформулированным при изложении общего подхода, в т. ч. условию (4.2), обеспечивающему существование дополнительного закона сохранения в рассматриваемой модели.

Группа внутренней симметрии теории образует здесь прямое произведение с группой Лоренца. Поэтому определение (5.6) оператора Π -четности является релятивистски инвариантным, т. е. сохраняет свой вид в любой ИСО.

В качестве полного набора операторов, классифицирующих «чистые» состояния частиц, могут служить операторы \hat{p} , \hat{S}_n , $\hat{\Pi}$ (в системе покоя $\hat{S}_n = \hat{S}_3 = -i \frac{1}{4} \gamma_{[1}\gamma_{2]}$). В базисе

$$\left\{ \Psi_{\frac{1}{2}}^{(+)}, \Psi_{\frac{1}{2}}^{(-)}, \Psi_{\frac{1}{2}}^{(+)}, \Psi_{\frac{1}{2}}^{(-)}, \Psi_{-\frac{1}{2}}^{(+)}, \Psi_{-\frac{1}{2}}^{(-)}, \Psi_{-\frac{1}{2}}^{(+)}, \Psi_{-\frac{1}{2}}^{(-)} \right\} \quad (5.7)$$

проективные операторы α_\pm , π_i , β_k , вычисленные по формулам (2.4), (2.5), в системе покоя принимают вид:

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= I_2 \otimes \text{diag}(1, 1, 0, 0), & \alpha_- &= I_2 \otimes \text{diag}(0, 0, 1, 1), \\ \beta_{\frac{1}{2}} &= I_2 \otimes \text{diag}(1, 0, 1, 0), & \beta_{-\frac{1}{2}} &= I_2 \otimes \text{diag}(0, 1, 0, 1), \\ \pi_1 &= \text{diag}(1, 1, 0, 0) \otimes I_2, & \pi_2 &= \text{diag}(0, 0, 1, 1) \otimes I_2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Представляя (5.8), а также выражение (5.4) для матрицы билинейной формы η в формулы (2.8), (2.9), найдем:

$$g_{15}^{(+)} = g_{25}^{(-)} = 1, \quad g_{15}^{(-)} = g_{25}^{(+)} = -1. \quad (5.9)$$

Соотношения (5.9) означают, что, во-первых, в рассматриваемом случае имеет место обычное для полуцелого спина соответствие (2.11), и, во-вторых, обеспечивается,

как это следует из общих результатов п. 4, корректная вероятностная интерпретация вторично-квантованной теории.

Таким образом, заключаем, что вторичное квантование $SU(1,1)$ -симметричного дираковского поля по статистике Ферми – Дирака осуществляется посредством перестановочных соотношений типа (3.7), которые применительно к рассматриваемому случаю ($SU(1,1)$ -симметрия) принимают вид:

$$\begin{aligned} \{a_{1S}(p), a_{1S}^+(p')\}_+ &= \{b_{1S}(p'), b_{1S}^+(p')\}_+ = \delta_{SS'}(p-p'), \\ \{a_{2S}(p), a_{2S}^+(p')\}_+ &= \{b_{2S}(p'), b_{2S}^+(p')\}_+ = -\delta_{SS'}(p-p'). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Соответственно, для операторов числа частиц (формулы (3.8)) получаются выражения:

$$\begin{aligned} N_{1S}^{(+)} &= a_{1S}^+ a_{1S}, & N_{1S}^{(-)} &= b_{1S}^+ b_{1S}, \\ N_{2S}^{(+)} &= -a_{2S}^+ a_{2S}, & N_{2S}^{(-)} &= -b_{2S}^+ b_{2S}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Квантование по инверсной (Бозе – Эйнштейна) статистике осуществляется в соответствии с общими формулами (3.15) и (3.16), принимающими применительно к рассматриваемому полю вид:

$$\begin{aligned} \{a_{1S}(p), a_{1S}^+(p')\}_- &= \{b_{2S}(p), b_{2S}^+(p')\}_- = \delta_{SS'}\delta(p-p'), \\ \{a_{2S}(p), a_{2S}^+(p')\}_- &= \{b_{1S}(p), b_{1S}^+(p')\}_- = -\delta_{SS'}\delta(p-p'), \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} N_{1S}^{(+)} &= a_{1S}^+ a_{1S}, & N_{1S}^{(-)} &= -b_{1S}^+ b_{1S}, \\ N_{2S}^{(+)} &= -a_{2S}^+ a_{2S}, & N_{2S}^{(-)} &= b_{2S}^+ b_{2S}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Отсутствие отрицательных вероятностей при данном способе квантования непосредственно вытекает из приведенного в п. 4 общего исследования.

2. $SU(2,2)$ -инвариантная теория дираковского поля.

Система из четырех уравнений Дирака может быть представлена в виде релятивистского волнового уравнения (2.1) с матрицами (в фермионном базисе)

$$\gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu^D. \quad (5.14)$$

Если задать матрицу билинейной формы способом

$$\eta = \gamma_4^D \otimes \gamma_4^D, \quad (5.15)$$

то приходим к группе $SU(2,2)$ внутренней симметрии лангранжевой формулировки теории. Эта группа, как и в примере 1, коммутирует с группой Лоренца.

Изоспиновые степени свободы, связанные с четырехкратным вырождением состояний обсуждаемой полевой системы, можно описать посредством двух матричных операторов, которые содержатся среди преобразований группы внутренней симметрии:

$$\hat{\Pi} = \gamma_4^D \otimes \gamma_4^D \equiv \gamma_4', \quad (5.16)$$

$$\hat{M} = -i \frac{1}{4} \gamma_4' [\gamma_1' \gamma_2']. \quad (5.17)$$

Кроме этих операторов, в полный набор включаются стандартные операторы 4-импульса \hat{p} и проекции спина \hat{S}_n . Квантовые числа, соответствующие операторам (5.16), (5.17), обозначим: $i = 1, 2$; $m = 1/2, -1/2$, причем число m совпадает непосредственно с собственным значением оператора \hat{M} .

Устанавім, як завясят шчытныя энэргыі і зарада ад квантавых чыслаў i і m . Для гэтага знайдзем праектыўныя апэратары α_{\pm} , π_i , μ_m , β_k , сапаставяемыя апэратарам поўнага набору. С улічэннем віда мінімальнага поліномаў апэратараў \hat{P} і \hat{M}

$$\hat{P}^2 - 1 = 0, \quad \hat{M}^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad (5.18)$$

получим в системе покоя:

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= I_4 \otimes \text{diag}(1,1,0,0), & \alpha_- &= I_4 \otimes \text{diag}(0,0,1,1), \\ \pi_1 &= \text{diag}(1,1,0,0) \otimes I_4, & \pi_2 &= \text{diag}(0,0,1,1) \otimes I_4, \\ \mu_{\frac{1}{2}} &= \text{diag}(1,0,1,0) \otimes I_4, & \mu_{-\frac{1}{2}} &= \text{diag}(0,1,0,1) \otimes I_4, \\ \beta_{\frac{1}{2}} &= I_4 \otimes \text{diag}(1,0,1,0), & \beta_{-\frac{1}{2}} &= I_4 \otimes \text{diag}(0,1,0,1). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Определяя числа $g_{is}^{(\pm)}$ ($s = (mk)$) по формуле (2.9), где

$$\tau_{is}^{(\pm)} = \tau_{imk}^{(\pm)} = \alpha_{\pm} \pi_i \mu_m \beta_k,$$

получим следующие значения:

$$g_{is}^{(+)} = g_{2s}^{(-)} = 1, \quad g_{is}^{(-)} = g_{2s}^{(+)} = -1. \quad (5.20)$$

Сравнение (5.20) с (5.9) показывает, что $SU(2,2)$ - и $SU(1,1)$ -симметричные теории дираковского поля принципиально не отличаются друг от друга. Поэтому правильные условия квантования для $SU(2,2)$ -инвариантной теории получаются из условий (5.10) – (5.13) путем формальной замены квантовых чисел $s \rightarrow mk$.

3. Уравнение Дирака – Кэлера.

Уравнение Дирака – Кэлера [7] описывает частицу с одной массой и набором спиновых состояний $s = 0, 1$, дополнительно вырожденных по внутренней четности. Внутренняя симметрия лагранжиана описывается группой $SU(2,2)$.

Это уравнение строится на основе набора неприводимых представлений группы Лоренца

$$\left[(0,0) \otimes (0,0)' \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' \otimes (0,1) \otimes (1,0)' \right], \quad (5.21)$$

где $(0,0)$ и $(0,0)'$ – скалярное и псевдоскалярное, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)'$ – векторное и псевдо-векторное представления соответственно.

В тензорной форме уравнение Дирака – Кэлера имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi + m\psi_\mu &= 0, \\ \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]}^* + \partial_\mu \psi^* + m\psi_\mu^* &= 0, \\ -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \psi_\beta^* + m\psi_{[\mu\nu]} &= 0, \\ \partial_\mu \psi_\mu + m\psi &= 0, \quad \partial_\mu \psi_\mu^* + m\psi^* &= 0, \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\left(\psi_{[\mu\nu]}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \psi_{[\alpha\beta]}, \quad \psi_\mu^* = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \psi_{[\nu\alpha\beta]}, \quad \psi^* = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \psi_{[\mu\nu\alpha\beta]} \right).$$

Матрицы γ_μ уравнения Дирака – Кэлера, записанного в стандартной матричной форме (2.1), в базисе $\{\psi_\alpha^\beta\}$ (α, β – биспинорные индексы) приводятся к виду (5.14). Матрица билинейной формы совпадает с матрицей пространственной инверсии и определяется согласно (5.15), отсюда не следует, однако, что, как и в случае $SU(2,2)$ -инвариантной теории дираковского поля, оператор P -четности может быть

$$\left. \begin{aligned} \{a_{1lk}(p), a_{1l'k'}^+(p')\}_- &= \{b_{2lk}(p), b_{2l'k'}^+(p')\}_- = \delta_{ll'} \delta_{kk'} \delta(p-p') \\ \{a_{2lk}(p), a_{2l'k'}^+(p')\}_- &= \{b_{1lk}(p), b_{1l'k'}^+(p')\}_- = -\delta_{ll'} \delta_{kk'} \delta(p-p') \\ N_{1lk}^{(+)} &= a_{1lk}^+ a_{1lk} \quad , \quad N_{1lk}^{(-)} = -b_{1lk}^+ b_{1lk} \\ N_{2lk}^{(+)} &= -a_{2lk}^+ a_{2lk} \quad , \quad N_{2lk}^{(-)} = b_{2lk}^+ b_{2lk} \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

при квантовании по обычной (Бозе – Эйнштейна) статистике и

$$\left. \begin{aligned} \{a_{1lk}(p), a_{1l'k'}^+(p')\}_+ &= \{b_{1lk}(p), b_{1l'k'}^+(p')\}_+ = \delta_{ll'} \delta_{kk'} \delta(p-p') \\ \{a_{2lk}(p), a_{2l'k'}^+(p')\}_+ &= \{b_{2lk}(p), b_{2l'k'}^+(p')\}_+ = -\delta_{ll'} \delta_{kk'} \delta(p-p') \\ N_{1lk}^{(+)} &= a_{1lk}^+ a_{1lk} \quad , \quad N_{1lk}^{(-)} = b_{1lk}^+ b_{1lk} \\ N_{2lk}^{(+)} &= -a_{2lk}^+ a_{2lk} \quad , \quad N_{2lk}^{(-)} = -b_{2lk}^+ b_{2lk} \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

по инверсной (Ферми – Дирака) статистике.

Из (5.26), (5.27) видно, что в отличие от предыдущих примеров разбиение (4.6), (4.12) пространства состояний H на подпространства с положительной и отрицательной нормой здесь имеет место при квантовании по инверсной статистике, а (4.7), (4.13) – по обычной.

Это означает, что в первом случае запрет на отрицательные вероятности обеспечивается уже совместным действием законов сохранения зарядов Q и G , а во втором – при дополнительном учете закона сохранения зарядовой четности.

Заклучение

Исследование полей с некомпактными группами внутренней симметрии имеет важное значение в физике высоких энергий. Одной из причин этого является то, что во всех калибровочных моделях, претендующих на объединение внутренней и пространственно-временной симметрий, с необходимостью возникают структуры, описываемые некомпактными группами внутренней симметрии.

В настоящей работе показано, что теорема о связи спина и статистики в присутствии изоспиновых степеней свободы, описываемых некомпактными группами внутренней симметрии, при отказе от условия положительной определенности метрики пространства состояний теряет свою универсальность.

Оказывается возможным построение физически приемлемой (т. е. не связанной с появлением в теории отрицательных вероятностей) процедуры квантования, в котором поля с целым (полуцелым) спином допускает квантовое описание не только по статистике Бозе – Эйнштейна (Ферми – Дирака), но и по Ферми – Дираку (Бозе – Эйнштейну).

Можно указать на одну из возможных областей приложений полученного результата: описание дираковских полей с некомпактной группой внутренней симметрии посредством набора тензорных полей, квантуемых по статистике Ферми – Дирака.

Наиболее известный в настоящее время пример такого рода – поле Дирака – Кэлера, которому может быть поставлено в соответствие дираковское поле с $SU(2,2)$ группой внутренней симметрии.

Данный подход к построению теории дираковских частиц с изоспиновыми степенями свободы может найти применение в полевых моделях типа супергравитации, в которых возможность геометризованного описания имеет принципиальное значение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Dirac, P. A. M. The physical interpretation of quantum mechanics / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. A. – 1942. – Vol. 180. – P. 1–40.
2. Pauli, W. On Dirac's new method of field quantization / W. Pauli // Rev. Mod. Phys. – 1943. – Vol. 15. – P. 175–207.
3. Fedorov, F. I. Projective operators in the theory of elementary particles / F. I. Fedorov // JETP. – 1958. – Vol. 35. – P. 495–498.
4. Fedorov, F. I. Lorentz group / F. I. Fedorov. – M. : Science, 1979. – 384 p.
5. Gel'fand, I. M. General relativistic invariant equations and infinite-dimensional representations of the Lorentz group / I. M. Gel'fand, A. M. Yaglom // JETP. – 1948. – Vol. 18 – P. 703–733.
6. Gel'fand, I. M. Representations of the rotation group and the Lorentz group and their applications / I. M. Gel'fand, R. A. Minlos, Y. Y. Shapiro. – M. : Phismatgis, 1958. – 368 p.
7. Kähler, E. Der innere Differentialkalkül / E. Kähler // Rendiconti di math. (Roma). Sers. – 1962. – Vol. 21, № 3, 4. – P. 425–523.

Рукапіс надруковано у редакцію 29.02.2024

УДК 539.12

Антон Васильевич Бурый¹, Алина Валентиновна Ивашкевич²¹аспирант 3-го года обучения центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси²мл. науч. сотрудник центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси**Anton Bury¹, Alina Ivashkevich²**¹3-d Year Postgraduate Student of the Center for Fundamental Interactions and Astrophysics of the B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus²Junior Researcher of the Center for Fundamental Interactions and Astrophysics of the B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belaruse-mail: anton.bury.97@mail.ru¹; ivashkevich.alina@yandex.by²**НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 2 В МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Исследуется нерелятивистское уравнение для частицы со спином 2 в присутствии внешнего однородного магнитного поля. Выведенное ранее из 39-компонентного матричного уравнения Федорова нерелятивистское уравнение напоминает уравнение для нерелятивистской частицы со спином 1/2, но при этом волновая функция имеет пять компонент вместо двух, и матрица третьей проекции спина не диагональная. Над волновой функцией совершается линейное преобразование, такое что матрица третьей проекции спина становится диагональной $S_3 = \text{diag}(-1, -2, 0, +1, +2)$. В результате обобщенное уравнение Паулиевского типа сводится к пяти независимым уравнениям с однотипной структурой; их решения строятся в терминах вырожденных гипергеометрических функций и приводят к пяти сериям энергетических уравнений осцилляторного типа с различающимися частотами.

Ключевые слова: частица со спином 2, нерелятивистское приближение, однородное магнитное поле, точные решения, спектры энергии.

Nonrelativistic Spin 2 Particle in Magnetic Field

In the paper, we study the nonrelativistic equation for spin 2 particle in presence of external uniform magnetic field. The recently derived nonrelativistic equation for such a particle is similar to the Pauli equation, but the relevant wave functions consists of 5 components, and the all three spin matrices are not diagonal. We perform the needed linear transformation over the wave function, so that in the new basis the third projection becomes diagonal, $S_3 = \text{diag}(-1, -2, 0, +1, +2)$. In this way, the problem in the external uniform magnetic field reduces to 5 independent independent Schrödinger-like equation equations with the same mathematical structure. Their solutions are constructed in terms of the confluent hypergeometric functions, and 5 series of energy levels are found, they look as oscillator spectra with different frequencies.

Key words: spin 2 particle, no onrelativistic approximation, uniform magnetic field, exact solutions, energy spectra.

Введение

Задача о частице в магнитном поле является классической для квантовой механики. Первыми были решены уравнение Шредингера и релятивистское уравнение Дирака [1–3]. Значительно позже были найдены решения релятивистского уравнения Даффина – Кемма для частицы со спином 1, в т. ч. и при наличии у векторной частицы дополнительных характеристик: поляризуемости, аномального магнитного и электрического квадрупольного моментов, кроме того, при учете геометрии трехмерных пространств постоянной кривизны [4–13]. В настоящей работе мы обращаемся к исследованию в магнитном поле уравнения для частицы со спином 2. Исходным является введенное Ф. И. Федоровым [14] матричное 39-компонентное уравнение 1-го порядка [15–19]. В частности, в [19] были найдены решения этого уравнения во внешнем однородном магнитном поле; анализ оказался достаточно сложным, в частности релятивистские спектры энергии получаются, как корни алгебраического уравнения 7-го порядка, пять корней которого дают физически интерпретируемые спектры энергий.

К сожалению, их анализ возможен только численными методами. В работе [20] из 39-компонентного матричного уравнения Федорова было выведено нерелятивистское уравнение, которое напоминает уравнение для нерелятивистской частицы со спином 1/2, но при этом волновая функция имеет пять компонент. В настоящей работе построены решения этой более простой системы уравнений с учетом внешнего магнитного поля.

В работе [20] было выведено нерелятивистское уравнение для частицы со спином 2:

$$iD_0\Psi = -\frac{1}{2M}(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2)\Psi - \frac{ie}{2M}(F_{23}S_1 + F_{31}S_2 + F_{12}S_3)\Psi; \quad (1)$$

волновая функция имеет пять компонент, явный вид спиновых матриц следующий:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{pmatrix}, S_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}, S_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}, S_3 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

символ D_a обозначает $D_a = \partial_a + ieA_a, a = 0, 1, 2, 3$. Для спиновых матриц выполняются коммутационные соотношения

$$S_1S_2 - S_2S_1 = S_3, \quad S_2S_3 - S_3S_2 = S_1, \quad S_3S_1 - S_1S_3 = S_2. \quad (2)$$

1. Диагонализация матрицы проекции спина S_3

Для анализа уравнения в присутствии магнитного поля матрицу третьей проекции спина S_3 удобно иметь диагональной.

Для этого над волновой функций необходимо совершить линейное преобразование

$$S_3\Psi = \bar{\Psi}, \quad \Psi' = U\Psi, \quad \bar{\Psi}' = U\bar{\Psi}, \quad US_3U^{-1}\Psi = \bar{\Psi}',$$

которое диагонализует матрицу S_3 :

$$US_3U^{-1} = \Lambda \Rightarrow US_3 = \Lambda U, \quad \Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

С учетом обозначений

$$U = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{vmatrix}, \quad S_3 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

для элементов матрицы U находим систему уравнений

$$\begin{aligned} 2x_{12} &= \lambda_1 x_{11}, -2x_{11} = \lambda_1 x_{12}, x_{14} = \lambda_1 x_{13}, -x_{13} = \lambda_1 x_{14}, -x_{11} = \lambda_1 x_{15}, \\ 2x_{22} &= \lambda_2 x_{21}, -2x_{21} = \lambda_2 x_{22}, x_{24} = \lambda_2 x_{23}, -x_{23} = \lambda_2 x_{24}, -x_{21} = \lambda_2 x_{25}, \\ 2x_{32} &= \lambda_3 x_{31}, -2x_{31} = \lambda_3 x_{32}, x_{34} = \lambda_3 x_{33}, -x_{33} = \lambda_3 x_{34}, -x_{31} = \lambda_3 x_{35}, \\ 2x_{42} &= \lambda_4 x_{41}, -2x_{41} = \lambda_4 x_{42}, x_{44} = \lambda_4 x_{43}, -x_{43} = \lambda_4 x_{44}, -x_{41} = \lambda_4 x_{45}, \\ 2x_{52} &= \lambda_5 x_{51}, -2x_{51} = \lambda_5 x_{52}, x_{54} = \lambda_5 x_{53}, -x_{53} = \lambda_5 x_{54}, -x_{51} = \lambda_5 x_{55}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь имеем 5 одинаковых подсистем для элементов каждой строки; при этом нужно помнить о том, что строки должны быть линейно независимы (ниже символ строки $a = 1, 2, 3, 4, 5$ опускаем).

Перепишем основную систему

$$2x_2 - \lambda x_1 = 0, -2x_1 - \lambda x_2 = 0, x_4 - \lambda x_3 = 0, -x_3 - \lambda x_4 = 0, -x_1 - \lambda x_5 = 0 \quad (5)$$

в матричной форме

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & . & . & . \\ -2 & -\lambda & . & . & . \\ . & . & -\lambda & 1 & . \\ . & . & -1 & -\lambda & . \\ -1 & . & . & . & -\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Приравниваем определитель матрицы к нулю $\lambda(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 4) = 0$; т. е. корни такие:

$$\lambda_1 = -2i, \quad \lambda_2 = -i, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = +i, \quad \lambda_5 = +2i. \quad (7)$$

При $\lambda_1 = -2i$ имеем уравнения (она описывают элементы первой строки)

$$2x_2 + 2ix_1 = 0, -2x_1 + 2ix_2 = 0, x_4 + 2ix_3 = 0, -x_3 + 2ix_4 = 0, -x_1 + 2ix_5 = 0;$$

их общее решение следующее

$$\lambda_1 = -2i, \quad x_2 = -ix_1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = -\frac{i}{2}x_1;$$

пусть $x_1 = +2i$, тогда 1-я строка состоит из элементов

$$\underline{\lambda_1 = -2i}, \quad x_1 = +2i, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1. \quad (8)$$

Рассматриваем вторую строку, при $\lambda_2 = -i$ система принимает вид

$$2x_2 + ix_1 = 0, -2x_1 + ix_2 = 0, x_4 + ix_3 = 0, -x_3 + ix_4 = 0, -x_1 + ix_5 = 0;$$

ее решение такое:

$$\lambda_2 = -i, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_4 = -ix_3, \quad x_5 = 0;$$

пусть $x_3 = i$, тогда 2-я строка состоит из элементов

$$\underline{\lambda_2 = -i}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = i, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим случай нулевого корня $\lambda_3 = 0$:

$$2x_2 - 0 \cdot x_1 = 0, -2x_1 - 0 \cdot x_2 = 0, x_4 - 0 \cdot x_3 = 0, -x_3 - 0 \cdot x_4 = 0, -x_1 - 0 \cdot x_5 = 0;$$

т. е. $x_5 = 1$, тогда 3-я строка состоит из элементов

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1. \quad (10)$$

При $\lambda_4 = +i$ система принимает вид

$$2x_2 - ix_1 = 0, -2x_1 - ix_2 = 0, x_4 - ix_3 = 0, -x_3 - ix_4 = 0, -x_1 - ix_5 = 0,$$

ее решение такое:

$$\lambda_4 = +i, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_4 = ix_3, \quad x_5 = 0;$$

пусть $x_3 = -i$, тогда 4-я строка состоит из элементов

$$\underline{\lambda_4 = +i}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -i, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 0. \quad (11)$$

При $\lambda_5 = +2i$ имеем уравнения

$$2x_2 - 2ix_1 = 0, -2x_1 - 2ix_2 = 0, x_4 - 2ix_3 = 0, -x_3 - 2ix_4 = 0, -x_1 - 2ix_5 = 0,$$

их решение такое:

$$\lambda_5 = +2i, \quad x_2 = ix_1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = \frac{i}{2}x_1;$$

пусть $x_1 = -2i$, тогда 5-я строка состоит из элементов

$$\underline{\lambda_5 = +2i}, \quad x_1 = -2i, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1; \quad (12)$$

Таким образом, найдена следующая матрица преобразования:

$$\Psi' = U\Psi, \quad U = \begin{vmatrix} 2i & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 1 & 0 \\ -2i & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{vmatrix} -i/4 & 0 & 0 & 0 & i/4 \\ 1/4 & 0 & -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & -i/2 & 0 & i/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (13)$$

убеждаемся, что выполняется необходимое равенство

$$US_3U^{-1} = \begin{vmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2i \end{vmatrix} = S'_3; \quad (14)$$

мнимую единицу на диагонали можно убрать, умножив спиновые матрицы на i .

2. Разделение переменных

Известно представление для векторного потенциала однородного магнитного поля:

$$A = \frac{1}{2} B \times r, \quad B = (0, 0, B), \quad F_{12} = B, F_{23} = 0, F_{31} = 0;$$

отсюда после пересчета к цилиндрическим координатам получаем

$$A_t = 0, \quad A_r = 0, \quad A_x = 0, \quad A_\phi = -\frac{Br^2}{2}. \quad (15)$$

Исходное уравнение в случае такого поля упрощается (переходим к обычным единицам измерения; используем базис Ψ' , в котором матрица S'_3 диагональная; ниже дополнительный символ штриха опускаем)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} + i \frac{e}{\hbar c} A_\phi \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi - \frac{e\hbar}{2M} B S'_3 \Psi, \quad (16)$$

где

$$S_3 = \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad A_\phi = -\frac{Br^2}{2}.$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{eB}{\hbar c} \frac{r^2}{2} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi + \frac{e\hbar B}{2M} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +2 \end{pmatrix} \Psi.$$

Введем обозначения:

$$\frac{eB}{\hbar c} = b, \quad \frac{e\hbar}{2M} B = \mu_0,$$

тогда предыдущее уравнение записывается короче:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{br^2}{2} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi + \mu_0 \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +2 \end{pmatrix} \Psi. \quad (17)$$

Поскольку матрица смешивания в уравнении (17) диагональна, то отдельные компоненты волновой функции $\Psi'_\alpha, \alpha = 1, \dots, 5$ будут подчиняться независимым уравнениям с одинаковой структурой:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_\alpha = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{br^2}{2} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi_\alpha + \mu_\alpha \Psi_\alpha, \quad (18)$$

где $\mu_\alpha = \mu_0 \lambda_\alpha, \lambda_\alpha = -2, -1, 0, +1, +2$.

Достаточно решить уравнение для одного случая (далее индекс α опускаем):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} - i \frac{br^2}{2} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi + \mu \Psi. \quad (19)$$

Решения уравнения (19) ищем в виде $\Psi = e^{-i\frac{m}{\hbar} t} e^{im\phi} e^{ikz} f(r)$, при этом из (19) получаем

$$mf = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{d^2}{dr^2} f + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f - \frac{1}{r^2} \left(m - \frac{br^2}{2} \right)^2 f - k^2 f \right] + \mu f. \quad (20)$$

С использованием обозначения $\frac{2M(m-\mu)}{\hbar^2} = E$ уравнение записывается так:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \left(m - \frac{br^2}{2} \right)^2 + E - k^2 \right] f = 0. \quad (21)$$

Перейдем к новой переменной:

$$\frac{br^2}{2} = x, \quad r = \sqrt{\frac{2x}{b}}, \quad \frac{d}{dr} = \sqrt{2bx} \frac{d}{dx}, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} = b \frac{d}{dx}, \quad \frac{d^2}{dr^2} = 2bx \frac{d^2}{dx^2} + b \frac{d}{dx}$$

тогда получаем

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{1}{4x^2} (m-x)^2 + \frac{1}{2bx} (E-k^2) \right] f = 0. \quad (22)$$

Исследуем поведение решений около точки $x=0$:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{m^2}{4x^2} \right] f \approx 0, \quad f: x^A, \quad A^2 - \frac{m^2}{4} \approx 0 \Rightarrow A = \pm \frac{|m|}{2};$$

для описания связанных состояний пригодно только решение $A = \frac{|m|}{2}$.

Исследуем поведение решений на бесконечности

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} - \frac{1}{4} \right] f \approx 0, \quad f: e^{Bx}, \quad B^2 - \frac{1}{4} \approx 0 \Rightarrow B = \pm \frac{1}{2}; \quad (23)$$

для описаний конечных на бесконечности решений нужно использовать значение $B = -1/2$. Получим решение во всей области переменной x . Исходим из подстановки $f(x) = x^A e^{Bx} F(x)$:

$$F''(x) + \left(\frac{2A+1}{x} + 2B \right) F'(x) + \left(\left(A^2 - \frac{m^2}{4} \right) \frac{1}{x^2} + (2AB + \frac{E-k^2}{2b} + B + \frac{m}{2}) \frac{1}{x} + B^2 - \frac{1}{4} \right) F(x) = 0.$$

Накладываем ограничения $A^2 - \frac{m^2}{4} = 0$, $B^2 - \frac{1}{4} = 0$; они совпадают с найденными ранее при получении асимптотик. С учетом этих ограничений уравнение упрощается (умножаем его на x ; полагаем $B = -1/2, A = +|m|/2$)

$$xF''(x) + (|m| + 1 - x)F'(x) - \left(-\frac{m-1-|m|}{2} - \frac{E-k^2}{2b} \right) F(x) = 0. \quad (24)$$

По структуре оно совпадает с уравнением вырожденного гипергеометрического типа:

$$x \frac{d^2}{dx^2} F(x) + (c-x) \frac{d}{dx} F(x) - aF(x) = 0, \quad (25)$$

$$c = |m| + 1, \quad a = -\frac{m-1-|m|}{2} - \frac{E-k^2}{2b}.$$

Условие полиномиальности решений $a = -n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ дает уравнение

$$\frac{|m|-m+1}{2} - \frac{E-k^2}{2b} = -n \Rightarrow E-k^2 = 2b\left(n + \frac{|m|-m+1}{2}\right). \quad (26)$$

Учтем выражения для используемых параметров параметров:

$$E = \frac{2M\eta}{\hbar^2} - \frac{2M\mu_i}{\hbar^2}, \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2M} B, \quad b = \frac{eB}{\hbar c};$$

тогда из (26) получаем формуле для пяти серий энергетических уровней:

$$\eta - \frac{p^2}{2M} = \frac{e\hbar B}{Mc} \left(n + \frac{|m|-m+1}{2} \right) + \mu_i, \quad \mu_i = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \frac{e\hbar}{2M} B. \quad (27)$$

Заклучение

Выведенное ранее из 39-компонентного уравнения Федорова нерелятивистское уравнение в присутствии внешнего однородного магнитного поля напоминает уравнение для нерелятивистской частицы со спином $1/2$, но волновая функция имеет пять компонент вместо двух, и матрица третьей проекции спина не диагональная.

Над волновой функцией совершается такое линейное преобразование, чтобы матрица третьей проекции спина стала диагональной $S_3 = \text{diag}(-1, -2, 0, +1, +2)$. В результате обобщенное уравнение паулиевского типа сводится к пяти независимым уравнениям с однотипной структурой; их решения строятся в терминах вырожденных гипергеометрических функций и приводят к пяти сериям энергетических уравнений осцилляторного типа с различающимися частотами ω .

Возможным обобщением этой системы является уравнение для частицы со спином 2 , обладающей аномальным магнитным моментом [19]; релятивистское уравнение для такой частицы в формализме уравнений 1-го порядка включает 50 уравнений, и получение нерелятивистского приближения является непростой задачей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Rabi, I. I. Das freie Electron in Homogenen Magnetfeld nach der Diraschen Theorie / I. I. Rabi // Z. Phys. – 1928. – Vol. 49. – P. 507–511.

2. Landau, L. Diamagnetismus der Metalle / L. Landau // *Ztschr. Phys.* – 1930. – Vol. 64. – P. 629–637.
3. Plesset, M. S. Relativistic wave mechanics of the electron deflected by magnetic field / M. S. Plesset // *Phys. Rev.* – 1931. – Vol. 12. – P. 1728–1731.
4. Bogush, A. A. Schrödinger particle in magnetic and electric fields in Lobachevsky and Riemann spaces / A. A. Bogush, V. M. Red'kov, G. G. Krylov // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2008. – Vol. 11, № 4. – P. 403–421.
5. Богуш, А. А. Квантовомеханическая частица в однородном магнитном поле на фоне пространства Лобачевского / А. А. Богуш, В. М. Редьков, Г. Г. Крылов // *Докл. НАН Беларуси.* – 2009. – Т. 53, № 2. – С. 45–51.
6. Богуш, А. А. Квантовомеханическая частица в однородном магнитном поле в сферическом пространстве S_3 / А. А. Богуш, В. М. Редьков, Г. Г. Крылов // *Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* – 2009. – № 2. – С. 57–63.
7. Кисель, В. В. О решениях уравнения Даффина – Кеммера для частицы со спином 1 в однородном магнитном поле / В. В. Кисель, Е. М. Овсиук, В. М. Редьков // *Докл. НАН Беларуси.* – 2010. – Т. 54, № 4. – С. 64–71.
8. Овсиук, Е. М. О дираковской частице в однородном магнитном поле в пространстве Римана / Е. М. Овсиук, В. В. Кисель, В. М. Редьков // *Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* – 2010. – № 4. – С. 95–101.
9. Ovsyuk, E. M. On a Dirac particle in an uniform magnetic field in 3-dimensional spaces of constant negative curvature / E. M. Ovsyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov // *NPCS.* – 2012. – Vol. 15, nr 1. – P. 41–55.
10. Квантовая механика векторной частицы в магнитном поле на четырехмерной сфере / В. В. Кисель [и др.] // *Науч.-техн. вед. СПбГПУ. Сер.: Физ.-мат. науки. Теорет. физика.* – 2012. – № 1 (141). – С. 128–137.
11. Квантовая механика частицы со спином 1 и аномальным магнитным моментом в магнитном поле / В. В. Кисель [и др.] // *Докл. НАН Беларуси.* – 2016. – Т. 60, № 5. – С. 83–90.
12. Квантовая механика частицы со спином 1 и квадрупольным моментом во внешнем однородном магнитном поле / В. В. Кисель [и др.] // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2017. – № 3 (32). – С. 18–27.
13. Квантовая механика частиц со спином во внешнем магнитном поле / Е. М. Овсиук [и др.]. – Минск : Беларус. наука, 2017. – 515 с.
14. Федоров, Ф. И. К теории частицы со спином 2 / Ф. И. Федоров // *Учен. зап. БГУ. Сер. физ.-мат.* – 1951. – № 12. – С. 156–173.
15. Нерелятивистский предел в теории частицы со спином 2 / Е. М. Кисель [и др.] // *Докл. НАН Беларуси.* – 2015. – Т. 59, № 3. – С. 21–27.
16. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time, tetrad method / A. Ivashkevich [et al.] // *Proceedings of Balkan Society of Geometers.* – 2021. – Vol. 28. – P. 45–66.
17. Ивашкевич, А. В. Уравнение Федорова для поля со спином 2, учет псевдоримановой структуры пространства-времени / А. В. Ивашкевич, А. В. Бурый, В. М. Редьков // *Вестн. Фонда фундам. исслед.* – 2022. – № 4. – С. 48–60.
18. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time. II. Separating the variables in spherical coordinates / A. Ivashkevich [et al.] // *Proceedings of Balkan Society of Geometers.* – 2022. – Vol. 29. – P. 12–33.
19. Ivashkevich, A. V. Spin 2 particle, cylindric symmetry, projective operator method, external magnetic field / A. V. Ivashkevich [et al.] // *Нелинейная динамика и приложения : Тр. XXVIII Междунар. семинара, Минск, 21–24 июня 2022 г. / редкол.: В. А. Шапоров*

[и др.] ; под ред. В. А. Шапорова, А. Г. Трифонова. – Минск : Право и экономика, 2022. – С. 302–341.

20. Нерелятивистское приближение в 39-компонентной теории для частицы со спином 2 / А. В. Ивашкевич [и др.] // Изв. Коми науч. центра Урал. отд. Рос. акад. наук. Сер. «Физ.-мат. науки». – 2024 (в печати).

REFERENCES

1. Rabi, I. I. Das freie Electron in Homogenen Magnetfeld nach der Diraschen Theorie / I. I. Rabi // Z. Phys. – 1928. – Vol. 49. – P. 507–511.

2. Landau, L. Diamagnetismus der Metalle / L. Landau // Ztschr. Phys. – 1930. – Vol. 64. – P. 629–637.

3. Plesset, M. S. Relativistic wave mechanics of the electron deflected by magnetic field / M. S. Plesset // Phys. Rev. – 1931. – Vol. 12. – P. 1728–1731.

4. Bogush, A. A. Schrödinger particle in magnetic and electric fields in Lobachevsky and Riemann spaces / A. A. Bogush, V. M. Red'kov, G. G. Krylov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2008. – Vol. 11, № 4. – P. 403–421.

5. Bogush, A. A. Kvantovomekhanichieskaja chastica v odnorodnom magnitnom polie na fonie prostranstva Lobachievskogo / A. A. Bogush, V. M. Ried'kov, G. G. Krylov // Dokl. NAN Bielarusi. – 2009. – T. 53, № 2. – С. 45–51.

6. Bogush, A. A. Kvantovomekhanichieskaja chastica v odnorodnom magnitnom polie v sferichieskom prostranstvie S_3 / A. A. Bogush, V. M. Ried'kov, G. G. Krylov // Vies. Nac. akad. navuk Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2009. – № 2. – S. 57–63.

7. Kisiel', V. V. O rieshenijakh uravnenija Daffina – Kiemmiera dlia chasticy so spinom 1 v odnorodnom magnitnom polie / V. V. Kisiel', Ye. M. Ovsijuk, V. M. Red'kov // Dokl. NAN Bielarusi. – 2010. – T. 54, № 4. – S. 64–71.

8. Ovsijuk, Ye. M. O dirakovskoj chastice v odnorodnom magnitnom polie v prostranstvie Rimana / Ye. M. Ovsijuk, V. V. Kisiel', V. M. Red'kov // Vies. Nac. akad. navuk Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2010. – № 4. – S. 95–101.

9. Ovsijuk, E. M. On a Dirac particle in an uniform magnetic field in 3-dimensional spaces of constant negative curvature / E. M. Ovsijuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov // NPCS. – 2012. – Vol. 15, nr 1. – P. 41–55.

10. Kvantovaja miekhanika vektornoj chasticy v magnitnom polie na chetyriokhmiernoj sfierie / V. V. Kisiel' [i dr.] // Nauch.-tiekhn. vied. SPbGPU. Sier.: Fiz.-mat. nauki. Teoriet. fizika. – 2012. – № 1 (141). – S. 128–137.

11. Kvantovaja miekhanika chasticy so spinom 1 i anomal'nym magnitnym momientom v magnitnom polie / V. V. Kisiel' [i dr.] // Dokl. NAN Bielarusi. – 2016. – T. 60, № 5. – С. 83–90.

12. Kvantovaja miekhanika chasticy so spinom 1 i kvadrupol'nym momientom vo vnieshnem odnorodnom magnitnom polie / V. V. Kisiel' [i dr.] // Problemy fiziki, matematiki i tiekhniki. – 2017. – № 3 (32). – S. 18–27.

13. Kvantovaja miekhanika chastic so spinom vo vnieshnem magnitnom polie / Ye. M. Ovsijuk [i dr.]. – Minsk : Bielarus. navuka, 2017. – 515 s.

14. Fiodorov, F. I. K teorii chasticy so spinom 2 / F. I. Fiodorov // Uchion. zap. BGU. Sier. fiz.-mat. – 1951. – № 12. – S. 156–173.

15. Nierielativistskij priediel v teorii chasticy so spinom 2 / Ye. M. Kisiel' [i dr.] // Dokl. NAN Bielarusi. – 2015. – T. 59, № 3. – S. 21–27.

16. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time, tetrad method / A. Ivashkevich [et al.] // Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2021. – Vol. 28. – P. 45–66.

17. Ivashkevich, A. V. Uravnenije Fiodorova dlia polia so spinom 2, uchiot psievdo-rimanovoj struktury prostranstva-vriemieni / A. V. Ivashkevich, A. V. Buryj, V. M. Ried'kov // Viestn. Fonda fundam. issled. – 2022. – № 4. – S. 48–60.

18. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time. II. Separating the variables in spherical coordinates / A. Ivashkevich [et al.] // Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2022. – Vol. 29. – P. 12–33.

19. Ivashkevich, A. V. Spin 2 particle, cylindric symmetry, projective operator method, external magnetic field / A. V. Ivashkevich [et al.] // Nieliniejnaja dinamika i prilozhenija : Tr. XXVIII Miezhdunar. sieminara, Minsk, 21–24 ijunia 2022 g. / riedkol.: V. A. Shaporov [i dr.] ; pod ried. V. A. Shaporova, A. G. Trifonova. – Minsk : Pravo i ekonomika, 2022. – S. 302–341.

20. Nierelativistskoje priblizhenije v 39-komponentnoj tieorii dlia chasticy so spinom 2 / A. V. Ivashkevich [i dr.] // Izv. Komi nauch. centra Ural. otd. Ros. akad. nauk. Sier. «Fiz.-mat. nauki». – 2024 (v piechati).

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 28.02.2024

УДК 539.12

Olga Semenyuk¹, Anton Buryy², Alina Ivashkevich³, Viktor Red'kov⁴¹Lecturer of the Department of General and Theoretical Physics
of Brest State A. S. Pushkin University²3-d Year Postgraduate Student of the B. I. Stepanov Institute of Physics
of National Academy of Sciences of Belarus³Junior Researcher of the Center for Fundamental Interactions and Astrophysics
of the B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus⁴Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Chief Researcher of the Center for Fundamental Interactions and Astrophysics
of the B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus**Ольга Александровна Семенюк¹, Антон Васильевич Бурый²,
Алина Валентиновна Ивашкевич³, Виктор Михайлович Редьков⁴**¹преподаватель каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²аспирант 3-го года обучения центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики
Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси³мл. науч. сотрудник центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики
Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси⁴д-р физ.-мат. наук, проф.,гл. науч. сотрудник центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики
Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларусиe-mail: ²anton.buryy.97@mail.ru; ³ivashkevich.alina@yandex.by**Stueckelberg – Ogievetsky – Polubarinov – Calb – Ramond – Maxwell Fields,
the Gauge Degrees of Freedom**

A comparative analysis for the problem of the gauge degrees of freedom for massless particles is described by three different systems of equations: Stückelberg's, Ogievetsky – Polubarinov – Kalb – Ramon's, and Maxwell's. All three systems of equations are represented in a unified matrix form, these equations are solved in the Cartesian coordinates. Solutions of the plane wave type are constructed explicitly; correspondingly, we find 5, 4 and 4 independent solutions. In order to decide in each case, which of the solutions correspond to physically observable states and which – to gauge states, we find for all three the matrix of invariant bilinear form, which permits us to fix the structure of the energy-momentum tensor. Expressions for the energy-momentum tensor are obtained in explicit form for all independent solutions (5, 4 and 4). It is shown that for the Stückelberg field, only one solution corresponds to a state with non-zero energy density, it describes the physically observable state; for 4 remaining solutions the energy-momentum tensor turns out to be zero, which indicates the gauge nature of these solutions. For the Ogievetsky – Polubarinov – Kalb – Ramond field, only one solution turns out to be physically observable. Finally, in the case of the Maxwell field, two solutions are physically observable, and two other solutions are gauge ones. Besides, among the two gauge solutions one has the structure of the ordinary plane wave, and the other describes an unusual plane wave: for it there is no standard relationship between energy and the three components of the linear momentum.

Key Words: Stückelberg, Ogievetsky – Polubarinov – Calb – Ramond, Maxwell fields, Cartesian coordinates, exact solutions, energy-momentum tensor, gauge degrees of freedom .

**ПОЛЯ ШТЮКЕЛЬБЕРГА – ОГИЕВЕЦКОГО – ПОЛУБАРИНОВА – КАЛЬБО –
РАМОНА – МАКСВЕЛЛА, КАЛИБРОВОЧНЫЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ**

Проведен сопоставительный анализ вопроса о калибровочных степенях свободы для безмассовых частиц, описываемых тремя разными системами уравнений: Штукельберга, Огиевецкого – Полубаринова – Кальба – Рамона и Максвелла. Все три системы уравнений представляются в унифицированной матричной форме, эти уравнения решены в декартовой системе координат. В явном виде построены решения типа плоских волн; при этом возникают соответственно 5, 4 и 4 независимых решений. Для того, чтобы решить в каждом случае вопрос, какие из решений отвечают физически наблюдаемым состояниям и какие – калибровочным, во всех трех моделях находятся матрицы инвариантной билинейной форме и затем структура тензора энергии-импульса. Выражения для тензора энергии –

импульса получены в явном виде для всех независимых решений (5-ти, 4-х и 4-х). Показано, что в случае поля Штюкельберга из 5 решений только одно соответствует состоянию с ненулевой плотностью энергии, оно описывает наблюдаемое состояние; для 4-х остальных решений тензор энергии-импульса оказывается нулевым, что указывает на калибровочный характер этих решений. В случае поля Огиевецкого – Полубаринова – Кальба – Рамона из 4-х найденных решений только одно оказывается физически наблюдаемым. Наконец, в случае поля Максвелла 2 решения являются физически наблюдаемыми, и 2 – калибровочными; причем из двух калибровочных решений одно имеет структуру обычной плоской волны, а второе описывает необычную плоскую волну: для нее не выполняется стандартное соотношение между энергией и тремя компонентами импульса.

Ключевые слова: Поля Штюкельберга, Огиевецкого – Полубаринова – Кальба – Рамона, Максвелла, декартовые координаты, точные решения, тензор энергии – импульса, калибровочные степени свободы.

1. Massless Stueckelberg Field

In this section we examine the massless Stueckelberg field. Among 11 components field function, antisymmetric tensor represents the gauge variables, the scalar and vector correspond to physically observable quantities.

It is shown that in Cartesian coordinates the Stueckelberg equations permits existence of five independent solutions describe the different states of the field.

We have derived expression for the energy-momentum tensor of the massless Stueckelberg field. We have found its explicit form for arbitrary linear combination of 5 established solutions. We have found 4 combinations of solutions which do not contribute to energy-momentum tensor, therefore they correspond to purely gauge states. There exists only one solution to which there corresponds nonvanishing energy-momentum tensor, it relates to physically observably state of the massless Stueckelberg field.

1.1. Basic equations

Let us consider the equations for massless Stueckelberg field in Cartesian coordinates [1–4]:

$$\partial^a \Psi_a = 0, \partial_a \Psi + \partial^b \Psi_{ab} - \Psi_a = 0, \partial_a \Psi_b - \partial_b \Psi_a = 0; \quad (1)$$

as it should be, in this system there is no parameter with the dimension of the inverse length L^{-1} , we apply the metrical tensor with the signature $(+---)$. The physical dimensions of the components obey the rule $[L^{-1}\Psi] = [L^{-1}\Psi_{ab}] = [\Psi_a]$.

We will apply the matrix form of equations (1). As a field function, the 11-dimensional column is used

$$\Phi = (\Psi; \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3; \Psi_{01}, \Psi_{02}, \Psi_{03}, \Psi_{23}, \Psi_{31}, \Psi_{12}) = (H, H_1, H_2). \quad (2)$$

The system (1) can be written in the block form

$$G^a \partial_a H_1 = 0, \Delta^a \partial_a H + K^a \partial_a H_2 - H_1 = 0, L^a \partial_a H_1 = 0; \quad (3)$$

in 11-dimensional presentation it reads

$$(\Gamma^a \partial_a - P)\Phi = 0, \Gamma^a = \begin{vmatrix} 0 & G^a & 0 \\ \Delta^a & 0 & K^a \\ 0 & L^a & 0 \end{vmatrix}, P = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \Phi = \begin{vmatrix} H \\ H_1 \\ H_2 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Let us write down the explicit form of all matrix blocks:

$$G_0 = (1000), G_1 = (0-100), G_2 = (00-10), G_3 = (000-1),$$

$$\Delta^0 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \Delta^1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \Delta^2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \Delta^3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

$$K^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, K^1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$K^2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, K^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$L^0 = \begin{vmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, L^1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{vmatrix}, L^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, L^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Bearing in mind the substitution for plane wave solutions

$$\Psi(x) = f\varphi(x), \Psi_a = f_a\varphi(x), \Psi_{ab}(x) = f_{ab}(x)\varphi(x); \varphi(x) = e^{-ik_ax^a}; \quad (5)$$

we should make the following changes, $\partial_a \Rightarrow -ik_a, a=0,1,2,3, k_0 = k^0 = m$. It is convenient to present eq. (4) in the block form

$$\begin{aligned} (-iG^0k_0 - iG^1k_1 - iG^2k_2 - iG^3k_3)H_1 &= 0, \\ (-i\Delta^ak_a - i\Delta^ak_a - i\Delta^ak_a - i\Delta^ak_a)H & \\ +(-iK^0k_0 - iK^1k_1 - iK^2k_2 - iK^3k_3)H_2 - H_1 &= 0, \\ (-iL^0k_0 - iL^1k_1 - iL^2k_2 - iL^3k_3)H_1 &= 0, \end{aligned} \quad H = f, \quad H_1 = \begin{vmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{vmatrix}, \quad H_2 = \begin{vmatrix} E_j \\ B_j \end{vmatrix}, \quad j=1,2,3. \quad (6)$$

Further we get the algebraic system in explicit matrix form $A\Phi = 0$:

$$\begin{vmatrix}
 0 & -k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -k_0 & i & 0 & 0 & 0 & k_1 & k_2 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\
 k_1 & 0 & -i & 0 & 0 & -k_0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & -k_2 \\
 -k_2 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & k_0 & 0 & k_3 & 0 & -k_1 \\
 k_3 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & -k_0 & k_2 & -k_1 & 0 \\
 0 & k_1 & -k_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & k_2 & 0 & -k_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & k_3 & 0 & 0 & -k_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_3 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & k_2 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{vmatrix} \begin{matrix} f \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{matrix} = 0. \tag{7}$$

Rank of the matrix equals 8. Allowing for the known condition $k_0 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$, we get the matrix of the rank 6.

Removing the fifth and four last rows, we get the matrix with the same rank

$$\begin{vmatrix}
 0 & -k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -k_0 & i & 0 & 0 & 0 & k_1 & k_2 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\
 k_1 & 0 & -i & 0 & 0 & -k_0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & -k_2 \\
 -k_2 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & k_0 & 0 & k_3 & 0 & -k_1 \\
 0 & k_1 & -k_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & k_2 & 0 & -k_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{vmatrix} \begin{matrix} f \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{matrix} = 0. \tag{8}$$

As a result, we arrive at the inhomogeneous system

$$\begin{vmatrix}
 0 & -k_0 & k_1 & k_2 & 0 & 0 \\
 -k_0 & i & 0 & 0 & k_1 & k_2 \\
 k_1 & 0 & -i & 0 & -k_0 & 0 \\
 -k_2 & 0 & 0 & i & 0 & k_0 \\
 0 & k_1 & -k_0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & k_2 & 0 & -k_0 & 0 & 0
 \end{vmatrix} \begin{matrix} f \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ E_1 \\ E_2 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} k_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} f_3 - \begin{vmatrix} 0 \\ k_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} E_3 - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_3 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} B_1 - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} B_2 - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_2 \\ -k_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} B_3; \tag{9}$$

the determinant of the matrix is $\det A_{6 \times 6} = k_3^4 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$.

Further we find 5 independent solutions:

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} f \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/k_3 \\ k_0/k_3 \\ k_1/k_3 \\ k_2/k_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} f_3, f \neq 0, f_0 \neq 0, f_i \neq 0, E_i = 0, B_i = 0,$$

all gauge variables vanish, so this solution may be considered as the physical one Ψ_1 ;

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} f \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0/k_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_1/k_3 \\ k_2/k_3 \end{pmatrix} E_3, f \neq 0, f_0 = 0, f_i = 0, E_i \neq 0, B_i = 0,$$

observable and gauge variables are presented here;

$$\Psi_3 = \begin{pmatrix} f \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_2/k_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k_1k_2/k_3k_0 \\ -(k_2^2 + k_3^2)/k_3k_0 \end{pmatrix} B_1, f \neq 0, f_0 = 0, f_i = 0, E_{1,2} \neq 0, E_3 = 0, B_1 \neq 0, B_{2,3} = 0,$$

observable and gauge variables are presented here;

$$\Psi_4 = \begin{pmatrix} f \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1/k_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (k_1^2 + k_3^2)/k_0k_3 \\ k_1k_2/k_0k_3 \end{pmatrix} B_2, f \neq 0, f_0 = 0, f_i = 0, E_{1,2} \neq 0, E_3 = 0, B_2 \neq 0, B_{1,3} = 0,$$

observable and gauge variables are presented here;

$$\Psi_5^{gauge} = \begin{pmatrix} f \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k_2/k_0 \\ k_1/k_0 \end{pmatrix} B_3, f = 0, f_0 = 0, f_i = 0, dE_{1,2} \neq 0, E_3 = 0, B_{1,2} = 0, B_3 \neq 0;$$

only gauge variables are presented here, so this solution might be considered as purely gauge as well.

In 11-dimensional form, these 5 solutions read

$$\Psi_1 = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} i/k_3 & & 0 & & k_0/k_3 & & -k_2/k_3 & & & & k_1/k_3 \\ k_0/k_3 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & 0 \\ k_1/k_3 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & 0 \\ k_2/k_3 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & 0 \\ 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & 0 \\ 0 & f_3, \Psi_5^{gauge} = & -k_2/k_0 & B_3, \Psi_2 = & k_1/k_3 & E_3, \Psi_3 = & -k_1k_2/(k_3k_0) & B_1, \Psi_4 = & (k_1^2 + k_3^2)/(k_3k_0) & B_2. & \\ 0 & & k_1/k_0 & & k_2/k_3 & & -(k_2^2 + k_3^2)/(k_3k_0) & & (k_1k_2)/(k_3k_0) & & \\ 0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & \\ 0 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array} \quad (10)$$

It is necessary to have known, which solutions are the gauge and which are physically observable.

1.2. Energy-Momentum Tensor, the Gauge Solutions

In order to separate the gauge solutions from physically observable ones, we should specify the structure of the energy-momentum tensor for the Stueckelberg field. To this end, we start with the equation

$$(\Gamma^a \partial_a - P)\Psi = 0. \quad (11)$$

Let us introduce the conjugated function (η is the matrix of the bilinear form)

$$\bar{\Psi} = \Psi^+ \eta, \quad \Psi^+ \eta \eta [(\Gamma^a)^+ \overleftarrow{\partial}_a - P] \eta = 0, \quad \eta^{-1} = 1,$$

or differently

$$\Psi^+ \eta = \bar{\Psi}, \quad \bar{\Psi} [\eta (\Gamma^a)^+ \overleftarrow{\partial}_a - \eta P \eta] = 0.$$

Let us impose the following constraints

$$\eta (\Gamma^a)^+ \eta = -\Gamma^a, \quad \eta P \eta = P, \quad \eta^2 = 1; \quad (12)$$

relations (12) may be presented as follows

$$\eta (\Gamma^a)^+ = -\Gamma^a \eta, \quad \eta P = P \eta, \quad \eta^2 = 1. \quad (13)$$

Then the conjugated equation reads

$$\bar{\Psi} (\Gamma^a \overleftarrow{\partial}_a + P) = 0. \quad (14)$$

Multiplying eq. (11) from the left by $\bar{\Psi}$, and multiplying eq. (14) from the right by Ψ , and summing the results we get

$$\bar{\Psi} \Gamma^a \partial_a \Psi + \bar{\Psi} \Gamma^a \overleftarrow{\partial}_a \Psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_a (\bar{\Psi} \Gamma^a \Psi) = 0.$$

This is the conservation law for the current $J^a = \bar{\Psi}\Gamma^a\Psi$. Let us define the energy-momentum tensor.

To this end, we act on eq. (11) by operator $\bar{\Psi}\partial_b$, and multiply eq. (14) from the right by $\partial_b\Psi$, and sum the results

$$\bar{\Psi}\partial_b(\Gamma^a\partial_a - P)\Psi + \bar{\Psi}(\Gamma^a\overleftarrow{\partial}_a + P)\partial_b\Psi = 0.$$

Further we derive

$$\bar{\Psi}\partial_a\Gamma^a\partial_b\Psi + (\partial_a\bar{\Psi})\Gamma^a\partial_b\Psi = 0,$$

this gives

$$\partial_a(\bar{\Psi}(x)\Gamma^a\partial_b\Psi(x)) = 0, R_b^a(x) = \bar{\Psi}(x)\Gamma^a\partial_b\Psi(x), \partial_a R_b^a(x) = 0. \quad (15)$$

Let us find explicit form of the matrix η , it should obey the following restrictions

$$h^{-1}(\Gamma^a)^+\eta = -\Gamma^a \Rightarrow \tilde{\Gamma}^a\eta = -\eta\Gamma^a, \quad \eta = \begin{vmatrix} A_{1\times 1} & 0 & 0 \\ 0 & B_{4\times 4} & 0 \\ 0 & 0 & C_{6\times 6} \end{vmatrix}. \quad (16)$$

The constraint $\tilde{\Gamma}^0\eta + \eta\Gamma^0$ gives

$$\eta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Let us start with the tensor R_b^a , defined by the formula

$$R_b^a(x) = \Psi^+\eta\Gamma^a\partial_b\Psi, \quad (18)$$

that is

$$R_b^a(x) = H^+G^a\partial_b H_1 + H_1^+B(\Delta^a\partial_b H + K^a\partial_b H_2) + H_2^+CL^a\partial_b H_1. \quad (19)$$

Taking into account the substitutions in the form of the plane waves, we get

$$R_b^a(x) = -i[H^+AG^ak_b H_1 + H_1^+B(\Delta^ak_b H + K^ak_b H_2) + H_2^+CL^ak_b H_1]. \quad (20)$$

Now we calculate this tensor for 5 independent solutions (10). To this end, we are to find three terms in explicit form for each solution:

$$\underline{\Psi}_1, R^a_b = \begin{vmatrix} \frac{2k_0^4}{k_3^2} & -\frac{2k_0^3k_1}{k_3^2} & -\frac{2k_0^3k_2}{k_3^2} & -\frac{2k_0^3}{k_3} \\ \frac{2k_0^3k_1}{k_3^2} & \frac{2k_0^2k_1^2}{k_3^2} & \frac{2k_0^2k_1k_2}{k_3^2} & \frac{2k_0^2k_1}{k_3} \\ \frac{2k_0^3k_2}{k_3^2} & \frac{2k_0^2k_1k_2}{k_3^2} & \frac{2k_0^2k_2^2}{k_3^2} & \frac{2k_0^2k_2}{k_3} \\ \frac{2k_0^3}{k_3} & \frac{2k_0^2k_1}{k_3} & \frac{2k_0^2k_2}{k_3} & 2k_0^2 \end{vmatrix} \neq 0; \quad (21)$$

this solution represents physically observable state. We readily verify that four remaining solutions $\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5$ give zero contribution to tensor R^a_b :

$$\underline{\Psi}_i, R^a_b \equiv 0, \quad i = 2, 3, 4, 5; \quad (22)$$

they represent the gauge states.

1.3. Conclusion

It is shown that in Cartesian coordinates, the Stueckelberg massless equation permits existence of five independent solutions describing the different states of the field.

We have derived expression for the energy-momentum tensor of this field and show that this tensor vanishes identically for 4 independent solutions, and does not vanish only for one solution which represents the physically observable state of Stueckelberg massless particle.

Four remaining solutions relate to the gauge states.

2. The Calb – Ramond Field

In this section we examine the Ogievetsky – Polubarinov – Calb – Ramond field [5–7] in Cartesian coordinates.

Among 10 components of the field function, antisymmetric tensor represents the gauge variables, whereas the vector corresponds to physically observable ones.

It is shown that the Calb – Ramond equation permits existence of 4 independent solutions which describe the different states of the field.

We have derived expression for the energy-momentum tensor of the Calb – Ramond field. There exists only one solution to which there corresponds the nonvanishing energy-momentum tensor, it relates to physically observable state of the Calb – Ramond field.

2.1. Basic equation

Let us consider the system of equations for Ogievetsky – Polubarinov – Calb – Ramond field in Cartesian coordinates:

$$\partial^b \Psi_{ab} - \Psi_a = 0, \quad \partial_a \Psi_b - \partial_b \Psi_a = 0; \quad (23)$$

in this system there is no parameter with the dimension of the inverse length.

Tensor components are considered as gauge ones. The physical dimensions of the involved components obey the rule $[(1/L)\Psi_{ab}] = [\Psi_a]$. We will apply the matrix form of equations (23), using the 10-dimensional column

$$\Phi = (\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3; \Psi_{01}, \Psi_{02}, \Psi_{03}, \Psi_{23}, \Psi_{31}, \Psi_{12}) = (H_1, H_2). \quad (24)$$

The system (23) can be written in the block form

$$K^a \partial_a H_2 - H_1 = 0, \quad L^a \partial_a H_1 = 0; \quad (25)$$

in 10-dimensional presentation it reads

$$(\Gamma^a \partial_a - P)\Phi = 0, \quad \Gamma^a = \begin{vmatrix} 0 & K^a \\ L^a & 0 \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} I_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Phi = \begin{vmatrix} H_1 \\ H_2 \end{vmatrix}. \quad (26)$$

Let us write down the explicit form of all matrix blocks

$$K^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad K^1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$K^2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad K^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$L^0 = \begin{vmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad L^1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{vmatrix}, \quad L^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad L^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Bearing in mind the substitutions for plane waves

$$\Psi_a = f_a \varphi(x), \quad \Psi_{ab} = f_{ab} \varphi(x), \quad \varphi(x) = e^{-ik_a x^a}; \quad (27)$$

we make the changes $\partial_a \Rightarrow -ik_a, a = 0, 1, 2, 3, k_0 = k^0 = m$

Equation (26) takes the form

$$\begin{aligned} (-iK^0 k_0 - iK^1 k_1 - iK^2 k_2 - iK^3 k_3) H_2 &= H_1, \\ (-iL^0 k_0 - iL^1 k_1 - iL^2 k_2 - iL^3 k_3) H_1 &= 0, \end{aligned} \quad H_1 = \begin{vmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{vmatrix}, \quad H_2 = \begin{vmatrix} E_j \\ B_j \end{vmatrix}.$$

Further we obtain the algebraic system, we present it in the matrix $A\Phi = 0$:

$$\begin{pmatrix}
 i & 0 & 0 & 0 & k_1 & k_2 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -i & 0 & 0 & -k_0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & -k_2 \\
 0 & 0 & i & 0 & 0 & k_0 & 0 & k_3 & 0 & -k_1 \\
 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & -k_0 & k_2 & -k_1 & 0 \\
 k_1 & -k_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_2 & 0 & -k_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_3 & 0 & 0 & -k_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & k_3 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -k_3 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & k_2 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 f_0 \\
 f_1 \\
 f_2 \\
 f_3 \\
 E_1 \\
 E_2 \\
 E_3 \\
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3
 \end{pmatrix}
 = 0. \tag{28}$$

Acting in the same way as for the case of Stuekelberg field, we find 4 independent solutions:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k_3/k_0 \\ k_2/k_0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} B_1, \Phi_2 = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_3/k_0 \\ 0 \\ -k_1/k_0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} B_2, \Phi_3 = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k_2/k_0 \\ k_1/k_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} B_3, \Phi_4 = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ k_1/k_0 \\ k_2/k_0 \\ k_3/k_0 \\ -ik_1/k_0^2 \\ -ik_2/k_0^2 \\ -ik_3/k_0^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} f_0. \tag{29}$$

2.2. The gauge degrees of freedom

Let us turn to additional study of the solutions $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$.

By definition, the gauge solutions should not contribute to the energy-momentum tensor of the Ogievetsky – Polubarinov – Calb – Ramond field.

In order to find this tensor, we need the matrix η of the invariant bilinear form:

$$\eta^{-1}(\Gamma^a)^+ \eta = -\Gamma^a, \quad \tilde{\Gamma}^a \eta = \eta \Gamma^a, \quad \eta = \begin{pmatrix} B_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & C_{6 \times 6} \end{pmatrix}; \tag{30}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, B = \beta \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

the constraint $\tilde{\Gamma}^0 \eta + \eta \Gamma^0 = 0$ gives

$$\eta = \begin{vmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix}, \quad B = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (31)$$

Let us find the energy-momentum tensor for this field. To this end, consider the following quantity:

$$R^a_b(x) = H_1^+ BK^a \partial_b H_2 + H_2^+ CL^a \partial_b H_1. \quad (32)$$

Bearing in mind the substitution in the form of plane waves, from (30) we get

$$R^a_b(x) = -i[H_1^+ BK^a k_b H_2 + H_2^+ CL^a k_b H_1]. \quad (33)$$

Further we calculate the tensor $R^a_b(x)$ for 4 independent solutions. After simple calculation, we get zeros identically for first 3 solutions Φ_1, Φ_2, Φ_3 :

$$(R^a_b)_{|\Phi_1} \equiv 0, \quad (R^a_b)_{|\Phi_2} \equiv 0, \quad (R^a_b)_{|\Phi_3} \equiv 0. \quad (34)$$

For the fourth solution Φ_4 , we obtain

$$R^a_b = 2 \begin{vmatrix} 1 & -\frac{k_1}{k_0} & -\frac{k_2}{k_0} & -\frac{k_3}{k_0} \\ -\frac{k_1}{k_0} & \frac{k_1^2}{k_0^2} & -\frac{k_1 k_2}{k_0^2} & -\frac{k_1 k_3}{k_0^2} \\ \frac{k_2}{k_0} & -\frac{k_1 k_2}{k_0^2} & \frac{k_2^2}{k_0^2} & -\frac{k_2 k_3}{k_0^2} \\ -\frac{k_3}{k_0} & \frac{k_1 k_3}{k_0^2} & -\frac{k_2 k_3}{k_0^2} & \frac{k_3^2}{k_0^2} \end{vmatrix} f_0 f_0^* \neq 0. \quad (35)$$

We can verify that the 4-vector of the current for 4 behaves as follows:

$$J^a = \bar{\Psi} \Gamma^a \Psi = \tilde{\Psi}^* \eta \Gamma^a \Psi, \quad \Psi_4, \quad J^a = 2i \frac{1}{k_0^2} \begin{vmatrix} k_0 \\ -k_1 \\ -k_2 \\ -k_3 \end{vmatrix} f_0^* f_0, \quad (36)$$

for solutions Ψ_1, \dots, Ψ_3 the current J^a turns out to be vanished.

2.3. Conclusion

In this section, we have shown that for Ogievetsky – Polubarinov – Calb – Ramond field there exists only one solution to which there corresponds nonvanishing energy-momentum

tensor, it relates to physically observable state of this field. In contrast to that situation, in Maxwell theory there arise two physical and two gauge states.

3. Maxwell field

In the section, we examine the Maxwell field in Cartesian coordinates. Among 10 components field function, antisymmetric tensor represents the physically observable quantities, whereas the vector corresponds to gauge variables.

It is shown that the Maxwell equations permits existence of 4 independent solutions which describe the different states of the field. We have derived expression for the energy-momentum tensor of the this field.

We find its explicit form for arbitrary linear combination of 4 established solutions. We have found 2 solutions which do not contribute to the energy-momentum tensor, therefore they correspond to purely gauge states.

There exists 2 solutions to which there corresponds the nonvanishing energy-momentum tensor, it relates to physically observable states of the electromagnetic field.

3.1. Cartesian Coordinates

Let us consider the system of equations for Maxwell field in Cartesian coordinates

$$\partial^b \Psi_{ab} = 0, \quad \partial_a \Psi_b - \partial_b \Psi_a = \Psi_{ab}. \quad (37)$$

The physical dimensions of the involved components are $[(1/L)\Psi_{ab}] = [\Psi_a]$. We will apply the matrix form of equations (37), using the 10-dimensional column

$$\Phi = (\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3; \Psi_{01}, \Psi_{02}, \Psi_{03}, \Psi_{23}, \Psi_{31}, \Psi_{12}) = (H_1, H_2). \quad (38)$$

The system (37) can be written in the block form

$$K^a \partial_a H_2 = 0, \quad L^a \partial_a H_1 = H_2; \quad (39)$$

in 10-dimensional presentation it reads

$$(\Gamma^a \partial_a - P)\Phi = 0, \quad \Gamma^a = \begin{vmatrix} 0 & K^a \\ L^a & 0 \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{6 \times 6} \end{vmatrix}, \quad \Phi = \begin{vmatrix} H_1 \\ H_2 \end{vmatrix}. \quad (40)$$

The explicit form of all matrix blocks was given in section 2. Bearing in mind the substitutions for plane waves, we obtain

$$\begin{aligned} (-iK^0 k_0 - iK^1 k_1 - iK^2 k_2 - iK^3 k_3)H_2 &= 0, \\ (-iL^0 k_0 - iL^1 k_1 - iL^2 k_2 - iL^3 k_3)H_1 &= H_2, \end{aligned} \quad H_1 = \begin{vmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{vmatrix}, \quad H_2 = \begin{vmatrix} E_j \\ B_j \end{vmatrix}. \quad (41)$$

Further we derive the algebraic system in explicit form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & k_2 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_0 & 0 & 0 & 0 & -k_3 & k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_0 & 0 & k_3 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_0 & -k_2 & k_1 & 0 \\ k_1 & -k_0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & -k_0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & -k_0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & k_2 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (42)$$

The rank of the matrix equals 9. We can verify that the rank remains the same if we remove the first row of the matrix.

When removing in $A_{9 \times 10}$ the first column, we get the square matrix $A_{9 \times 9}$ with determinant $\det A_{9 \times 9} = -ik_0^2(-k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^2$.

First, let us do not impose the constraint $-k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$, thereby we search for solution which does not obey the Lorenz condition:

$$\Phi_a = \partial_a \lambda, \quad \partial^a \Phi_a \neq 0, \quad \lambda = e^{-if_0 x_0} e^{-ik_j x_j}; \quad (43)$$

in order to avoid ambiguity, we change the symbol k_0 by f_0 .

Correspondingly, the system (42) is equivalent to the following nonhomogeneous equation

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_0 & 0 & 0 & 0 & -k_3 & k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_0 & 0 & k_3 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_0 & -k_2 & k_1 & 0 \\ -f_0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ -k_3 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ k_2 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} f_0, \quad f_0 \neq k_0. \quad (44)$$

From (44) it follows to the following solution

$$\Phi_{9 \times 1} = \left(\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \Rightarrow \Phi_{10 \times 1} = \left(\begin{array}{c} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) e^{-i(k_0 x_0 + k_j x_j)}, f_0 \neq \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}; \quad (45)$$

it is not the ordinary plane wave, because $f_0 \neq k_0$.

Now let us turn back to the system (42), and take into account the constraint $k_0^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$; so we get the matrix with the rank 7. Removing the rows 3,5,8, we get matrix with the same rank. Further we arrive at the nonhomogeneous equation

$$\left(\begin{array}{cccccc|c|c|c|c} 0 & 0 & k_1 & k_2 & k_3 & 0 & 0 & f_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_0 & 0 & k_3 & 0 & f_1 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_0 & -k_2 & k_1 & E_1 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & E_2 & -k_0 & f_2 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & E_3 & 0 & -k_0 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & B_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_2 & -k_1 & 0 & i \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k_0 \\ 0 \\ 0 \\ -k_1 \end{array} \right) f_2 - \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k_0 \\ k_1 \\ 0 \end{array} \right) f_3 - \left(\begin{array}{c} 0 \\ -k_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{array} \right) B_3;$$

Let us write down all four solutions in 10-dimensional form ($K(x) = e^{-i(k_0 x_0 + k_j x_j)}$)

$$\Phi_1^{gauge} = \left(\begin{array}{c} f_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) e^{-i(f_0 x_0 + k_j x_j)}, \quad \Phi_2 = \left(\begin{array}{c} \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{k_0 k_2} \\ \frac{k_1}{k_2} \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{ik_1 k_3^2}{k_0 k_2} \\ -\frac{ik_3^2}{k_0} \\ i(k_3 k_1^2 + k_2^2 k_3) \\ \frac{k_0 k_2}{ik_3} \\ -\frac{ik_1 k_3}{k_2} \\ 0 \end{array} \right) K f_2, \quad \Phi_3 = \left(\begin{array}{c} \frac{k_3}{k_0} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{ik_1 k_3}{k_0} \\ \frac{ik_2 k_3}{k_0} \\ i(k_1^2 + k_2^2) \\ k_0 \\ -ik_2 \\ ik_1 \\ 0 \end{array} \right) K f_3, \quad \Phi_4 = \left(\begin{array}{c} -\frac{ik_1}{k_0 k_2} \\ -\frac{i}{k_2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(k_2^2 + k_3^2)}{k_0 k_2} \\ \frac{k_1}{k_0} \\ \frac{k_1 k_3}{k_0 k_2} \\ 0 \\ -\frac{k_3}{k_2} \\ 1 \end{array} \right) K B_3. \quad (46)$$

Solution Φ_1^{gauge} is pure gauge, because $f_0 \neq \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$ this solution is not a plane wave in the ordinary sense. Solutions 2,3,4 are mixed, they contain both physical and gauge variables; besides, they have the structure of the ordinary plane waves. Let us consider the linear combination of two mixed solutions $a_2\Phi_2 + a_3\Phi_3$; because we wish to construct a solution of the gauge type we will follow only 6 tensor components

$$\varphi_2 = \begin{vmatrix} -ik_1k_3^2 / (k_0k_2) \\ -ik_3^2 / k_0 \\ i(k_3k_1^2 + k_2^2k_3) / k_0k_2 \\ ik_3 \\ -ik_1k_3 / k_2 \\ 0 \end{vmatrix} f_2, \quad \varphi_3 = \begin{vmatrix} ik_1k_3 / k_0 \\ ik_2k_3 / k_0 \\ -i(k_1^2 + k_2^2) / k_0 \\ -ik_2 \\ ik_1 \\ 0 \end{vmatrix} f_3.$$

Let us impose the following condition $a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 = 0$, then the above equation leads to the following system

$$\begin{vmatrix} -(ik_1k_3^2) / (k_2k_0) & ik_1k_3 / k_0 \\ -ik_3^2 / k_0 & ik_2k_3 / k_0 \\ i(k_3k_1^2 + k_2^2k_3) / k_2k_0 & -i(k_1^2 + k_2^2) / k_0 \\ ik_3 & -ik_2 \\ -ik_1k_3 / k_2 & ik_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2f_2 \\ a_3f_3 \end{vmatrix} = 0.$$

The rank of the matrix equals 1, so we have only one independent equation (let us take the fourth one)

$$ik_3a_2f_2 - ik_2a_3f_3 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{k_2}{f_2}, \quad a_3 = \frac{k_3}{f_3}. \quad (47)$$

Therefore relation $a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 = 0$ leads to

$$\frac{k_2}{f_2} \varphi_2 + \frac{k_3}{f_3} \varphi_3 = 0. \quad (48)$$

Therefore in 10-dimensional representation we have (because solutions Φ_2 and Φ_3 are defined up to arbitrary multiplier, we can set $f_2 = f_3 = f$; also the exponential multiplier is added)

$$a_2\Phi_2 + a_3\Phi_3 = \frac{k_2}{f_2} \begin{vmatrix} (k_1^2 + k_2^2) / k_0k_2 \\ k_1 / k_2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{k_3}{f_3} \begin{vmatrix} k_3 / k_0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{f} \begin{vmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} e^{-i(k_0x_0 + k_jx_j)} = \Phi_2^{gauge}, \quad (49)$$

evidently this solution is a gauge one.

Let us find the explicit form of the alternative combination (it should describe a physically observable state)

$$\frac{k_2}{f_2}\varphi_2 - \frac{k_3}{f_3}\varphi_3 = \frac{1}{f} \left[\begin{array}{c} (k_1^2 + k_2^2)/(k_0 k_2) \\ k_1/k_2 \\ 1 \\ 0 \\ -ik_1 k_3^2/(k_0 k_2) \\ -ik_3^2/k_0 \\ i(k_3 k_1^2 + k_2^2 k_3)/k_0 k_2 \\ ik_3 \\ -ik_1 k_3/k_2 \\ 0 \end{array} \right] k_2 - \left[\begin{array}{c} k_3/k_0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ ik_1 k_3/k_0 \\ ik_2 k_3/k_0 \\ -i(k_1^2 + k_2^2)/k_0 \\ -ik_2 \\ ik_1 \\ 0 \end{array} \right] k_3 e^{-i(k_0 x_0 + k_j x_j)}, \quad (50)$$

whence it follows

$$k_2 f \Phi_2 - k_3 f \Phi_3 = \frac{1}{f} \left[\begin{array}{c} (k_1^2 + k_2^2 - k_3^2)/k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ -k_3 \\ -2ik_1 k_3^2/k_0 \\ -2ik_2 k_3^2/k_0 \\ 2i(k_1^2 + k_2^2)k_3/k_0 \\ 2ik_2 k_3 \\ -2ik_1 k_3 \\ 0 \end{array} \right] e^{-i(k_0 x_0 + k_j x_j)} = \Phi_1^{phys}. \quad (51)$$

It is the mixed solution in the form of the ordinary plane wave, it contains both physical and gauge variables.

Let us collect all four solutions together

$$\Phi_1^{gauge} = \left[\begin{array}{c} f_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] e^{-i(f_0 x_0 + k_j x_j)}, \quad \Phi_2^{gauge} = \frac{1}{f} \left[\begin{array}{c} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] e^{-i(k_0 x_0 + k_j x_j)},$$

$$\Phi_1^{phys} = \frac{1}{f} \begin{vmatrix} (k_1^2 + k_2^2 - k_3^2) / k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ -k_3 \\ -2ik_1k_3^2 / k_0 \\ -2ik_2k_3^2 / k_0 \\ 2i(k_1^2 + k_2^2)k_3 / k_0 \\ 2ik_2k_3 \\ -2ik_1k_3 \\ 0 \end{vmatrix} e^{-i(k_0x_0 + k_jx_j)}, \quad \Phi_2^{phys} = \Phi_3 = \Phi_4 = B_3 \begin{vmatrix} -ik_1 / (k_0k_2) \\ -i / k_2 \\ 0 \\ 0 \\ -(k_2^2 + k_3^2) / (k_0k_2) \\ k_1 / k_0 \\ (k_1k_3) / (k_0k_2) \\ 0 \\ -k_3 / k_2 \\ 1 \end{vmatrix} e^{-i(k_0x_0 + k_jx_j)}. \quad (52)$$

3.2. The gauge degrees of freedom

Let us turn to additional study of solutions $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$. By definition, the gauge solutions should not contribute to the energy-momentum tensor of the Maxwell field.

In order to find this tensor, we need the matrix η of the bilinear form. It should satisfy the following conditions

$$\eta^{-1}(\Gamma^a)^+ \eta = -\Gamma^a, \quad \tilde{\Gamma}^a \eta = -\eta \Gamma^a, \quad \eta = \begin{vmatrix} B_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & D_{6 \times 6} \end{vmatrix}; \quad (53)$$

the matrix of bilinear form were given in section 2.

Expression for tensor R^a_b was given in section 2

$$R^a_b(x) = \Phi^+ \eta \Gamma^a \partial_b \Phi = -i[H_1^+ BK^a k_b H_2 + H_2^+ DL^a k_b H_1] = I + II. \quad (54)$$

Further we find explicit form of the tensor $R^a_b(x)$ for 4 independent solutions:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{gauge}, \quad I \equiv 0, \quad II \equiv 0, \quad R^a_b \equiv 0, \\ \Phi_2^{gauge}, \quad I \equiv 0, \quad II \equiv 0, \quad R^a_b \equiv 0; \end{aligned} \quad (55)$$

consider the physical solutions

$$\Phi_1^{phys}, R^a_b = 4(k_1^2 + k_2^2)k_3^2 \frac{1}{k_0} \frac{1}{f^2} \begin{vmatrix} 2k_0 & 2k_1 & 2k_2 & 2k_3 \\ k_0 - k_1 & (k_0 - k_1)k_1 / k_0 & (k_0 - k_1)k_2 / k_0 & (k_0 - k_1)k_3 / k_0 \\ k_0 - k_2 & (k_0 - k_2)k_1 / k_0 & (k_0 - k_2)k_2 / k_0 & (k_0 - k_2)k_3 / k_0 \\ k_0 - k_3 & (k_0 - k_3)k_1 / k_0 & (k_0 - k_3)k_2 / k_0 & (k_0 - k_3)k_3 / k_0 \end{vmatrix};$$

$$\Phi_2^{phys}, R^a_b = B_3^2 \frac{k_0^2 - k_1^2}{k_2^2} \frac{1}{k_0} \begin{vmatrix} 2k_0 & 2k_1 & 2k_2 & 2k_3 \\ k_0 - k_1 & (k_0 - k_1)k_1 / k_0 & (k_0 - k_1)k_2 / k_0 & (k_0 - k_1)k_3 / k_0 \\ k_0 - k_2 & (k_0 - k_2)k_1 / k_0 & (k_0 - k_2)k_2 / k_0 & (k_0 - k_2)k_3 / k_0 \\ k_0 - k_3 & (k_0 - k_3)k_1 / k_0 & (k_0 - k_3)k_2 / k_0 & (k_0 - k_3)k_3 / k_0 \end{vmatrix}.$$

Two last tensors differ from zero, so they relate to physically observable states of the Maxwell field.

3.3. Conclusion

In this section, we have shown that for the Maxwell field, two gauge solutions and two physically observable solutions exist.

So we can make general conclusion that three models by Maxwell, Ogievetsky – Polubarinov – Calb – Ramond, and Stueckelberg, substantially differ from each other. They describe different physical massless fields.

REFERENCES

1. Stueckelberg, E. C. G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III) / E. C. G. Stueckelberg // *Helv. Phys. Acta.* – 1938. – Vol. 11. – P. 299–312, 312–328.
2. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altibal. // *Int. J. Mod. Phys. A.* – 2004. – Vol. 119. – P. 3265–3348.
3. Red'kov, V. M. Fields in Riemannian space and the Lorentz group / V. M. Red'kov. – Minsk : Belarusian Science, 2009. – 496 p. (in Russian).
4. Plietiukhov, V. A. Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom / V. A. Pletukhov, V. M. Red'kov, V. I. Strazhev. – Minsk : Belarusian Science, 2015. – 328 p. (in Russian).
5. Ogievetsky, V. I. The notoph and its possible interactions / V. I. Ogievetsky, I. V. Polubarinov // *Yad. Fiz.* 4. – 1966. – P. 216–223 (in Russian)
6. Kalb, M. Classical direct interstring action / M. Kalb, P. Ramond // *Phys. Rev. D.* – 1974. – Vol. 9. – P. 2273–2284.
7. Berche, B. Classical Kalb – Ramond field theory in curved space-times / B. Berche, S. Fumeron, F. Moraes // *Phys. Rev. D.* – Vol. 105, nr 1. – Paper 105026.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 29.03.2024

УДК 546.62;542.93

**Виктор Иванович Гладковский¹, Татьяна Леонидовна Кушнер²,
Александр Иванович Пинчук³, Василий Григорьевич Шепелевич⁴,
Виктор Марьянович Шилько⁵**

^{1,3}канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. физики

Брестского государственного технического университета

²канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. физики

Брестского государственного технического университета

⁴д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. физики твердого тела и нанотехнологий

Белорусского государственного университета

⁵студент V курса физического факультета Белорусского государственного университета

**Victar Hladcouski¹, Tatsiana Kushner², Aliaksandr Pinchuk³,
Vasilii Shepelevich⁴, Victar Marjanovich Shilko⁵**

^{1,3}Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Physics
of Brest State Technical University

²Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Head of the Department of Physics
of Brest State Technical University

⁴Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor of the Department of Physics of Solid State and Nanotechnology
of Belarusian State University

⁵5-th Year Student of the Faculty of Physical of Belarusian State University
e-mail: ¹vig4540@ya.ru; ²phys@bstu.by; ³apinchook@tut.by; ^{4,5}shepelevich@bsu.by

НЕКОТОРЫЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЛАВА Al-7 МАСС. % ВІ

Исследована микроструктура и микротвердость сплава Al-7 масс. % Вi, закристаллизовавшегося при средней скорости охлаждения расплава ~10 К/с. Для изготовления сплава использовался алюминиевый лом, содержащий до 0,3 масс. % кремния и железа. Микроструктура исследована с помощью растрового электронного микроскопа, имеющего приставку для рентгеноспектрального микроанализа. Выделения висмута и железа преимущественно локализованы на границах зерен алюминия, средний размер которых равен 40 мкм. Частицы висмута имеют шарообразную форму. Среднее значение диаметров их сечений равно 1,5 мкм. Удельная поверхность межфазной границы алюминий – висмут равна $S = 0,062 \text{ мкм}^{-1}$. Выделения кремния распределены по всему объему сплава более однородно по сравнению с выделениями железа и висмута. Формирование неоднородной микроструктуры сплава при кристаллизации обусловлено расслоением жидкой фазы, незначительной взаимной растворимостью компонентов и последующим протеканием монотектического и эвтектического превращений. Микротвердость сплава равна (323 ± 15) МПа и монотонно уменьшается при изотермическом отжиге при 150 °С.

Ключевые слова: алюминий, висмут, железо, кремний, зерно, микроструктура, микротвердость.

Some Physical and Mechanical Properties of the Alloy Al-7 wt. % Bi

The microstructure and microhardness of an Al-7 wt. % Bi alloy crystalized at melt cooling rate of $\approx 10 \text{ K/s}$ were studied. Aluminum scrap containing $\approx 0,3 \text{ wt. \%}$ silicon and iron was used to produce the alloy. The microstructure was investigated using a scanning electron microscope with an attachment x-ray microanalysis. Bismuth and iron precipitates are predominately localized at the boundaries of aluminum grains, average size of which is $40 \text{ }\mu\text{m}$. Bismuth particles are spherical. The average value of the diameter of the cross-sections is $1,5 \text{ }\mu\text{m}$. The specific surface of the aluminum – bismuth boundaries is $0,062 \text{ }\mu\text{m}^{-1}$. The silicon precipitates are distributed throughout the entire volume of the alloy than iron and bismuth precipitates. The forming of heterogeneous alloy microstructure during crystallization is due to the insignificant solubility of components and the course monotectic and eutectic transformations. Microhardness of the alloy is equal $(323 \pm 15) \text{ MPa}$ and monotonic decrease during isotherm annealing under 150 °С.

Key words: aluminum, bismuth, iron, silicon, grain, microstructure, microhardness.

Введение

Сплавы Al-In, Al-Pb и Al-Bi изучены недостаточно, что вызвано их ограниченным применением в промышленности. Но в последние два десятилетия проявился к ним интерес [1; 2]. Экспериментально установлено, что сплавы системы алюминий – висмут при определенных условиях взаимодействуют с водой, вызывая выделение водорода, что имеет важное практическое значение для развития водородной энергетики [3], а также его использование в различных областях деятельности человечества, например в медицине. При этом установлено, что такое взаимодействие зависит от химического состава, температуры, давления и микроструктуры [4–8].

Для уменьшения стоимости получения водорода предполагается использовать алюминиевый лом (например, алюминиевые трубки из холодильных установок) вместо алюминия, получаемого дорогостоящим электролизом.

Концентрация кремния и железа в алюминиевой трубке составляет $\approx 0,3$ масс. %. В связи с этим проведено исследование микроструктуры и микро-твердости сплава Al-7 масс. % Bi, изготовленного на основе алюминия, содержащего $\approx 0,3$ масс. % кремния и железа и 7 масс. % висмута чистотой 99,999.

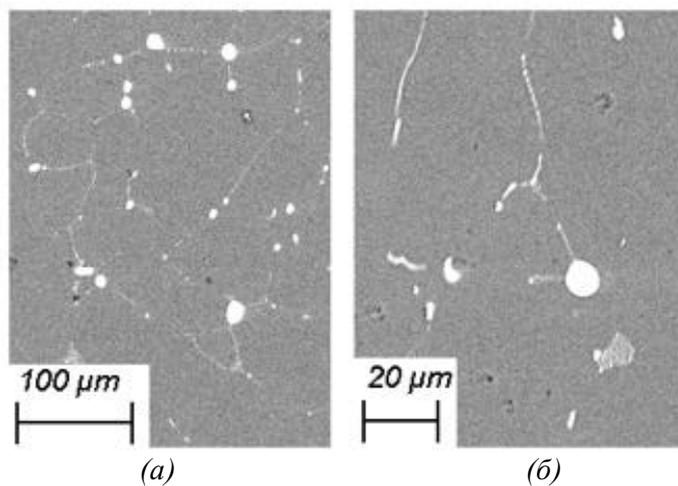
Методика эксперимента

Сплав Al-7 масс. % Bi получен сплавлением алюминиевого лома и висмута при температуре 750 °С. Расплав заливался при комнатной температуре в графитовую изложницу, где и затвердевал в виде слитка с поперечным сечением 6×6 мм². Средняя скорость охлаждения расплава ~ 10 К/с. Исследование микроструктуры сплава выполнено с помощью растрового электронного микроскопа LEO 1455 VP. Микроскоп имеет приставку для проведения рентгеноспектрального микроанализа. Определение параметров микроструктуры осуществлялось с помощью стереографического анализа методом случайных секущих [9]. Относительная погрешность измерения параметров микроструктуры составила 8–15 %. Измерения микротвердости выполнены на приборе ПМТ-3 с использованием нагрузки 20 г. Относительная погрешность ее измерения составила 4 %. Время действия нагрузки при измерении равно 80 с. Изотермический отжиг сплава проводился при температуре 150 °С.

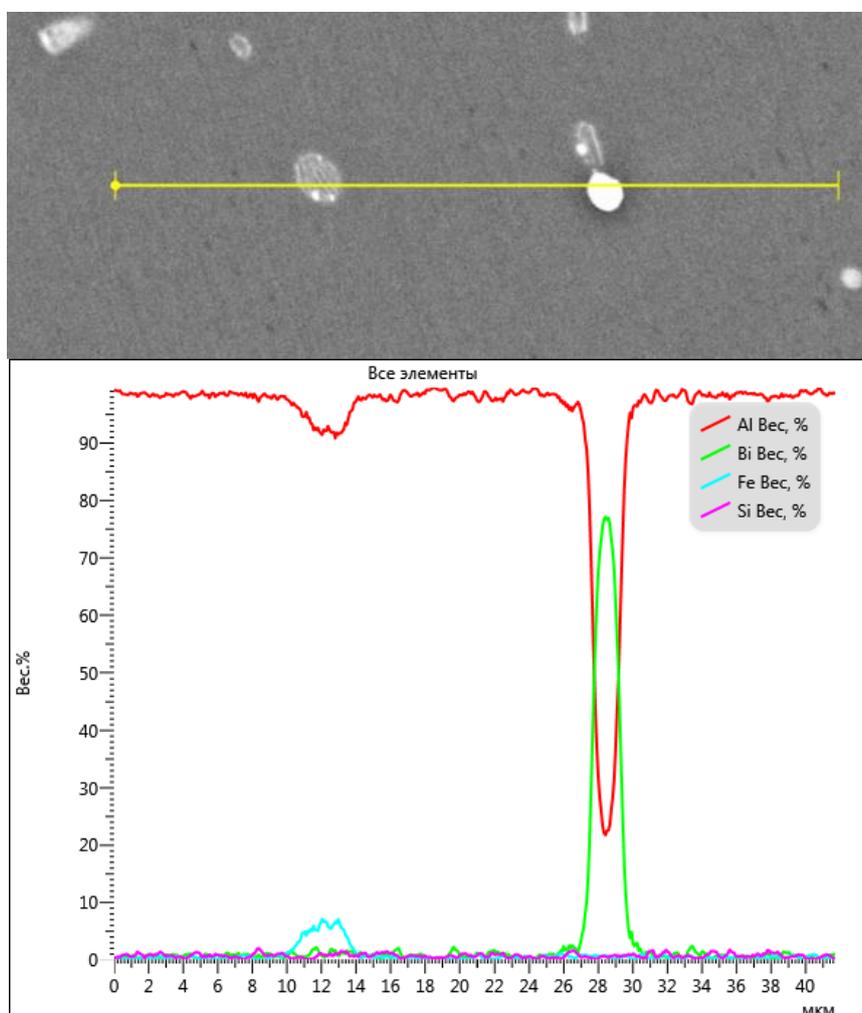
Результаты и их обсуждение

Изображения поверхности шпифа исследуемого сплава при различных увеличениях представлены на рисунке 1 (а, б). Границы зерен алюминия декорируются светлыми выделениями других фаз. Средняя хорда сечений алюминиевых зерен равна $d = 25$ мкм, средний размер зерен алюминия $D = 40$ мкм. Удельная поверхность границ зерен равна $S_g = 0,12$ мкм⁻¹. Частицы висмута имеют шарообразную форму. Среднее значение диаметров их сечений равно 1,5 мкм. Удельная поверхность межфазной границы алюминий – висмут составляет $S_p = 0,062$ мкм⁻¹.

При больших увеличениях (рисунок 1 (б)) наблюдаются белые и серые выделения. Распределение компонентов вдоль линии сканирования электронного луча по поверхности исследуемого сплава представлено на рисунке 2. Белые выделения соответствуют висмуту, а серые выделения с полосатой структурой содержат железо. В серых областях, как следует из распределения (рисунок 2), средняя концентрация железа достигает 10 масс. %. Распределения кремния характеризуются незначительными пиками, находящимися на расстоянии ~ 1 мкм друг от друга, что свидетельствует о более однородном распределении выделений кремния, чем распределение выделений висмута и железа в исследуемом сплаве.



Рисунік 1 – Выдєленія фаз вісмута і жалєза на граніцах зерен алюмінія (а) і (б) пры разлічных увелічєніях



Рисунік 2 – Распределение компонентов вдоль линии сканирования электронного луча

Распределение хорд случайных секущих на выделениях висмута по размерным группам приведено на рисунке 3. Наибольшая доля (0,27) сечений приходится на минимальный размер. С увеличением длины хорд их доля уменьшается.

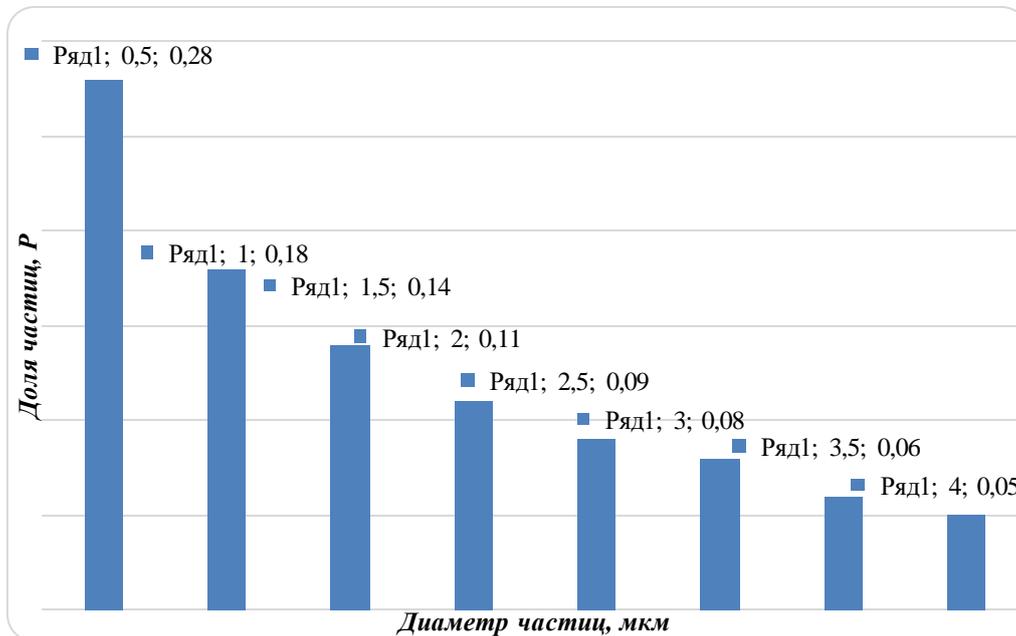


Рисунок 3 – Распределение хорд сечений частиц висмута по размерным группам

Определены концентрации компонентов в различных участках шлифа сплава (рисунок 4). Их значения представлены в таблице 1. В темных участках (спектры 3 и 4) концентрация алюминия достигает 99,5 масс. %, а концентрации кремния равны 0,5 масс. % и железа менее 0,03 масс. %, соответственно. В белом участке (спектр 5) концентрация висмута составляет 98,0 масс. %, концентрация алюминия – 1,7 масс. %, концентрация кремния и железа достигает 0,5 и 0,03 масс. % соответственно.

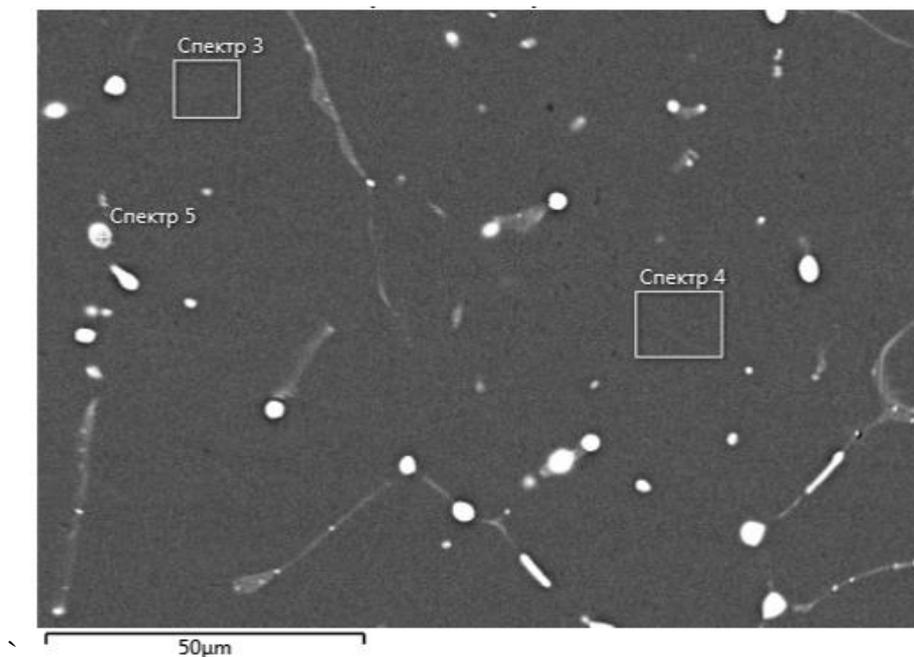


Рисунок 4. – Изображение поверхности шлифа сплава Al-7 масс. % Bi

Таблица – Концентрация компонентов в различных участках шпифа, масс. %

Участок	Концентрация компонентов			
	Al	Bi	Si	Fe
Спектр 3	99,40	0,09	0,51	0,00
Спектр 4	99,46	0,02	0,49	0,03
Спектр 5	1,69	97,96	0,15	0,19

Образование неоднородной структуры в массивном сплаве Al(Fe, Si)-7 масс. % Bi обусловлено особенностями диаграммы состояния системы Al – Bi [10]. В сплавах системы имеет место расслоение жидкой фазы на две жидкости L_1 и L_2 , отличающиеся составом при нагреве выше $657\text{ }^\circ\text{C}$. Взаимная растворимость компонентов в твердом состоянии менее 1 масс. %. При охлаждении расплава сначала происходит монотектическое превращение жидкости L_1 . При этом выделяется алюминий, а атомы висмута и железа оттесняются к границам алюминиевых зерен. Жидкость L_2 , богатая висмутом, при дальнейшем охлаждении испытывает эвтектическое превращение, при котором выделяются висмут и алюминий. Выделения висмута являются более крупными, а выделяемый алюминий присоединяется к алюминию, который образовался при монотектическом превращении. Выделения висмута и железа преимущественно располагаются на границах зерен алюминия.

Микротвердость исследуемого сплава равна 323 МПа. При изохронном отжиге выше $100\text{ }^\circ\text{C}$ наблюдается уменьшение микротвердости. Изотермический отжиг сплава, проводимый при температуре $150\text{ }^\circ\text{C}$, также вызывает монотонное ее уменьшение.

Рисунок 5 иллюстрирует изменение микротвердости сплава Al-7 масс. % Bi при изотермическом отжиге.

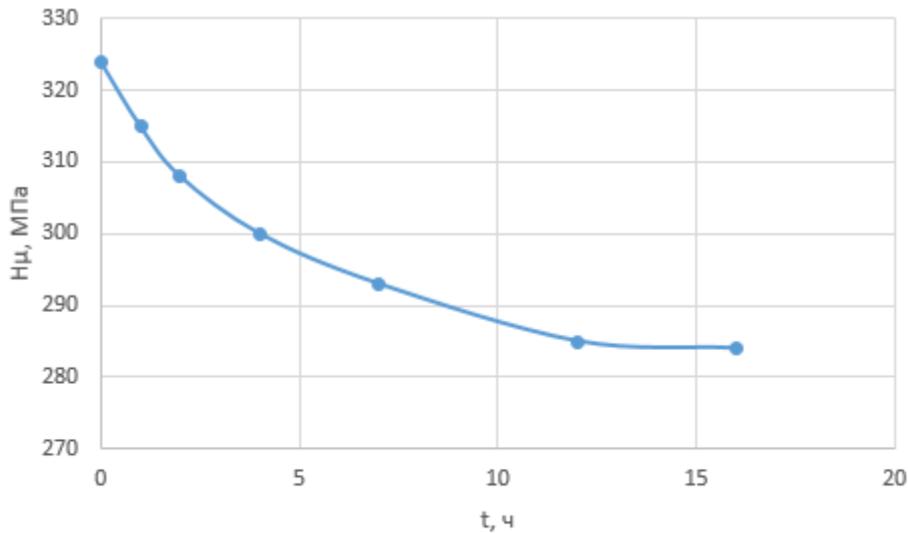


Рисунок 5 – Изменение микротвердости сплава Al-7 масс. % Bi при изотермическом отжиге

Отношение температур изотермического отжига и начала плавления исследуемого сплава по шкале Кельвина равно $\approx 0,45$, т. е. при $150\text{ }^\circ\text{C}$ активно происходят диффузионные процессы, вызывающие растворение мелких частиц второй фазы и рост более крупных частиц [11]. Эти процессы приводят к уменьшению дисперсионного механизма вклада в упрочнение сплава, обуславливая тем самым уменьшение микротвердости при отжиге [12].

Заключение

Кристаллизация сплава Al-7 масс. % Bi, изготовленного на основе алюминиевого лома, в котором концентрация железа и кремния составляет $\approx 0,3$ масс. %, при средней скорости охлаждения ~ 10 К/с, приводит к формированию микрокристаллической структуры. Средняя хорда сечений алюминиевых зерен равна $d_{Al} = 25$ мкм. Удельная поверхность границ зерен алюминия равна $S_{Al} = 0,12$ мкм⁻¹. На границах зерен локализованы преимущественно дисперсные выделения висмута и железа. Распределение кремния в сплаве более однородно по сравнению с распределением выделений железа и висмута. Среднее значение диаметров частиц висмута равно $d_{Bi} = 1,5$ мкм. Удельная поверхность межфазной границы алюминий – висмут равна $S_{Al-Bi} = 0,062$ мкм⁻¹. Изотермический отжиг при 150 °С вызывает уменьшение микротвердости.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Авраамов, Ю. С. Сплавы на основе систем с ограниченной растворимостью в жидком состоянии: теория, технология, структура, свойства / Ю. С. Авраамов, А. Д. Шляпин. – М. : Интерконтакт науки, 2002. – 371 с.
2. Surface, Interface and Phase Transitions in Al-In Monotectic Alloys / I. Kaban [et al.] // Acta Mater. – 2010. – Vol. 58. – P. 3406–3414.
3. Козин, Л. Ф. Водородная энергетика и экология / Л. Ф. Козин, С. В. Волков. – Киев : Наук. думка, 2020. – 396 с.
4. Кинетика и механизм коррозионного растрескивания алюминия / Л. Ф. Козин [и др.] // Укр. хим. журн. – 2009. – Т. 75, № 11. – С. 3–11.
5. Кинетика и механизм взаимодействия с водой алюминия и магния тройной системы Al – Mg – Bi / Л. Ф. Козин [и др.] // Физикохимия поверхности и защита материалов. – 2011. – Т. 47. – С. 144–153.
6. Шепелевич, В. Г. Структура быстрозатвердевших сплавов Al-(0,25–2,0) масс. % Bi / В. Г. Шепелевич // Физика и химия обработки материалов. – 2022. – № 4. – С. 32–36.
7. Ziebarth, J. T. Liquid Phase-enabled Reaction of Al-Ga and Al-In-Sn Alloys with Water / J. T. Ziebarth, M. J. Woodall, R. A. Kramer // International Journal of Hydrogen Energy. – 2011. – Vol. 36. – P. 5271–5279.
8. Шепелевич, В. Г. Структура быстрозатвердевших фольг сплавов Al-Bi / В. Г. Шепелевич // Журн. Белорус. гос. ун-та. Физика. – 2022. – № 1. – С. 71–79.
9. Салтыков, С. А. Стереометрическая металлография / С. А. Салтыков. – М. : Металлургия, 1976. – 272 с.
10. Диаграммы состояния двойных металлических систем : справочник : в 3 т. / Н. П. Лякишев [и др.] ; под общ. ред. Н. П. Лякишева. – М. : Машиностроение, 1996. – Т. 1. – 992 с.
11. Новиков, И. И. Теория термической обработки металлов / И. И. Новиков. – М. : Металлургия, 1978. – 390 с.
12. Шепелевич, В. Г. Структурно-фазовые превращения в металлах / В. Г. Шепелевич. – Минск : Белорус. гос. ун-т, 2021. – 201 с.

REFERENCES

1. Avraamov, Yu. S. Splavy na osnovie sistiem s ogranichennoj rastvorimost'ju v zhidkom sostojanii: tieorija, tiekhnologija, struktura, svojstva / Yu. S. Avraamov, A. D. Shliapin. – M. : Interkontakt nauki, 2002. – 371 s.

2. Surface, Interface and Phase Transitions in Al-In Monotectic Alloys / I. Kaban [et al.] // Acta Mater. – 2010. – Vol. 58. – P. 3406–3414.
3. Kozin, L. F. Vodorodnaja energietika i ekologija / L. F. Kozin, S. V. Volkov. – Kijev : Nauk. dumka, 2020. – 396 s.
4. Kinetika i miekhanizm korrozionnogo rastrieskivaniya aliuminija. / L. F. Kozin [i dr.] // Ukr. khim. zhurn. – 2009. – T. 75, № 11. – S. 3–11.
5. Kinetika i miekhanizm vzaimodiejstvija s vodoj aliuminija i magnija trojnoj sistemy Al–Mg–Bi / L. F. Kozin [i dr.] // Fizikokhimija povierkhnosti i zashchita materialov. – 2011. – T. 47. – S. 144–153.
6. Shepielievich, V. G. Struktura bystrozatvierdievshikh splavov Al-(0,25–2,0) mass. % Bi / V. G. Shepielievich // Fizika i khimija obrabotki materialov. – 2022. – № 4. – S. 32–36.
7. Ziebarth, J. T. Liquid Phase-enabled Reaction of Al-Ga and Al-In-Sn Alloys with Water / J. T. Ziebarth, M. J. Woodall, R. A. Kramer // International Journal of Hydrogen Energy. – 2011. – Vol. 36. – P. 5271–5279.
8. Shepielievich, V. G. Struktura bystrozatvierdievshikh fol'g splavov Al–Bi / V. G. Shepielievich // Zhurn. Bielorus. gos. un-ta. Fizika. – 2022. – № 1. – S. 71–79.
9. Saltykov, S. A. Stierieometričieskaja mietallografija / S. A. Saltykov. – M. : Miettallurgija, 1976. – 272 s.
10. Diagrammy sostojanija dvojnykh mietallichieskikh sistem : spravocnik : v 3 t. / N. P. Liakishev [i dr.] ; pod obsch. ried. N. P. Liakisheva. – M. : Mashinostrojenije, 1996. – T. 1. – 992 s.
11. Novikov, I. I. Tieorija tiermichieskoj obrabotki mietallov / I. I. Novikov. – M. : Miettallurgija, 1978. – 390 s.
12. Shepielievich, V. G. Strukturno-fazovyje prievrashchienija v mietallakh / V. G. Shepielievich. – Minsk : Bielorus. gos. un-t, 2021. – 201 s.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 12.03.2024

УДК 538.9:538.913

Игорь Иванович Макоед¹, Анастасия Сергеевна Демеш²¹канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина²студент II курса физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина**Igor Makoed², Anastasia Demesh²**¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of Brest State A. S. Pushkin University²2-nd Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin Universitye-mail: 1igmak2010@yandex.ru**РАМАНОВСКАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ МУЛЬТИФЕРРОИКОВ,
СИНТЕЗИРОВАННЫХ НА ОСНОВЕ ФЕРРИТА ВИСМУТА**

Влияние легирования редкоземельными ионами на структуру и физические свойства мультиферроиков на основе BiFeO_3 с частичным изовалентным замещением висмута экспериментально исследовано методами рентгеновской дифракции и рамановской спектроскопии.

Ключевые слова: феррит висмута, допирование, рамановские спектры.

Raman Spectroscopy of Multiferroics, Synthesis Based on Bismuth Ferrite

The effect of rare earth ion doping on structure and physical properties of the BiFeO_3 -based multiferroics with a partial isovalent substitution of bismuth have been experimentally investigated by X-ray diffraction and raman spectroscopy methods.

Key words: bismuth ferrite, co-doping, optical properties.

Введение

Большой интерес в области функциональной электроники представляют составы, синтезированные на основе мультиферроика BiFeO_3 [1; 2]. При температурах, меньших точки Нееля, феррит висмута обладает сложной пространственно модулированной магнитной структурой циклоидного типа. В ней спиновая система сохраняет в ближайшем окружении антиферромагнитный порядок G-типа, но изменяется вдоль направления распространения циклоиды с периодом, несоразмерным периоду кристаллической решетки [3].

Одним из способов подавления спиновой циклоиды является замещение катионов висмута изовалентными катионами группы лантаноидов – редкоземельных элементов (РЗЭ). Составы системы $\text{Bi}_{1-x}\text{R}_x\text{FeO}_3$ ($\text{R} = \text{La} - \text{Lu}$) являются наиболее известными мультиферроидными соединениями, интенсивно изучаемыми в последние годы.

Высокая изоморфная емкость образцов катион-замещенного BiFeO_3 позволяет регулировать их состав и физические свойства в широких диапазонах типов и концентраций замещающих катионов. Меньшие ионные радиусы R^{3+} по отношению к ионному радиусу Bi^{3+} способствуют увеличению искажения кристаллической решетки, что приводит к изменению структурно чувствительных физических свойств образцов.

При малых ($x < 0,10$) концентрациях РЗЭ катионов образцы $\text{Bi}_{1-x}\text{R}_x\text{FeO}_3$ кристаллизуются в ромбоэдрической решетке $\text{R}\bar{3}c$, изоструктурной решетке BiFeO_3 . Известно большое количество работ, в которых описаны результаты исследования динамики кристаллической решетки BiFeO_3 и образцов феррита висмута с частичным замещением катионов Bi^{3+} изовалентными катионами катионами La [4], Nd [5], Sm [6], Eu [7], Gd [8], Tb [9], Dy [10], Ho [11], Yb [12].

Относительно небольшое количество известных работ содержит описание результатов изучения спектров комбинационного рассеяния света образцов $\text{Vi}_{1-x}\text{R}_x\text{FeO}_3$, синтезированных в одинаковых условиях. Причинами наблюдения большого разнообразия неоднозначных результатов интерпретации рамановских спектров подобных образцов являются как использование различных методов получения, так и вариативность условий их синтеза в рамках одинаковых методов.

Анализ данных показывает, что образцы одного состава, но синтезированные в разных условиях, обладают разными структурными и физическими свойствами. Это связано с высокой чувствительностью структурных факторов к малым изменениям состава. Представляет интерес исследование и прогнозирование физических свойств изоструктурных образцов $\text{Vi}_{1-x}\text{R}_x\text{FeO}_3$, полученных при одинаковых условиях синтеза. Вызванные замещением структурные превращения влекут за собой изменения динамики кристаллической решетки соединений.

Целью работы является изучение динамики кристаллических решеток соединений $\text{Vi}_{1-x}\text{R}_x\text{FeO}_3$ ($x = 0, 0.05, 0.10$; $R = \text{La} - \text{Lu}$) методом рамановской спектроскопии.

Методы исследований

Поликристаллические изоструктурные составы ViFeO_3 и $\text{Vi}_{0,90}\text{R}_{0,10}\text{FeO}_3$ ($R = \text{La}, \text{Nd}, \text{Gd}, \text{Dy}, \text{Er}$) были синтезированы методом твердофазных реакций в условиях холодного прессования под высоким давлением (4 ГПа) [14–20]. Исходные оксиды R_2O_3 ($R = \text{La}$ (чистота 99,5 %); $R = \text{Nd}, \text{Gd}, \text{Dy}$ и Er (99,9 %), Vi_2O_3 и Fe_2O_3 (99,5 %) (Sigma Aldrich Chemicals) смешивали в агатовой ступке в течение 5 ч, а затем с этанолом в течение 2 ч. Полученную смесь предварительно обжигали при температуре 750 ± 50 °С в керамическом сосуде на воздухе в течение 5 ч. Скорость нагрева составляла 10 К/мин.

После измельчения и повторного обжига в тех же условиях с целью осуществления контроля фазового состава проводили рентгеноструктурные исследования полученной смеси, после чего образцы были окончательно синтезированы методом холодного прессования под высоким ($P = 4,00 \pm 0,04$ ГПа) давлением в течение короткого (1 мин.) времени [13]. Создание рабочего давления от атмосферного до 4 ГПа происходило в течение 3 с. С целью стабилизации состава и устранения возможных микроструктурных неоднородностей образцы были подвергнуты изотермическому ($t = 730$ °С) отжигу на воздухе в течение 18 ч.

Химическую чистоту, однородность и стехиометрическое соотношение образцов подтверждают результаты микроскопии, выполненные на электронном микроскопе Hitachi S-3000N. Тип и параметры кристаллической структуры восстановлены на основании анализа дифрактограмм, записанных на дифрактометре ДРОН-3М с использованием $\text{CuK}\alpha$ -излучения при комнатной температуре. Дифракционное отражение записывали с шагом сканирования 0,02 градуса.

Время позиционирования в точке составляло 2 с. Для обработки данных использована программа Jana2006 [14]. Параметры решетки и рентгеновскую плотность определяли с точностью $\pm 0,0001$ Å и $\pm 0,01$ г/см³ соответственно.

Спектры комбинационного рассеяния света записаны на спектрально-аналитическом комплексе на основе сканирующего конфокального микроскопа Nanofinder (СП «ЛОТИС ТИИ», Республика Беларусь) с использованием дифракционной решетки 600 линий/мм.

Возбуждение спектров производили лазером с длиной волны 532 нм и мощностью 800 мВт, сигнал сфокусирован оптическим объективом с увеличением $100\times$ в течение 30 с.

Результаты экспериментов и их обсуждение

Частичная замена катионов висмута катионами редкоземельных элементов приводит к стабилизации кристаллической структуры. По данным рентгеноструктурного анализа образцы $\text{Bi}_{0,90}\text{R}_{0,10}\text{FeO}_3$ ($\text{R} = \text{La}, \text{Nd}, \text{Gd}, \text{Dy}, \text{Er}$) кристаллизуются в ромбоэдрической структуре $\text{R}\bar{3}\text{c}$ (пространственная группа № 161). Отсутствие следов исходных оксидов свидетельствует об их полной трансформации.

Результаты полнопрофильного анализа рентгенограмм, представленные в таблице 1, подробно описаны в работе [13]. Параметры решеток хорошо согласуются с литературными данными [4; 5; 8; 10].

Тенденция изменения параметров кристаллических решеток в зависимости от состава – монотонное уменьшение с уменьшением величины радиуса замещающего R-катиона. Небольшое различие величин параметров решеток, полученных разными авторами, объясняется использованием разных методов и условий синтеза образцов.

Таблица 1 – Параметры кристаллических решеток образцов $\text{Bi}_{0,90}\text{R}_{0,10}\text{FeO}_3$ ($\text{R} = \text{La}, \text{Nd}, \text{Gd}, \text{Dy}, \text{Er}$), восстановленные по методу Ритвельда [13]

Состав	Параметры структуры и критерии фитинга					
	a (Å)	c (Å)	V (Å ³)	χ^2	R _p (%)	R _{wp} (%)
$\text{Bi}_{0,90}\text{La}_{0,10}\text{FeO}_3$	5,6080	13,7154	373,6	1,35	8,21	12,11
$\text{Bi}_{0,90}\text{Nd}_{0,10}\text{FeO}_3$	5,5698	13,7933	370,6	1,35	17,29	24,96
$\text{Bi}_{0,90}\text{Gd}_{0,10}\text{FeO}_3$	5,5642	13,8053	370,2	1,14	13,09	19,64
$\text{Bi}_{0,90}\text{Dy}_{0,10}\text{FeO}_3$	5,5567	13,8239	369,7	1,02	9,66	13,29
$\text{Bi}_{0,90}\text{Er}_{0,10}\text{FeO}_3$	5,5423	13,8469	368,4	1,74	16,00	20,79

Частота комбинационного рассеяния света определяется массой соответствующих ионов и прочностью химической связи между ними и является важной характеристикой динамики и распределения ионов кристаллических решеток. Спектры комбинационного рассеяния чувствительны к смещениям атомов и позволяют исследовать структурные изменения в зависимости от температуры, типа и количества замещающих катионов. В десятиатомной элементарной ячейке ромбоэдрической $\text{R}\bar{3}\text{c}$ (C_{3v}) структуры возможны 18 центрозонных оптических фононных мод [15]:

$$\Gamma_{\text{opt, R}\bar{3}\text{c}} = 4\text{A}_1 + 5\text{A}_2 + 9\text{E}, \quad (1)$$

из которых 13 с A_1 и E симметрией являются Raman- и ИК-активными:

$$\Gamma_{\text{Raman/IR, R}\bar{3}\text{c}} = 4\text{A}_1 + 9\text{E}. \quad (2)$$

Режимы рассеяния A_2 раман-неактивны. На рисунке 2 (а–г) изображены спектры рамановского рассеяния образцов $\text{Bi}_{0,90}\text{R}_{0,10}\text{FeO}_3$ ($\text{R} = \text{Nd}, \text{Gd}, \text{Dy}$) и феррита висмута, измеренные при комнатной температуре. Надежно регистрируемые при температуре 20К четыре пика при 149.58, 178.26, 225.50 и 439.78 cm^{-1} , которые коррелируют с модами 138.71, 167.54, 218.48 и 427,26 cm^{-1} (температура 300 К), в спектре BiFeO_3 , относятся к продольным (A_1 (LO)) оптическим модам.

Максимумы при 224.85, 265.35, 349.71, 375.02, 467.81, 521.80, 552.17, 616.29 (20 К) и слабо выраженные моды 203.04, 258.36, 296.08, 339.68, 360.93, 467.39, 520.88, 671.18 cm^{-1} (300 К) соответствуют поперечным (E (TO)) модам.

Восстановленные при комнатной температуре значения, относящиеся к A_1 -модам, хорошо соответствуют известным данным независимых исследований, несмотря на разброс значений данных величин, полученных разными авторами (таблица 2). Существенно сложнее соотносить наблюдаемые в спектрах особенности с раман-активными E -модами, что объясняется объективными причинами, связанными как с возможным

наличием в исследуемых материалах двухфазных состояний, так и с тепловыми эффектами, приводящими к появлению областей с пониженной симметрией кристаллической решетки [16] (таблица 3).

Таблица 2 – Значения (см^{-1}) рамановских A_1-i ($i = 1-4$) мод в BiFeO_3

Источник	Рамановские моды, см^{-1}			
	A_1-1	A_1-2	A_1-3	A_1-4
Данная работа	138,71	167,54	218,48	427,26
[4]	140,00	172,00	220,00	425,00
[5]	126,10	165,50	213,00	425,00
[6]	140,30	173,10	226,20	436,0
[7]	139,00	172,00	231,00	480,00
[8]	135,00	167,00	218,00	430,00
[9]	142,00	174,00	225,00	435,00
[10]	140,00	172,00	219,00	470,00
[11]	140,10	172,40	228,20	412,80
[12]	138,00	175,00	220,00	432,00

Таблица 3 – Значения (см^{-1}) рамановских E_i ($i = 3-9$) мод в BiFeO_3

Источник	Рамановские моды, см^{-1}							
	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
Данная работа	203,04	258,36	296,08	339,68	360,93	467,39	520,88	671,18
[4]	–	278,00	–	339,00	370,00	474,00	530,00	610,00
[5]	–	259,50	–	339,60	366,60	476,90	530,90	599,60
[6]	262,60	278,30	–	343,40	368,40	472,00	527,70	618,30
[7]	261,00	276,00	303,00	346,00	369,00	432,00	524,00	–
[8]	255,00	283,00	–	321,00	351,00	467,00	526,00	598,00
[9]	261,00	279,00	304,00	345,00	370,00	472,00	530,00	629,00
[10]	261,00	274,00	–	348,00	373,00	430,00	547,00	607,00
[11]	261,00	274,40	–	346,30	369,90	469,70	526,40	–
[12]	260,00	277,00	303,00	345,00	368,00	470,00	523,00	622,00

Величины смещений положений мод коррелируют с искажениями решетки, обусловленными размерным фактором. Максимальные сдвиги спектров относительно наименее искаженного состава, содержащего катион La^{3+} , радиус которого близок к радиусу катиона Bi^{3+} , наблюдаются в составе $\text{Bi}_{0,90}\text{Lu}_{0,10}\text{FeO}_3$. Сдвиг относительно феррита висмута моды A_1-2 в спектре состава $\text{Bi}_{0,90}\text{La}_{0,10}\text{FeO}_3$ не может быть вызван деформацией кристаллической решетки из-за эффекта химического сжатия.

В данном составе уменьшение объема элементарной ячейки вызывается разбавлением при катионном замещении стереохимически активной неподеленной пары электронов $\text{Bi } 6s^2$ [17].

При низких температурах на спектре фиксируется рамановская активная мода вблизи 75 см^{-1} , которая представлена двумя полосами $E(\text{TO}1)$ (75.73 см^{-1}) и $E(\text{LO}1)$ (80.65 см^{-1}). При температурах, больших 200 К , с ростом температуры данная мода практически не разрешается.

Аналогично по два пика LO и TO обнаружены для мод E8 и E9. В большинстве известных работ, в которых были исследованы образцы феррита висмута и катионзамещенных составов, синтезированных на его основе, присутствие в рамановском спектре моды при 75 см^{-1} не обнаружено. Авторы работы [18] связывают данную моду

со смещением атомов Bi, обусловленным активацией неподеленной пары $6s^2$ электронов Bi^{3+} вдоль оси с гексагональной элементарной ячейки.

Сдвиги частот происходят за счет изменений углов наклона октаэдров FeO_6 . Когда они уменьшаются при замене R^{3+} другим изовалентным редкоземельным ионом с меньшим ионным радиусом, угол связи «Fe – O – Fe» также уменьшается, что эквивалентно увеличению угла наклона октаэдра FeO_6 . Это приводит к смещению иона O^{2-} из положения равновесия в сторону от оси «Fe – Fe».

Величина сдвигов частот зависит от индивидуальных характеристик ионов. Аналогичная тенденция наблюдается и для режимов E_2-E_4 . Уменьшение среднего радиуса Bi-положения в $Bi_{0,90}R_{0,10}FeO_3$ приводит к изменению длин связей «Bi – O» и вызывает искажения в кристаллической решетке. При этом октаэдры FeO_6 искажаются в меньшей степени, благодаря высокой жесткости связи «Fe – O», но могут наклоняться при малом изменении длин связей «Fe – O» и уменьшении расстояний «Bi(R) – O». Наклон октаэдров приводит к уменьшению объема псевдокубической элементарной ячейки.

Максимальные изменения происходят в области низких значений частот сдвигов. Данные режимы в большей степени зависят от изменений, вызванных замещением катионов висмута. Максимум, наблюдаемый при 620 см^{-1} , может быть отнесен к «Fe – O»-симметричного валентного колебания связи «Fe – O». Его положение остается наиболее стабильным при всех типах и концентрациях замещающих катионов.

Моды при $340-540\text{ см}^{-1}$ соответствуют наклонам и вращениям кислородных октаэдров «Fe – O», вызванным катионными замещениями. Полосы в области $120 - 260\text{ см}^{-1}$ обусловлены валентными колебаниями величины связи «(Bi, R) – O». Полученные результаты хорошо согласуются с данными независимых исследований, представленными в работах [4–12].

Одним из методов, применяющихся при обработке и интерпретации результатов рамановской спектроскопии, является деконволюция экспериментальных зависимостей с использованием известных математических моделей.

Рамановские спектры и результаты их разложения на лорентцевские компоненты в программе Origin, представлены на рисунке 1 (а – г).

Для удобства анализа и сравнения данных, полученных на различных составах, спектры были нормированы на раман-активную моду с максимальной интенсивностью. В соответствии с результатами теоретико-группового анализа [16] раман-активные моды спектров комбинационного рассеяния были смоделированы с использованием функции Лорентца и разложены на отдельные вклады. По результатам разложения построены зависимости параметров уравнения Лорентца:

$$y = y_0 + \frac{2 \cdot \frac{A}{\pi}}{\frac{w}{4 \cdot (x - x_c)^2} + w^2}, \quad (3)$$

где A – площадь, w – ширина и x_c – положение максимума характеристической моды от величины радиуса R-катиона, как это показано на рисунках 2 (а – г).

При этом получена высокая степень соответствия экспериментального и модельного спектров.

На основании результатов аппроксимации данных, представленных на рисунках 2–4, линейными зависимостями $y = A + Bx$ ($x = r$ – радиус R-иона) восстановлены параметры, которые использованы при восстановлении модельных рамановских спектров образцов $Bi_{0,90}R_{0,10}FeO_3$ ($R = La - Lu$) с использованием уравнения (3).

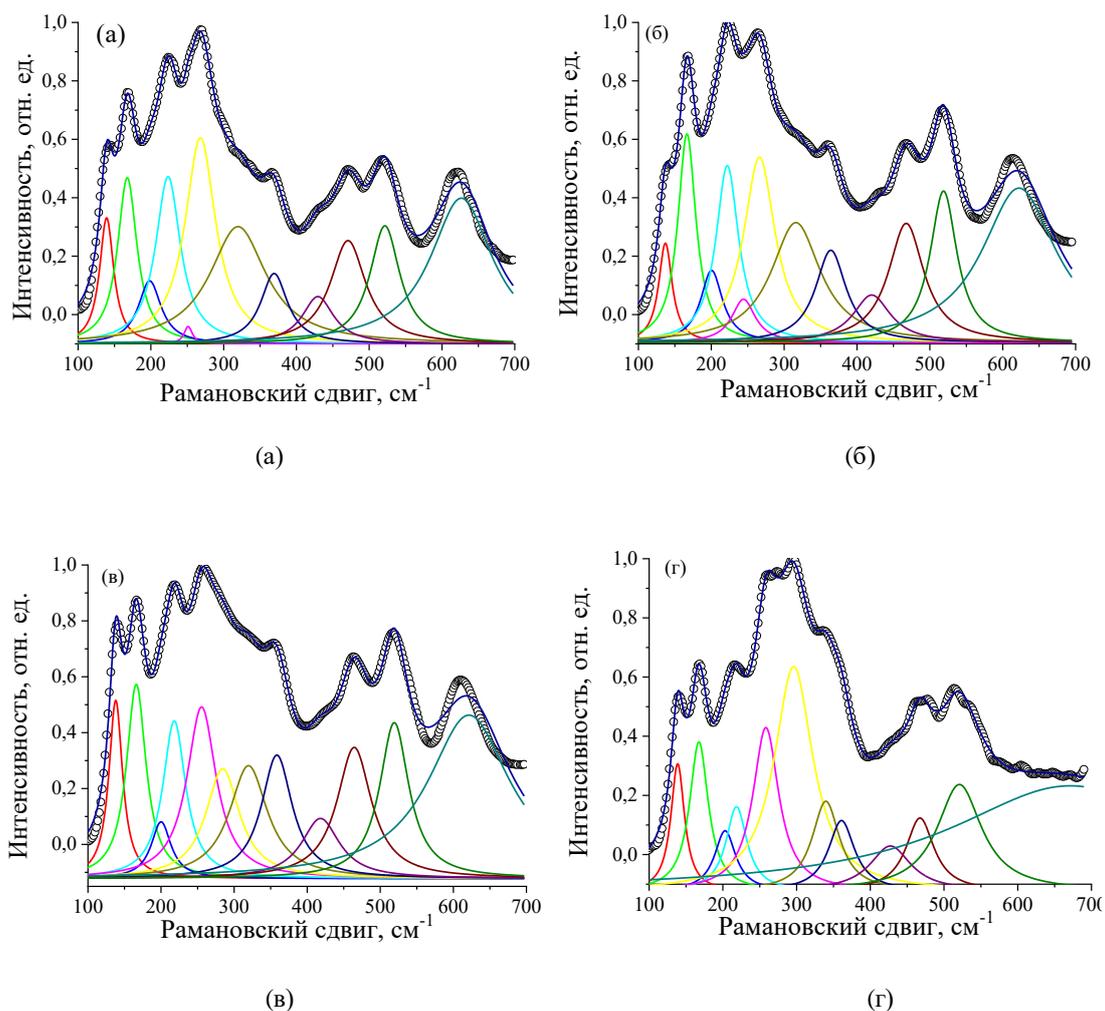


Рисунок 1 – Результаты разложения рамановских спектров составов $\text{Bi}_{0.90}\text{Nd}_{0.10}\text{FeO}_3$ (а), $\text{Bi}_{0.90}\text{Gd}_{0.10}\text{FeO}_3$ (б), $\text{Bi}_{0.90}\text{Dy}_{0.10}\text{FeO}_3$ (в) и BiFeO_3 (г)

По результатам разложения построены рамановские спектры образцов $\text{Bi}_{0.90}\text{R}_{0.10}\text{FeO}_3$ ($\text{R} = \text{La} - \text{Lu}$), представленные на рисунке 5 (а).

На рисунке 5 (б) изображен экспериментальный спектр комбинационного рассеяния света BiFeO_3 , записанный при температуре 20 К, на котором обнаружены 11 мод, предсказываемых теоретико-групповым анализом для $\text{R}\bar{3}\text{c}$ структуры.

Для получения хорошего соответствия экспериментальных и расчетных спектров при разложении была дополнительно включена мода при $203,04 \text{ см}^{-1}$, соответствующая интенсивной моде при $208,34 \text{ см}^{-1}$ [18] и 206 см^{-1} [19] примесной фазы $\text{Bi}_2\text{Fe}_4\text{O}_9$.

Соответствующие $\text{Bi}_2\text{Fe}_4\text{O}_9$ моды при 283.54 , 333.06 , 364.44 и 428.48 см^{-1} [19] частично перекрываются с модами 296.08 , 339.68 , 360.93 и 427.26 см^{-1} и не разрешаются в экспериментальных рамановских спектрах.

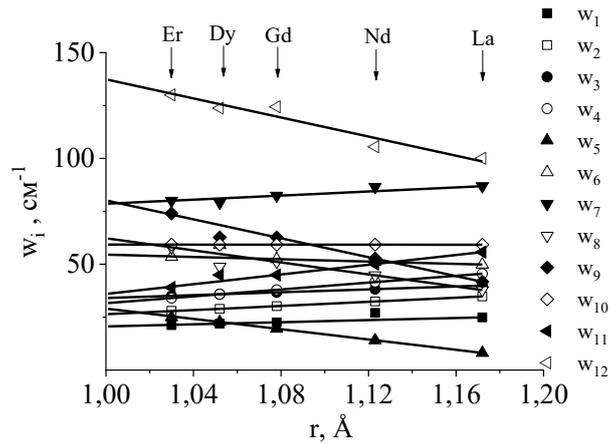


Рисунок 2 – Зависимости параметров w_i уравнения Лорентца от величины радиуса R-катиона

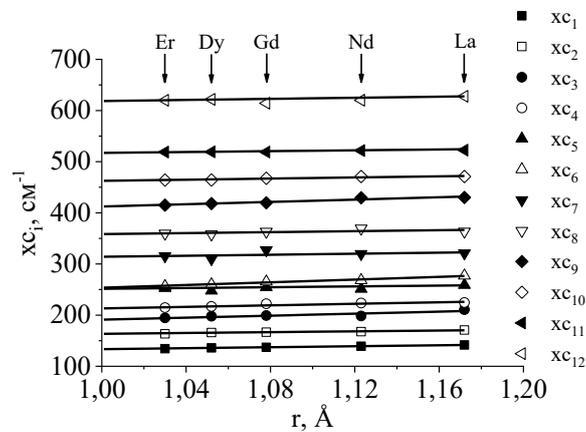


Рисунок 3 – Зависимости параметров xc_i уравнения Лорентца от величины радиуса R-катиона

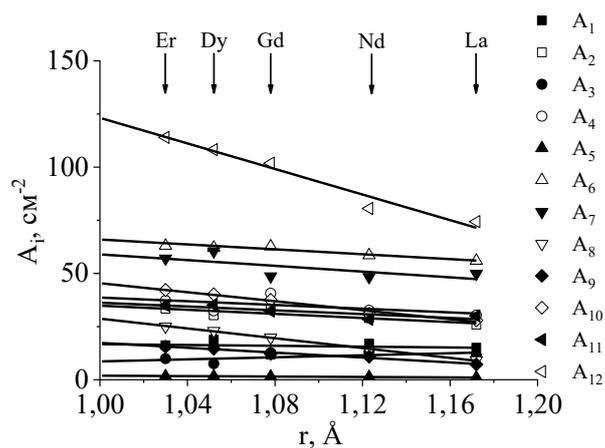
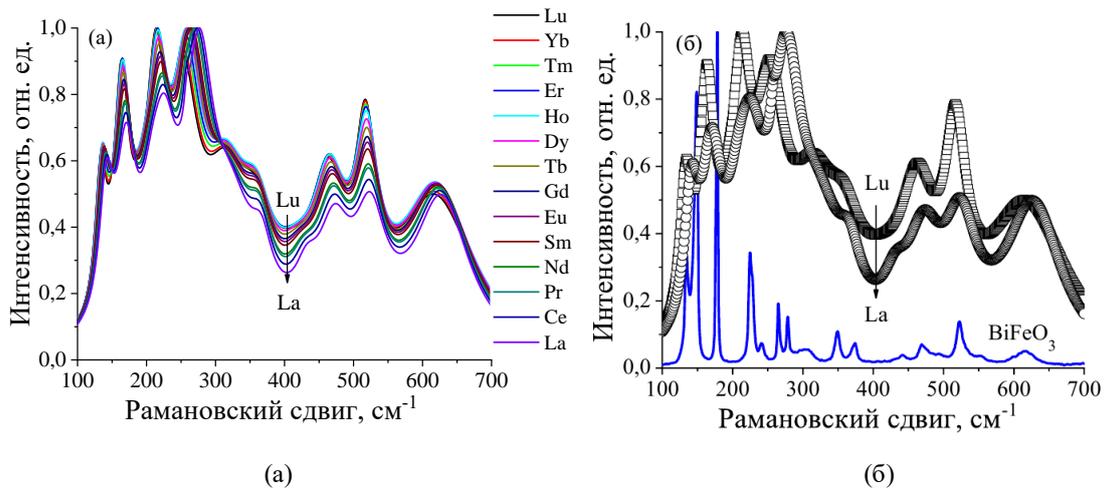


Рисунок 4 – Зависимости параметров A_i уравнения Лорентца от величины радиуса R-катиона

На основании рассчитанных параметров модели Лорентца выполнено моделирование рамановских спектров образцов $Bi_{0,90}R_{0,10}FeO_3$ ($R = Lu - La$). В качестве значения y_0 для всех образцов была использована постоянная, величина которой равна 0,306.



**Рисунік 5 – Рэзултытаі моделеіраванія рамановскіх спектраў
саставаў $\text{Bi}_{0,90}\text{R}_{0,10}\text{FeO}_3$ ($\text{R} = \text{Lu} - \text{La}$) (а).**

Корреляцыя эксперыментальнага спектра BiFeO_3 с моделеівымі спектрамі (б)

С іспользаваннем выражэння [9]

$$\nu = \left(\frac{1}{2\pi c} \right) \left(\frac{k}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

дзе c – скорасць святла ў вакууме, μ – эфектыўная маса, расчытаныя хваловыя лічбы, прадставленыя ў табліцах. Сілавыя пастаянныя

$$k = \frac{17}{r^3}, \quad (5)$$

дзе r – сярэднія значэння дыяметраў зв'язей «R-O» і «Fe-O». Расчытаныя хваловыя лічбы не больш чым на 6,85 % для састава $\text{Bi}_{0,90}\text{La}_{0,10}\text{FeO}_3$ (табліца 4) і не больш чым на 9,13 % $\text{Bi}_{0,90}\text{La}_{0,10}\text{FeO}_3$ (табліца 5), адрозніваюцца ад значэнняў, востанавленых пры апрацоўцы рамановскіх спектраў.

Для апрацовак $\text{Bi}_{0,90}\text{Lu}_{0,10}\text{FeO}_3$ даныя, атрыманыя адрозніваюцца на 6,77 % (табліца 4) і 7,70 % (табліца 5) адпаведна для хваловых лічбаў мад (χ_{c4}) і (χ_{c11}), прадставленых на рысунку 4.

Значэння дыяметраў зв'язей «R – O» (табліца 4) расчытаныя с іспользаваннем праграмы SPuDS [20]. Вялічыны дыяметраў зв'язей «Fe – O» (табліца 5) адрэделены із спектраў мнімай кампаненты дыэлектрычнасці праніцаемасці апрацовак, востанавленых метадамі дыэлектрычнасці спектроскопіі із спектраў каэфіцыента атражэння ў дыяпазоне 300–800 cm^{-1} .

Аналіз рэзултытаі разлажэння эксперыментальнага рамановскага спектра саставаў $\text{Bi}_{0,90}\text{R}_{0,10}\text{FeO}_3$ ($\text{R} = \text{La}, \text{Nd}, \text{Gd}, \text{Dy}, \text{Er}$) пазволіл прадказаць паведзенне рамановскіх мад саставаў $\text{Bi}_{0,90}\text{R}_{0,10}\text{FeO}_3$ ($\text{R} = \text{Lu} - \text{La}$) ў залежнасці ад велічыны радыуса замяшчаючага R-катыона ў прадпалажэнні лінейных залежнасцей параметраў разлажэння спектраў ў маделе Лорэнтца.

Моделеівыя спектры с высокай таахнасцю востраізвадуць усе асабеннасці рамановскіх спектраў ізоструктурнага апрацовак, а велічыны рамановскіх сдвігаў хораша сагласуюцца с рэзултытаі незалежных ісследаваньняў, несмотры на суттэсна адрозніваючыся метады і ўмовы сінтэза апрацовак.

Таблица 4 – Результаты расчетов величин рамановских сдвигов моды A_1-3 составов $Bi_{0,90}R_{0,10}FeO_3$ ($R = Lu - La$)

Состав	Волновое число, (см ⁻¹) (раман.)	Волновое число, (см ⁻¹) (расчет)	Эффективная масса, (10 ⁻²⁶ кг)	Силовая постоянная, (Н/см)	Длина связи, «R – O» (Å)
$Bi_{0,90}Lu_{0,10}FeO_3$	213,20	234,20	3,41261	1,58895	2,2035
$Bi_{0,90}Yb_{0,10}FeO_3$	213,72	234,57	3,40941	1,59068	2,2027
$Bi_{0,90}Tm_{0,10}FeO_3$	214,62	235,34	3,39981	1,57882	2,2082
$Bi_{0,90}Er_{0,10}FeO_3$	215,37	235,85	3,39595	1,58334	2,2061
$Bi_{0,90}Ho_{0,10}FeO_3$	216,20	236,39	3,39191	1,56879	2,2129
$Bi_{0,90}Dy_{0,10}FeO_3$	217,03	237,01	3,38599	1,57882	2,2082
$Bi_{0,90}Tb_{0,10}FeO_3$	217,85	237,52	3,38320	1,56518	2,2146
$Bi_{0,90}Gd_{0,10}FeO_3$	218,98	238,38	3,37441	1,54896	2,2223
$Bi_{0,90}Eu_{0,10}FeO_3$	219,65	238,81	3,37176	1,54458	2,2244
$Bi_{0,90}Sm_{0,10}FeO_3$	220,48	239,54	3,36286	1,53669	2,2282
$Bi_{0,90}Nd_{0,10}FeO_3$	222,35	240,51	3,36160	1,52537	2,2337
$Bi_{0,90}Pr_{0,10}FeO_3$	222,88	240,97	3,35607	1,50325	2,2446
$Bi_{0,90}Ce_{0,10}FeO_3$	224,38	241,76	3,35475	1,49305	2,2497
$Bi_{0,90}La_{0,10}FeO_3$	226,03	242,66	3,35275	1,47665	2,2580

Таблица 5 – Результаты расчетов величин рамановских сдвигов моды E_8 составов $Bi_{0,90}R_{0,10}FeO_3$ ($R = Lu - La$)

Состав	Волновое число, (см ⁻¹) (раман.)	Волновое число, (см ⁻¹) (расчет)	Эффективная масса, (10 ⁻²⁶ кг)	Длина связи «Fe – O», (Å) (ИК)	Силовая постоянная, (Н/см)
$Bi_{0,90}Lu_{0,10}FeO_3$	517,27	557,12	2,06455	1,95519	2,27449
$Bi_{0,90}Yb_{0,10}FeO_3$	517,56	557,86	2,06455	1,95346	2,28053
$Bi_{0,90}Tm_{0,10}FeO_3$	518,06	559,14	2,06455	1,95048	2,29101
$Bi_{0,90}Er_{0,10}FeO_3$	518,47	560,10	2,06455	1,94825	2,29889
$Bi_{0,90}Ho_{0,10}FeO_3$	518,93	561,06	2,06455	1,94602	2,30677
$Bi_{0,90}Dy_{0,10}FeO_3$	519,39	562,13	2,06455	1,94355	2,31558
$Bi_{0,90}Tb_{0,10}FeO_3$	519,85	563,19	2,06455	1,94111	2,32432
$Bi_{0,90}Gd_{0,10}FeO_3$	520,47	564,47	2,06455	1,93818	2,3349
$Bi_{0,90}Eu_{0,10}FeO_3$	520,85	565,32	2,06455	1,93623	2,34194
$Bi_{0,90}Sm_{0,10}FeO_3$	521,30	566,28	2,06455	1,93405	2,3499
$Bi_{0,90}Nd_{0,10}FeO_3$	522,34	568,41	2,06455	1,92921	2,36761
$Bi_{0,90}Pr_{0,10}FeO_3$	522,64	568,95	2,06455	1,92799	2,37211
$Bi_{0,90}Ce_{0,10}FeO_3$	523,47	570,65	2,06455	1,92416	2,3863
$Bi_{0,90}La_{0,10}FeO_3$	524,38	572,25	2,06455	1,92057	2,39971

Полученные данные могут быть использованы при интерпретации результатов рамановской спектроскопии, прогнозировании формы рамановских спектров и неразрушающем контроле особенностей динамики кристаллической решетки подобных материалов, содержащих в своем составе катионы редкоземельных элементов.

Данный подход может быть использован для предсказания положений и абсолютных величин геометрических параметров рамановских мод в содержащих в своем составе R-катионы перовскитах, а также был успешно реализован при обработке рамановских спектров ферритов-шпинелей, приведенных в работе [21].

Заклучение

Экспериментально исследованы спектры комбинационного рассеяния света составов катионзамещенного феррита висмута $\text{Bi}_{0.90}\text{R}_{0.10}\text{FeO}_3$ ($\text{R} = \text{La}, \text{Nd}, \text{Sm}, \text{Gd}, \text{Dy}, \text{Er}$). На основании анализа полученных данных выполнено моделирование и анализ рамановских спектров $\text{Bi}_{0.90}\text{R}_{0.10}\text{FeO}_3$ ($\text{R} = \text{La} - \text{Lu}$). В рамках модели лорентцевских не взаимодействующих осцилляторов изучено поведение параметров модели в зависимости от типа R-катиона.

Полученные результаты могут быть использованы как при прогнозировании физических свойств подобных соединений, так и при синтезе новых изоструктурных материалов с заданными физическими свойствами.

Практическая ценность работы определяется возможностью использования полученных результатов для решения задач обработки и интерпретации данных рамановской спектроскопии изоструктурных соединений, содержащих в своем составе катионы редкоземельных элементов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Eerenstein, W. Multiferroic and magnetoelectric material / W. Eerenstein, N. Mathur, J. F. Scott // *Nature*. – 2006. – Vol. 442 (17). – P. 759–765.
2. Gatalan, G. Physics and Applications of Bismuth Ferrite / G. Catalan, J. F. Scott // *Adv. Mater.* – 2009. – Vol. 21. – P. 2463–2485.
3. Arnold, D. C. Composition-driven structural phase transitions in rare-earth-doped BiFeO_3 ceramics: a review / D. C. Arnold // *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr. Freq. Contr.* – 2015. – Vol. 62. – P. 62–82.
4. Effects of La concentration on the structural and magnetic properties of BiFeO_3 nanoparticles / Z.-J. Liu [et al.] // *J. Opt. Adv. Mater.* – 2014. – Vol. 16, № 3-4. – P. 340–344.
5. Yuan, G. L. Raman scattering spectra and ferroelectric properties of $\text{Bi}_{1-x}\text{Nd}_x\text{FeO}_3$ ($x = 0-0.2$) multiferroic ceramics / G. L. Yuan, S. W. Or, H. L. Chan // *J. Appl. Phys.* – 2007. – Vol. 101. – P. 064101-1 – 064101-5.
6. Magnetic enhancement across a ferroelectric – paraelectric phase boundary in $\text{Bi}_{1-x}\text{Sm}_x\text{FeO}_3$ / Y.-J. Wu [et al.] // *Physica B*. – 2013. – Vol. 411. – P. 106–109.
7. Rao, T. D. Enhanced magnetization and improved insulating character in Eu substituted BiFeO_3 / T. D. Rao, R. Ranjith, S. Asthana // *J. Appl. Phys.* – 2014. – Vol. 115. – P. 124110-1 – 124110-8.
8. Defect driven multiferroicity in Gd doped BiFeO_3 at room temperature / S. K. Pradhan [et al.] // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2010. – Vol. 322(22). – P. 3614–3622.
9. Structural evolution and magnetization enhancement of $\text{Bi}_{1-x}\text{Tb}_x\text{FeO}_3$ / J. Zhang [et al.] // *J. Phys. Chem. Sol.* – 2013. – Vol. 74. – P. 849–853.
10. Variation of the lattice and spin dynamics in $\text{Bi}_{1-x}\text{Dy}_x\text{FeO}_3$ nanoparticles / H. L. Liu [et al.] // *J. Appl. Phys.* – 2014. – Vol. 115. – P. 133506-1 – 133506-7.
11. Study of structural, magnetic and electrical properties on Ho – substituted BiFeO_3 / T. D. Rao [et al.] // *Solid State Comm.* – 2012. – Vol. 152 (23). – P. 2071–2077.
12. Structural transition and magnetic property of $\text{Bi}_{1-x}\text{Yb}_x\text{FeO}_3$ / Y. N. Zheng [et al.] // *Chin. J. Chem. Phys.* – 2013. – Vol. 26 (2). – P. 157–162.
13. Predicted model of magnetocaloric effect in BiFeO_3 -based multiferroics / I. I. Makoed [et al.] // *Sol. Stat. Sci.* – 2019. – Vol. 95. – P. 105920-1 – 105920-7.
14. Petříček, V. Crystallographic Computing System JANA2006: General features / V. Petříček, M. Dušek, L. Palatinus // *Z. Kristallogr.* – 2014. – Vol. 229 (5). – P. 345–352.

15. Terahertz and infrared studies of antiferroelectric phase transition in multiferroic $\text{Bi}_{0.85}\text{Nd}_{0.15}\text{FeO}_3$ / V. Goian [et al.] // J. Appl. Phys. – 2011. – Vol. 100 (7). – P. 074112-1 – 074112-7.
16. First-principles calculations and Raman scattering evidence for local symmetry lowering in rhombohedral ilmenite: temperature- and pressure-dependent studies / J. E. Rodrigues [et al.] // J. Phys.: Cond. Matter. – 2018. – Vol. 30. – P. 485401-1 – 485401-13.
17. Vlijanije γ -obluchienija na kristallichieskuju strukturu BiFeO_3 / S. A. Ivanova [i dr.] // Zhurn. neorgan. khimii. – 2022. – T. 67, № 5. – S. 559–568.
18. Ma, F. Optical, magnetic, ferroelectric properties and photocatalytic activity of $\text{Bi}_2\text{Fe}_4\text{O}_9$ nanoparticles through a hydrothermal assisted sol-gel method / F. Ma, H. Zhao // Russian Journal of Physical Chemistry A. – 2019. – Vol. 93, nr 10. – P. 2079–2086.
19. Chauhan, S. Substitution driven structural and magnetic properties and evidence of spin phonon coupling in Sr-doped BiFeO_3 nanoparticles / S. Chauhan, M. Kumar, P. Pal // RSC Adv. – 2016. – Vol. 6. – P. 68028–68040.
20. Lufaso, M. W. The prediction of the crystal structures of perovskites using the software program SPuDS / M. W. Lufaso, P. M. Woodward // Acta Crystal. – 2001. – Vol. 57. – P. 725–738.
21. Sinha, A. Structural, optical, and electrical transport properties of some rare-earth-doped nickel ferrites: A study on effect of ionic radii of dopants / A. Sinha, A. Dutta // J. Phys. Chem. Sol. – 2020. – Vol. 145. – P. 109534-1 – 109534-11.

Рукапіс наступію редакцію 16.02.2024

МАТЭМАТЫКА

УДК 517.9

Екатерина Васильевна Пантелеева

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. фундаментальной математики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Katsiaryna Pantsialejeva

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: panteleevaEV@tut.by

УСЛОВИЯ ОБРАТИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА, ЗАДАННЫХ МАТРИЦАМИ ВЕРХНЕТРЕУГОЛЬНОГО ВИДА, В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^3)$

Получены условия обратимости оператора взвешенного сдвига в пространстве вектор-функций $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^3)$, заданного матрицей верхнетреугольного вида, и построен проектор Рисса при спектральных значениях $\frac{1}{2} < |\lambda| < 2$.

Ключевые слова: операторы взвешенного сдвига, резольвента, проектор Рисса.

Conditions for Invertibility of Weighted Shift Operators Specified by Matrices of Upper Triangular View in the Space of Vector of Functions $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^3)$

In this article, conditions for the invertibility of the weighted shift operator in the space of vector functions $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^3)$ defined by an upper triangular matrix are obtained and the Riesz projector is constructed for spectral values $\frac{1}{2} < |\lambda| < 2$.

Key words: weighted shift operators, resolvent, Riesz projector.

Введение

Выбор объекта исследования обусловлен рядом исследований обратимости операторов $B - \lambda I$ при спектральных значениях λ . Этот вопрос представляет интерес в связи с исследованием функциональных уравнений вида $(T - \lambda I)u = f$.

Целью исследования является получение условий обратимости операторов взвешенного сдвига в пространстве вектор-функций $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^3)$ и построение в явном виде резольвенты и проектора Рисса.

Основная часть

Рассмотрим пространство:

$$l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^3) = \{u = u(k): k \in \mathbb{Z}, u(k) \in \mathbb{C}^3, \sum_{-\infty}^{+\infty} \|u(k)\|^2 < +\infty\}.$$

Оператор взвешенного сдвига T имеет вид:

$$(Tu)(k) = A(k)u(k+1),$$

где матрица $A(k) \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$.

Определим матрицу A следующим образом: для $k \neq 0$ $A(k) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2 \right\}$, а для $k = 0$

$$A(0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Пусть обратная матрица $A^{-1}(0)$ при $k = 0$ имеет вид:

$$A^{-1}(0) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение. Оператор B называется гиперболическим, если $\sigma(B) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$, где $\mathbb{S}^1 = \{\lambda: |\lambda| = 1\}$ – единичная окружность [1].

В случае гиперболического оператора спектр не пересекается с единичной окружностью \mathbb{S}^1 , поэтому определен проектор Рисса

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} R(\lambda, B) d\lambda.$$

Определение. Резольвентой $R(\lambda, B)$ оператора B называется функция $R(\lambda, B) = (B - \lambda I)^{-1}$, определенная на резольвентном множестве $\rho(A)$ [2].

Это аналитическая функция комплексной переменной λ , значениями которой являются ограниченные линейные операторы.

Предложение 1. Если обратимый оператор B является гиперболическим, то резольвента в окрестности единичной окружности разлагается в операторный ряд Лорана

$$(B - \lambda I)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P) - \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P.$$

На основании предложения 1 при спектральных значениях $|\lambda| > 2$ резольвента разлагается в ряд с положительными степенями оператора T :

$$R_\lambda = -\frac{1}{\lambda} I - \frac{1}{\lambda^2} T - \frac{1}{\lambda^3} T^2 - \dots$$

Для $|\lambda| < \frac{1}{2}$ резольвента может быть определена в виде ряда с отрицательными степенями оператора T :

$$R_\lambda = T^{-1}(I + \lambda T^{-1} + \lambda^2 T^{-2} + \lambda^3 T^{-3}).$$

Найдём условия, при которых резольвента определена для спектральных значений $\frac{1}{2} < |\lambda| < 2$. При этом ядро оператора $\ker(T - \lambda) = \{0\}$, а это равносильно тому, что однородное уравнение $(T - \lambda)u = 0$ имеет только нулевое решение. Для этого решим однородное уравнение $(T - \lambda)u = 0$, а это равносильно $(Tu)(k) = \lambda u(k)$. С помощью данного уравнения выведем формулы для $u(k)$:

$$u(k) = \begin{cases} \lambda^k \prod_{i=0}^{k-1} A^{-1}(i) u(0), & \text{для } k > 0; \\ \frac{\prod_{i=k}^{-1} A(i)}{\lambda^k} u(0), & \text{для } k < 0. \end{cases}$$

Пусть вектор $u(0) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, тогда в случае $k < 0$ $u(k)$ имеет вид:

$$u(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{|k|} |\lambda|^{|k|}} \\ \frac{1}{2^{|k|} |\lambda|^{|k|}} \\ \frac{2^{|k|}}{\lambda^{|k|}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

И при $k \rightarrow \infty$ $\xi_3 \neq 0$ последовательность $\frac{2^{|k|}\xi_3}{\lambda^{|k|}} \rightarrow \infty$ и не принадлежит $l_2(Z, \mathbb{C}^3)$.
При $k > 0$:

$$u(k) = \lambda^k \begin{pmatrix} 2^{k-1}(b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 + b_{13}\xi_3) \\ 2^{k-1}(b_{22}\xi_2 + b_{23}\xi_3) \\ \frac{1}{2^{k-1}}b_{33}\xi_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

При $\xi_1 \neq 0$ $\xi_2 \neq 0$ вектор $u(k)$ не принадлежит пространству $l_2(Z, \mathbb{C}^3)$ при $|\lambda| > \frac{1}{2}$.

Лемма 1. При $\frac{1}{2} < |\lambda| < 2$ уравнение $(T - I)u = 0$ в пространстве $l_2(Z, \mathbb{C}^3)$ имеет только нулевое решение тогда и только тогда, когда $b_{11}b_{22} \neq 0$.

Теорема 1. Оператор $T - \lambda I$ оператором Фредгольма тогда и только тогда, когда $|\lambda| \neq \frac{1}{2}$ и $|\lambda| \neq 2$. Тогда: $\text{ind}(T - \lambda I) = 0$.

Из леммы 1 и теоремы 1 получим:

Утверждение 1. Если $b_{11}b_{22} \neq 0$, то оператор $T - \lambda I$ обратимый для $\frac{1}{2} < |\lambda| < 2$.

Это означает, что оператор $T - \lambda I$ гиперболический и резольвента имеет следующий вид:

$$R_\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k T^{-k-1} (I - P) - \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k T^{-k+1} P,$$

где P – проектор Рисса.

Построим проектор Рисса в рассматриваемом случае. Пусть произвольный проектор в точке $k = 0$ в пространстве $l_2(Z, \mathbb{C}^3)$ имеет следующий вид:

$$P(0) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}.$$

Для проектора $P(0)$ должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} P(0)V_0^+ = 0 \\ P(0)v = v \text{ для любого } v \in V^- \end{cases}$$

$V^- = \{\xi \in \mathbb{C}^3 | \xi_3 = 0\}$ получено из (1), $V^+ = \{\xi \in \mathbb{C}^3 | \xi = (q_1\xi_3, q_2\xi_3, \xi_3)\}$ получено из (2), где $q_1 = \frac{a_{23} - a_{23}a_{12} + a_{13}a_{22}}{a_{22}a_{33}}$ и $q_2 = \frac{a_{23}}{a_{33}}$.

С учетом всех условий получим проектор $P(0)$ для нашего случая:

$$P(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -q_1 \\ 0 & 1 & -q_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя условия перестановочности проектора и оператора P , а также то, что проектор $P(0)$ является оператором умножения на матричную последовательность $\{P(k)\}$, получаем вид проектора:

$$1) \text{ при } k < 0 \ P(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2^{2k}q_1 \\ 0 & 1 & -2^{2k}q_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2) \text{ при } k > 0 \ P(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{2k-2}s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $s = 2a_{12}a_{23} - a_{23}$.

Заклучение

Полученные в статье результаты являются новыми. Принципиально новыми в работе являются условия обратимости операторов взвешенного сдвига, заданных последовательностью матриц специального вида в пространстве вектор-функций $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^3)$ и построенный в явном виде проектор Рисса.

Полученные результаты могут быть применены при исследовании свойств динамических систем и использованы в образовательном процессе на спецкурсах по математическим дисциплинам, а также при написании курсовых, дипломных, магистерских работ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Антоневиц, А. Б. Когерентная локальная гиперболичность линейного расширения / А. Б. Антоневиц // Функционал. анализ и его прил. – 2005. – Т. 39, вып. 1. – С. 52–69.
2. Antonevich, A. Right-Side Hyperbolic Operators / A. Antonevich, E. V. Panteleeva // State university of Novi Pazar. – 2014. – Vol. 6, № 12. – P. 1–9.

REFERENCES

1. Antonievich, A. B. Kogierientnaja lokal'naja giperbolichnost' linejnogo rasshierenija / A. B. Antonievich // Funktsional. analiz i jeho pril. – 2005. – Т. 39, vyp. 1. – S. 52–69.
2. Antonevich, A. Right-Side Hyperbolic Operators / A. Antonevich, E. V. Panteleeva // State university of Novi Pazar. – 2014. – Vol. 6, № 12. – P. 1–9.

Рукапис наступіў у рэдакцыю 18.04.2024

УДК 519.6 + 517.983.54

Олег Викторович Матысик¹, Мария Сергеевна Горбач², Павел Олегович Олихвер³¹канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина²студент III курса физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

³магистр физ.-мат. наук, преподаватель каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина**Oleg Matysik¹, Maria Gorbach², Pavel Olikhver³**¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
of Brest State A. S. Pushkin University²3-d Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics of Brest State A. S. Pushkin University³Master of Physical and Mathematical Sciences,Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
of Brest State A. S. Pushkin Universitye-mail: matysikoleg@mail.ru**РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЙ АЛГОРИТМ
ДЛЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА
С САМОСОПРЯЖЕННЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ**

Для решения линейных операторных уравнений первого рода с положительным ограниченным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве предлагается явная итерационная процедура с переменным шагом. Исследована сходимость итерационного метода в случае априорного и апостериорного выбора параметра регуляризации при точной и приближенной правых частях операторного уравнения в исходной норме гильбертова пространства. Доказана сходимость метода в полунорме гильбертова пространства. Методом решена численная модельная задача. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении линейных операторных уравнений, а также при решении прикладных некорректных задач.

Ключевые слова: некорректное уравнение первого рода, регуляризирующий алгоритм, явная итерационная процедура, гильбертово пространство, ограниченный и самосопряженный оператор, полунорма.

**Regularizing Algorithm for Ill-Posed Equations of the First Kind
with a Self-Adjoint and Bounded Operator**

To solve linear operator equations of the first kind with a positive bounded self-adjoint operator in a Hilbert space, an explicit iterative procedure with variable step is proposed. The convergence of the iterative method is studied in the case of a priori and a posteriori choice of the regularization parameter for the exact and approximate right-hand sides of the operator equation in the original norm of the Hilbert space. The convergence of the method has been proven in the seminorm of a Hilbert space. The method solved a numerical model problem. The results obtained can be used in theoretical research in solving linear operator equations, as well as in solving applied ill-posed problems.

Key words: ill-posed equation of the first kind, regularizing algorithm, explicit iteration procedure, Hilbert space, bounded and self-adjoint operator, seminorm.

Введение

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач. Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике и управлении, может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \quad (1)$$

с заданным оператором $A: X \rightarrow Y$ и элементом y , где X и Y – метрические пространства, а в особо оговариваемых случаях – банаховы или даже гильбертовы. Ж. Адамаром (J. Hadamard) [1] было введено следующее понятие корректности.

Определение. Задачу отыскания решения $x \in X$ уравнения (1) называют корректной (или корректно поставленной, или корректной по Адамару), если при любой фиксированной правой части $y = y_0 \in Y$ уравнения (1) его решение:

- а) существует в пространстве X ;
- б) определено в пространстве X однозначно;
- в) устойчиво в пространстве X , т. е. непрерывно зависит от правой части $y \in Y$. В случае нарушения любого из этих условий задачу называют некорректной (некорректно поставленной); более конкретно при нарушении условия в) ее принято называть неустойчивой.

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора A^{-1} на всем пространстве Y .

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались. Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решения некорректных задач. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения первого рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2 , обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии и т. д.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы, поскольку они легко реализуются на ПЭВМ. Различные итерационные схемы решения некорректно поставленных задач были предложены в работах [2–12].

В настоящей статье предлагается явная итерационная процедура с переменным шагом решения некорректных задач в гильбертовом пространстве и проведено исследование ее основных свойств.

Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным *явным методом итераций Ландвебера* [2] $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$, $x_{0,\delta} = 0$ показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В *методе Ландвебера* на параметр α (шаг по антиградиенту) накладывається ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$,

что может привести на практике к необходимости большого числа итераций. Однако предлагаемый метод имеет преимущество по сравнению с *методом Ландвебера* в следующем: для достижения оптимальной точности здесь потребуется сделать число итераций по крайней мере в 2,5 раза меньше, чем методом итераций [2].

Как известно, погрешность метода простой итерации с постоянным [2; 4] или переменным [6] шагом зависит от суммы шагов по антиградиенту, и притом так, что для сокращения числа операций желательно, чтобы шаги по антиградиенту были как можно большими. Однако на эти шаги накладываются ограничения сверху [2; 4; 6]. Возникает идея попытаться ослабить эти ограничения. Это удастся сделать, выбирая

для шага три значения α, β, γ попеременно, где γ уже не обязано удовлетворять прежним требованиям.

Рассмотренный в статье явный итерационный метод найдет практическое применение в прикладной математике: он может быть использован для решения задач, встречающихся в теории оптимального управления, математической экономике, геофизике, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, диагностике плазмы, в наземной или воздушной геологоразведке, при решении обратной кинематической задачи сейсмологии, космических исследованиях (спектроскопии) и медицине (компьютерной томографии).

1. Постановка задачи

В действительном гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \quad (2)$$

с ограниченным положительным самосопряженным оператором $A: H \rightarrow H$ в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, однако, вообще говоря, не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (2) является некорректной (неустойчивой). Если решение уравнения (2) все же существует и единственно, то для его отыскания естественно пытаться применить различные итерационные схемы. В настоящей работе предлагается явная итерационная процедура с переменным шагом

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0, \\ \alpha_{3n+1} &= \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

В случае приближенной правой части y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ уравнения (2) приближения (3) примут вид

$$\begin{aligned} x_{n+1,\delta} &= x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0, \\ \alpha_{3n+1} &= \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (4) понимается утверждение о том, что приближения (4) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (2) при подходящем выборе n и достаточно малых δ . Иными словами, метод (4) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$.

2. Сходимость метода с априорным выбором числа итераций

По индукции покажем, что

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_{n+1}y + \alpha_n(E - \alpha_{n+1}A)y + \dots + \alpha_1(E - \alpha_{n+1}A)(E - \\ &\quad - \alpha_n A) \dots (E - \alpha_2 A)y = \sum_{k=0}^n \alpha_{n-k+1} \prod_{i=0}^{k-1} (E - \alpha_{n-i+1}A)y. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (3) и (5) при $n=0$ следует, что $x_1 = \alpha_1 y$, и, следовательно, при $n=0$ формула (5) верна. Предположим, что (4) верна при $n=p$, т. е.

$$x_{p+1} = \alpha_{p+1}y + \alpha_p(E - \alpha_{p+1}A)y + \dots + \alpha_1(E - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_pA)\dots(E - \alpha_2A)y.$$

Докажем, что (5) верна при $n = p + 1$. Из (3) получим

$$\begin{aligned} x_{p+2} &= x_{p+1} - \alpha_{p+2}(Ax_{p+1} - y) = \alpha_{p+2}y + (E - \alpha_{p+2}A)x_{p+1} = \\ &= \alpha_{p+2}y + (E - \alpha_{p+2}A)[\alpha_{p+1}y + \alpha_p(E - \alpha_{p+1}A)y + \alpha_{p-1}(E - \alpha_{p+1}A)(E - \\ &\quad - \alpha_pA)y + \alpha_{p-2}(E - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_pA)(E - \alpha_{p-1}A)y + \dots + \alpha_2(E - \\ &\quad - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_pA)\dots(E - \alpha_3A)y + \alpha_1(E - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_pA)\dots(E - \\ &\quad - \alpha_3A)(E - \alpha_2A)y] = \alpha_{p+2}y + \alpha_{p+1}(E - \alpha_{p+2}A)y + \alpha_p(E - \alpha_{p+2}A)(E - \\ &\quad - \alpha_{p+1}A)y + \alpha_{p-1}(E - \alpha_{p+2}A)(E - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_pA)y + \alpha_{p-2}(E - \alpha_{p+2}A)(E - \\ &\quad - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_pA)(E - \alpha_{p-1}A)y + \dots + \alpha_1(E - \alpha_{p+2}A)\dots(E - \alpha_3A)(E - \alpha_2A)y = \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} \alpha_{p-k+2} \prod_{i=0}^{k-1} (E - \alpha_{p-i+2}A)y. \end{aligned}$$

Следовательно, по индукции формула (5) верна.

Далее, для упрощения считаем $\|A\| = 1$. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим

$$\begin{aligned} x - x_n &= A^{-1}y - [\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_nA) + \dots + \alpha_1(E - \alpha_nA)(E - \alpha_{n-1}A)\dots(E - \alpha_2A)]y = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\lambda} \{1 - \lambda[\alpha_n + \alpha_{n-1}(1 - \alpha_n\lambda) + \dots + \alpha_1(1 - \alpha_n\lambda)\dots(1 - \alpha_2\lambda)]\} dE_\lambda y. \end{aligned}$$

Докажем по индукции, что

$$1 - \lambda[\alpha_n + \alpha_{n-1}(1 - \alpha_n\lambda) + \dots + \alpha_1(1 - \alpha_n\lambda)\dots(1 - \alpha_2\lambda)] = (1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda)\dots(1 - \alpha_n\lambda). \quad (6)$$

При $n = 1$ получим $1 - \lambda\alpha_1 = 1 - \alpha_1\lambda$, значит, при $n = 1$ формула (6) верна. Предположим, что данная формула верна при $n = p$:

$$\begin{aligned} 1 - \lambda[\alpha_p + \alpha_{p-1}(1 - \alpha_p\lambda) + \alpha_{p-2}(1 - \alpha_p\lambda)(1 - \alpha_{p-1}\lambda) + \dots + \alpha_1(1 - \alpha_p\lambda) \times \dots \times \\ \times (1 - \alpha_3\lambda)(1 - \alpha_2\lambda)] = (1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_p\lambda). \end{aligned}$$

Докажем, что рассматриваемая формула верна при $n = p + 1$:

$$\begin{aligned} 1 - \lambda[\alpha_{p+1} + \alpha_p(1 - \alpha_{p+1}\lambda) + \alpha_{p-1}(1 - \alpha_{p+1}\lambda)(1 - \alpha_p\lambda) + \alpha_{p-2}(1 - \alpha_{p+1}\lambda)(1 - \\ - \alpha_p\lambda)(1 - \alpha_{p-1}\lambda) + \dots + \alpha_1(1 - \alpha_{p+1}\lambda)(1 - \alpha_p\lambda)\dots(1 - \alpha_3\lambda)(1 - \alpha_2\lambda)] = \\ = 1 - \alpha_{p+1}\lambda + \lambda(1 - \alpha_{p+1}\lambda)[- \alpha_p - \alpha_{p-1}(1 - \alpha_p\lambda) - \alpha_{p-2}(1 - \\ - \alpha_p\lambda)(1 - \alpha_{p-1}\lambda) - \dots - \alpha_1(1 - \alpha_p\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_3\lambda)(1 - \alpha_2\lambda)] = \\ = 1 - \lambda\alpha_{p+1} + \lambda(1 - \alpha_{p+1}\lambda)\left[-\frac{1}{\lambda} \{1 - (1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_p\lambda)\}\right] = \\ = 1 - \lambda\alpha_{p+1} - (1 - \alpha_{p+1}\lambda) + (1 - \alpha_{p+1}\lambda)(1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda) \times \dots \times \\ \times (1 - \alpha_p\lambda) = (1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_p\lambda)(1 - \alpha_{p+1}\lambda). \end{aligned}$$

Следовательно, формула (6) верна.

Таким образом, имеем

$$x - x_n = \int_0^1 \lambda^{-1} (1 - \alpha_1 \lambda) (1 - \alpha_2 \lambda) \dots (1 - \alpha_n \lambda) dE_{\lambda, y} = \int_0^1 \lambda^{-1} (1 - \alpha \lambda)^k (1 - \beta \lambda)^l (1 - \gamma \lambda)^m dE_{\lambda, y} .$$

Здесь k, l, m – натуральные показатели, где $l + m + k = n$.

Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0, 1)$ и положительных α, β, γ выполнялись условия

$$\left. \begin{aligned} |(1 - \alpha \lambda)| < 1, \text{ (т.е. } 0 < \alpha < 2), \\ |(1 - \alpha \lambda)(1 - \beta \lambda)| < 1, \\ |(1 - \alpha \lambda)(1 - \beta \lambda)(1 - \gamma \lambda)| < 1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Докажем сходимость процесса (3) при точной правой части y . Справедлива **Теорема 1.** *Итерационный процесс (3) при условии (7) сходится в норме гильбертова пространства.*

Доказательство.

Поскольку

$$x - x_n = \int_0^{\varepsilon} \lambda^{-1} (1 - \alpha \lambda)^k (1 - \beta \lambda)^l (1 - \gamma \lambda)^m dE_{\lambda, y} + \int_{\varepsilon}^1 \lambda^{-1} (1 - \alpha \lambda)^k (1 - \beta \lambda)^l (1 - \gamma \lambda)^m dE_{\lambda, y} ,$$

то, считая $k = l = m = n/3$, при условиях (7) получим

$$\left\| \int_{\varepsilon}^1 \lambda^{-1} (1 - \alpha \lambda)^k (1 - \beta \lambda)^l (1 - \gamma \lambda)^m dE_{\lambda, y} \right\| \leq q^{n/3} \left\| \int_{\varepsilon}^1 dE_{\lambda, x} \right\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Здесь $q = \max_{\lambda \in [\varepsilon, 1]} |(1 - \alpha \lambda)(1 - \beta \lambda)(1 - \gamma \lambda)| < 1$. В силу свойств спектральной функции [7]

$$\left\| \int_0^{\varepsilon} \lambda^{-1} (1 - \alpha \lambda)^k (1 - \beta \lambda)^l (1 - \gamma \lambda)^m dE_{\lambda, y} \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon} \lambda^{-1} dE_{\lambda, y} \right\| = \left\| \int_0^{\varepsilon} dE_{\lambda, x} \right\| = \|E_{\varepsilon, x}\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, $\|x - x_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. *Условие $|(1 - \alpha \lambda)(1 - \beta \lambda)| < 1$ равносильно совокупности условий $\alpha \beta < \alpha + \beta$ и $(\alpha + \beta)^2 < 8 \alpha \beta$ [7]. Отсюда $\alpha + \beta < 8$.*

Докажем сходимость процесса (4) при приближенной правой части уравнения (2). Справедлива

Теорема 2. *При условии (7) итерационный процесс (4) сходится, если выбирать число итераций n из условия $n \delta \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \delta \rightarrow 0$.*

Доказательство.

Рассмотрим $x - x_{n, \delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n, \delta})$. Оценим $\|x_n - x_{n, \delta}\|$, где

$$x_n - x_{n, \delta} = [\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + \dots + \alpha_1(E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A) \dots (E - \alpha_2 A)](y - y_{\delta}) = \int_0^1 \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha \lambda)^k (1 - \beta \lambda)^l (1 - \gamma \lambda)^m] dE_{\lambda} (y - y_{\delta}).$$

Оценим на $[0,1]$ максимум подынтегральной функции

$$g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha\lambda)^k (1 - \beta\lambda)^l (1 - \gamma\lambda)^m \right] > 0.$$

Сначала докажем по индукции, что

$$\lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda) \dots (1 - \alpha_n\lambda) \right] \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n. \quad (7)$$

Обозначим левую часть равенства (8) через $z_n(\lambda)$. При $n=1$ имеем

$$z_1(\lambda) = \frac{1 - (1 - \alpha_1\lambda)}{\lambda} = \alpha_1 \leq \alpha_1, \text{ значит, при } n=1 \text{ (8) верна.}$$

Пусть (8) выполняется при $n = p$, т. е. что $z_p(\lambda) \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_p$. Докажем, что (8) справедлива при $n = p+1$:

$$\begin{aligned} z_{p+1}(\lambda) &= \frac{1 - (1 - \alpha_1\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_p\lambda)(1 - \alpha_{p+1}\lambda)}{\lambda} = \frac{1 - (1 - \alpha_1\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_p\lambda)}{\lambda} + \\ &+ \frac{(1 - \alpha_1\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_p\lambda)\alpha_{p+1}\lambda}{\lambda} = \frac{1 - (1 - \alpha_1\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_p\lambda)}{\lambda} + \\ &+ \alpha_{p+1}(1 - \alpha_1\lambda) \times \dots \times (1 - \alpha_p\lambda) \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_p + \alpha_{p+1}. \end{aligned}$$

Следовательно, формула (8) верна.

Поэтому $g_n(\lambda) \leq k\alpha + l\beta + m\gamma$. Отсюда $\|x_n - x_{n,\delta}\| \leq (k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta$.

Если $k = l = m = n/3$, то $\|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \frac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)\delta$.

Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + (k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta$ и $\|x - x_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, то для сходимости метода итераций (4) достаточно потребовать, чтобы $(k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$.

Таким образом, достаточно, чтобы $n\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$. Теорема 2 доказана.

Получим оценку скорости сходимости. Предположим, что точное решение x истокообразно представимо, т. е. что $x = A^s z, s > 0$. Тогда $y = A^{s+1} z$

$$\text{и } x - x_n = \int_0^1 (1 - \alpha\lambda)^k (1 - \beta\lambda)^l (1 - \gamma\lambda)^m \lambda^s dE_\lambda z.$$

Оценим максимум подынтегральной функции

$$f(\lambda) = (1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda) \dots (1 - \alpha_n\lambda) \lambda^s = \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i\lambda) \lambda^{\frac{\alpha_i s}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}} = \prod_{i=1}^n \varphi_i(\lambda).$$

Обозначим $C_i = \frac{\alpha_i s}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$.

Нетрудно показать [6; 8], что $|\varphi_i(\lambda)| \leq \max \left\{ (1 - \alpha_i M) M^{C_i}, \left(\frac{C_i}{e\alpha_i} \right)^{C_i} \right\}$,

где $M = \|A\|$. Поскольку $\|A\| = 1$, то получим

$$\begin{aligned}
|f(\lambda)| &= \prod_{i=1}^n |\varphi_i(\lambda)| \leq \max \left\{ \prod_{i=1}^n (1-\alpha_i), \prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{e\alpha_i} \right)^{c_i} \right\} = \\
&= \max \left\{ (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\dots(1-\alpha_n), \left[s / \left(e \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \right]^s \right\} = \\
&\max \left\{ (1-\alpha)^k (1-\beta)^l (1-\gamma)^m, s^s [(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-s} \right\}.
\end{aligned}$$

При $k = l = m = n/3$ ($n = 3p$, $p \in N$) получим

$$|f(\lambda)| \leq \max \left\{ (1-\alpha)^{n/3} (1-\beta)^{n/3} (1-\gamma)^{n/3}, s^s \left[\frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma) e \right]^{-s} \right\}.$$

Для достаточно больших n $(1-\alpha)^{n/3} (1-\beta)^{n/3} (1-\gamma)^{n/3} \leq s^s \left[\frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma) e \right]^{-s}$, зна-

чит, для таких n справедлива оценка $|f(\lambda)| \leq s^s [(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-s} = s^s \left[\frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma) e \right]^{-s}$.

Поэтому $\|x - x_n\| \leq s^s [(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-s} \|z\|$. Отсюда $\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^s [(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-s} \|z\| + (k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta$.

Итак, доказана

Теорема 3. Если $x = A^s z$, $s > 0$, то для метода (4) справедлива оценка погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^s [(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-s} \|z\| + (k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta. \quad (9)$$

Замечание 2. Для упрощения считали $\|A\| = 1$. На самом деле все результаты легко переносятся на случай, когда $\|A\| < \infty$.

При $k = l = m = n/3$ оценка (8) примет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^s \left[\frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma) e \right]^{-s} \|z\| + \frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma)\delta.$$

Ее оптимальная по n оценка имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1+s) e^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \quad (10)$$

и получается при $n_{\text{опт}} = s \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right)^{-1} e^{-s/(s+1)} \delta^{-1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$.

Таким образом, оптимальная оценка (10) для метода (4) при неточности в правой части уравнения (2) оказывается такой же, как и оптимальная оценка для метода простой итерации Ландвебера [2]. Следовательно, метод (4) не дает преимуществ в мажорантных оценках по сравнению с методом простых итераций [2]. Но он дает выигрыш в следующем. В методе простых итераций с постоянным шагом [2] требуется

условие $0 < \alpha \leq 1,25$, а в методе (4) $0 < \alpha < 2$, $\alpha + \beta < 8$, а γ выбирается из условия $|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)(1 - \gamma\lambda)| < 1$. И, выбирая α, β, γ соответствующим образом, можно сделать $n_{\text{опт}}$ в методе (3) меньшим, чем для [2]. Поэтому, используя метод (4), для достижения оптимальной точности потребуется сделать число итераций по крайней мере в 2,5 раза меньше, чем *методом Ландвебера* [2].

Рассмотрим погрешность метода (4) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по методу (4), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом вычислительных погрешностей η_n , т. е.

$$z_{n+1} = z_n - \alpha_{n+1}(Az_n - y_\delta) + \alpha_{n+1}\eta_n, \quad z_0 = 0. \quad (11)$$

Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем (3) из (10), в результате получим

$$\varepsilon_{n+1} = (E - \alpha_{n+1}A)\varepsilon_n + \alpha_{n+1}\eta_n, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0, \quad \eta_0 = 0. \quad (12)$$

По индукции докажем, что

$$\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{n-k} \prod_{i=0}^{k-1} (E - \alpha_{n-i}A) \eta_{n-k-1}. \quad (13)$$

Из (12) при $n = 1$ и из (13) при $n = 2$ получим $\varepsilon_2 = \alpha_2\eta_1$, т. е. при $n = 2$ (13) верна.

Пусть (13) справедлива при $n = p$: $\varepsilon_p = \sum_{k=0}^{p-2} \alpha_{p-k} \prod_{i=0}^{k-1} (E - \alpha_{p-i}A) \eta_{p-k-1}$. Докажем, что (13) справедлива при $n = p + 1$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p+1} &= (E - \alpha_{p+1}A)\varepsilon_p + \alpha_{p+1}\eta_p = (E - \alpha_{p+1}A) \left[\sum_{k=0}^{p-2} \alpha_{p-k} \prod_{i=0}^{k-1} (E - \alpha_{p-i}A) \eta_{p-k-1} \right] + \\ &+ \alpha_{p+1}\eta_p = (E - \alpha_{p+1}A) [\alpha_p \eta_{p-1} + \alpha_{p-1}(E - \alpha_p A) \eta_{p-2} + \alpha_{p-2}(E - \alpha_p A)(E - \\ &- \alpha_{p-1}A) \eta_{p-3} + \dots + \alpha_2(E - \alpha_p A)(E - \alpha_{p-1}A) \dots (E - \alpha_3 A) \eta_1] + \alpha_{p+1}\eta_p = \\ &= \alpha_p (E - \alpha_{p+1}A) \eta_{p-1} + \alpha_{p-1}(E - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_p A) \eta_{p-2} + \alpha_{p-2}(E - \\ &- \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_p A)(E - \alpha_{p-1}A) \eta_{p-3} + \dots + \alpha_2(E - \alpha_{p+1}A)(E - \alpha_p A)(E - \\ &- \alpha_{p-1}A) \dots (E - \alpha_3 A) \eta_1 + \alpha_{p+1}\eta_p = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{p+1-k} \prod_{i=0}^{k-1} (E - \alpha_{p+1-i}A) \eta_{p-k}. \end{aligned}$$

Следовательно, формула (13) верна.

Так как $\|E - \alpha A\| \leq 1$, $\|(E - \alpha A)(E - \beta A)\| \leq 1$, $\|(E - \alpha A)(E - \beta A)(E - \gamma A)\| \leq 1$, то $\|\varepsilon_n\| \leq \frac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)\eta$, где $\eta = \sup_i |\eta_i|$.

Таким образом, с учетом вычислительной погрешности справедлива следующая оценка погрешности метода итераций с переменным шагом (4):

$$\|x - z_n\| \leq \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \leq s^s \left[\frac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)e \right]^{-s} \|z\| + \frac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)(\delta + \eta).$$

3. Сходимость метода в полунорме гильбертова пространства при точной и приближенной правой части уравнения

Изучим сходимость итерационного метода (4) в случае единственного решения в полунорме (энергетической норме) гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$ [5; 6; 8; 12]. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ . Полагаем, что $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \quad (14)$$

В разделе 2 показано, что $x_n = A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^k (E - \beta A)^l (E - \gamma A)^m \right] y$, где k, l, m – натуральные показатели и $k + l + m = n$. Тогда запишем первое слагаемое из равенства (14) в виде

$$\begin{aligned} x - x_n &= A^{-1} y - A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^k (E - \beta A)^l (E - \gamma A)^m \right] y = \\ &= (E - \alpha A)^k (E - \beta A)^l (E - \gamma A)^m x. \end{aligned}$$

Как было показано в разделе 2, $x - x_n$ бесконечно мало в норме пространства H при $n \rightarrow \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки необходима дополнительная информация на гладкость точного решения x – его истокообразная представимость. При использовании полунормы нам это дополнительное предположение не потребуется. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора A имеем

$$\begin{aligned} \|x - x_n\|_A^2 &= (A(x - x_n), x - x_n) = \\ &= \left(A(E - \alpha A)^k (E - \beta A)^l (E - \gamma A)^m x, (E - \alpha A)^k (E - \beta A)^l (E - \gamma A)^m x \right) = \\ &= \left(A(E - \alpha A)^{2k} (E - \beta A)^{2l} (E - \gamma A)^{2m} x, x \right) = \\ &= \int_0^1 \lambda (1 - \alpha \lambda)^{2k} (1 - \beta \lambda)^{2l} (1 - \gamma \lambda)^{2m} d(E_\lambda x, x), \end{aligned}$$

где E_λ – соответствующая оператору A спектральная функция.

Для оценки интересующей нас нормы найдем при $\lambda \in [0, 1]$ максимум подынтегральной функции $\psi(\lambda) = \lambda (1 - \alpha \lambda)^{2k} (1 - \beta \lambda)^{2l} (1 - \gamma \lambda)^{2m}$.

Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0, 1]$, положительных α, β, γ выполнялось условие (7).

В разделе 2 показано, что для достаточно больших n справедливо $\lambda (1 - \alpha \lambda)^k (1 - \beta \lambda)^l (1 - \gamma \lambda)^m \leq [(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-1}$, поэтому

$$\lambda (1 - \alpha \lambda)^{2k} (1 - \beta \lambda)^{2l} (1 - \gamma \lambda)^{2m} \leq [2(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-1}.$$

В дальнейшем для простоты, считаем, что $k = l = m = \frac{n}{3}$ ($n = 3p, p \in N$). Поэтому

для таких n справедлива оценка $\max_{\lambda \in [0, 1]} |\psi(\lambda)| \leq \left[\frac{2n}{3} (\alpha + \beta + \gamma)e \right]^{-1}$.

Следовательно, при условии (7) получим следующую оценку

$$\|x - x_n\|_A \leq \left[\frac{2n}{3} (\alpha + \beta + \gamma) e \right]^{-1/2} \|x\|.$$

Оценим второе слагаемое в (14). Как показано в разделе 2, имеет место равенство

$$\begin{aligned} x_n - x_{n,\delta} &= A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^{n/3} (E - \beta A)^{n/3} (E - \gamma A)^{n/3} \right] (y - y_\delta) = \\ &= \int_0^1 \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha \lambda)^{n/3} (1 - \beta \lambda)^{n/3} (1 - \gamma \lambda)^{n/3} \right] dE_\lambda (y - y_\delta). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 &= (A(x_n - x_{n,\delta}), x_n - x_{n,\delta}) = \\ &= \left(\left[E - (E - \alpha A)^{n/3} (E - \beta A)^{n/3} (E - \gamma A)^{n/3} \right] (y - y_\delta), \right. \\ &\quad \left. A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^{n/3} (E - \beta A)^{n/3} (E - \gamma A)^{n/3} \right] (y - y_\delta) \right) = \\ &= (A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^{n/3} (E - \beta A)^{n/3} (E - \gamma A)^{n/3} \right]^2 (y - y_\delta), y - y_\delta) = \\ &= \int_0^1 \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha \lambda)^{n/3} (1 - \beta \lambda)^{n/3} (1 - \gamma \lambda)^{n/3} \right]^2 d(E_\lambda (y - y_\delta), y - y_\delta). \end{aligned}$$

Обозначим через $\xi_n(\lambda)$ подынтегральную функцию и оценим ее сверху при условии (7). В разделе 2 показано, что $|g_n(\lambda)| = \left| \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha \lambda)^{n/3} (1 - \beta \lambda)^{n/3} (1 - \gamma \lambda)^{n/3} \right] \right| \leq \frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma)$. Тогда

$$\begin{aligned} \xi_n(\lambda) &= \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha \lambda)^{n/3} (1 - \beta \lambda)^{n/3} (1 - \gamma \lambda)^{n/3} \right]^2 = \\ &= \left| \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha \lambda)^{n/3} (1 - \beta \lambda)^{n/3} (1 - \gamma \lambda)^{n/3} \right] \right| \left| 1 - (1 - \alpha \lambda)^{n/3} (1 - \beta \lambda)^{n/3} (1 - \gamma \lambda)^{n/3} \right| \leq \\ &\leq \frac{n}{3} (\alpha + \beta + \gamma) \left(1 + \left| (1 - \alpha \lambda)(1 - \beta \lambda)(1 - \gamma \lambda) \right|^{n/3} \right) \leq \frac{2n}{3} (\alpha + \beta + \gamma), \end{aligned}$$

т. к. при условии (7) справедливо $\left| (1 - \alpha \lambda)(1 - \beta \lambda)(1 - \gamma \lambda) \right|^{n/3} < 1$.

Итак, для любых $n \geq 1$ $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 \leq \frac{2n}{3} (\alpha + \beta + \gamma) \delta^2$, поэтому

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} n^{1/2} (\alpha + \beta + \gamma)^{1/2} \delta, \quad n \geq 1.$$

Поскольку

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} n^{1/2} (\alpha + \beta + \gamma)^{1/2} \delta, \quad n \geq 1$$

и при $n \rightarrow \infty$ $\|x - x_n\|_A \rightarrow 0$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, достаточно, чтобы $\sqrt{n}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

Таким образом, если в процедуре (4) выбрать число итераций $n = n(\delta)$, зависящих от δ так, чтобы $\sqrt{n}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, то получим регуляризующий метод, обеспечивающий сходимость к точному решению уравнения (2) в полунорме гильбертова пространства. Итак, доказана

Теорема 4. Итерационная процедура (4) при условии (7) сходится в полунорме гильбертова пространства, если число итераций n выбрать так, чтобы $\sqrt{n}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3)

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \left[\frac{2n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)e \right]^{-1/2} \|x\| + \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} n^{1/2}(\alpha + \beta + \gamma)^{1/2} \delta, \quad n \geq 1. \quad (15)$$

Оптимизируем полученную оценку (15) по n , т. е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций n , при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по n от правой части равенства (15), получим $3^{1/2}(\alpha + \beta + \gamma)^{-1/2} e^{-1/2} \|x\| = 3^{-1/2} 2(\alpha + \beta + \gamma)^{1/2} \delta n$, отсюда

$$n_{\text{опт}} = 3(\alpha + \beta + \gamma)^{-1} e^{-1/2} (2\delta)^{-1} \|x\|. \quad (16)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (15), найдем ее оптимальное значение:

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2e^{-1/4} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}. \quad (17)$$

Из (17) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметров α, β, γ . Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α, β, γ , и поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать α, β, γ возможно большими, удовлетворяющими условию (7), и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in \mathbb{Z}$. Таким образом, доказана

Теорема 5. При условии (7) оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса (4) в полунорме гильбертова пространства имеет вид (17) и получается при $n_{\text{опт}}$ из (16).

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в полунорме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H . Эти условия дает

Теорем 6. Если выполнены условия:

1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$,

2) $E_\varepsilon x = 0$, где $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$, ε – фиксированное положительное число ($0 < \varepsilon < 1$),

то из сходимости $x_{n,\delta}$ к решению x в полунорме нормы следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.

Доказательство.

Из 1) и 2) имеем $\int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) = 0$.

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \|x - x_{n,\delta}\|^2 &= \int_0^1 d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), x - x_{n,\delta}) = \int_0^1 \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) = \\ &= \int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) = \\ &= \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^1 d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) = \frac{1}{\varepsilon} \|x - x_{n,\delta}\|_A^2. \end{aligned}$$

Поэтому из $\|x - x_{n,\delta}\|_A \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ следует $\|x - x_{n,\delta}\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Теорема 6 доказана.

Замечание 3. Так как $x_{n,\delta} = A^{-1} [E - (E - \alpha A)^{n/3} (E - \beta A)^{n/3} (E - \gamma A)^{n/3}] y_\delta$, то для того, чтобы $x_{n,\delta}$ удовлетворяло условию $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, достаточно потребовать, чтобы $E_\varepsilon y_\delta = 0$. Таким образом, если решение x и приближенная правая часть y_δ таковы, что $E_\varepsilon x = 0$ и $E_\varepsilon y_\delta = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в полунорме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства и, следовательно, для сходимости приближений (4) в норме пространства H не требуется предположения истокорпредставимости точного решения.

4. Сходимость метода с апостериорным выбором числа итераций

Априорный выбор числа итераций $n_{\text{опт}}$ получен в предположении, что точное решение x истокорпредставимо, т. е. $x = A^s z, s > 0$. Однако не всегда имеются сведения об элементе z и степени истокорпредставимости s . Тем не менее метод (4) становится вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке [2; 5; 6; 8].

Определим момент m останова итерационного процесса (4) условием

$$\left. \begin{aligned} \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m), \\ \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon, \end{aligned} \right\} \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \quad (18)$$

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε , т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила останова (18) к итерационному методу (3).

Рассмотрим при $n = 3p, p = 1, 2, \dots$ семейство функций

$$g_n(\lambda) = \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha\lambda)^{n/3} (1 - \beta\lambda)^{n/3} (1 - \gamma\lambda)^{n/3}].$$

Из раздела 2 при условиях (7) получим

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq 1} |g_n(\lambda)| \leq \frac{n(\alpha + \beta + \gamma)}{3}, \quad (19)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq 1} |1 - \lambda g_n(\lambda)| = \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \left| (1 - \alpha\lambda)^{\frac{n}{3}} (1 - \beta\lambda)^{\frac{n}{3}} (1 - \gamma\lambda)^{\frac{n}{3}} \right| \leq 1, \quad (20)$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) = (1 - \alpha\lambda)^{\frac{n}{3}} (1 - \beta\lambda)^{\frac{n}{3}} (1 - \gamma\lambda)^{\frac{n}{3}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \lambda \in (0, 1], \quad (21)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq s^s \left[\frac{n(\alpha + \beta + \gamma)e}{3} \right]^{-s}, \quad n > 0, \quad 0 \leq s < \infty. \quad (22)$$

Аналогічна [5; 6; 8] доказываюцца наступныя леммы.

Лема 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$. Тогда для любого $w \in H$ $(E - Ag_n(A))w \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Лема 2. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$. Тогда для любого $v \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение $n^s \|(E - Ag_n(A))v\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $0 \leq s < \infty$.

Лема 3. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$. Если для некоторой подпоследовательности $n_k < \bar{n} = \text{const}$ и $v_0 \in \overline{R(A)}$ при $k \rightarrow \infty$ имеем $\omega_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$, то $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$.

Используем эти леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 7. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ ($m = 3p$, $p = 1, 2, 3, \dots$) в методе (3) выбран по правилу (17), тогда $x_{m, \delta} \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство.

Поскольку нуль не является собственным значением оператора A , то $M(A) = \overline{R(A)} = H$.

Так как

$$\begin{aligned} E - A[\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + \dots + \alpha_1(E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A) \dots (E - \alpha_2 A)] = \\ = (E - \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A) \dots (E - \alpha_n A), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} A[\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + \dots + \alpha_1(E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A) \dots (E - \alpha_2 A)] = \\ = E - (E - \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A) \dots (E - \alpha_n A). \end{aligned}$$

Имеем

$$x_{n, \delta} = [\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + \dots + \alpha_1(E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A) \dots (E - \alpha_2 A)]y_\delta,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} x_{n, \delta} - x = A^{-1} [E - (E - \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A) \dots (E - \alpha_n A)](y_\delta - y) - \\ - (E - \alpha_1 A)(E - \alpha_2 A) \dots (E - \alpha_n A)x = A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^{\frac{n}{3}} (E - \beta A)^{\frac{n}{3}} (E - \gamma A)^{\frac{n}{3}} \right] (y_\delta - \end{aligned}$$

$-y) - (E - \alpha A)^{\frac{n}{3}}(E - \beta A)^{\frac{n}{3}}(E - \gamma A)^{\frac{n}{3}}x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - A g_n(A))x$
 (здесь и ниже $n = 3p, p = 1, 2, 3, \dots$). Значит,

$$Ax_{n,\delta} - y = -A(E - A g_n(A))x + A g_n(A)(y_\delta - y). \quad (23)$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A(E - A g_n(A))x - (E - A g_n(A))(y_\delta - y). \quad (24)$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - A g_n(A))x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (25)$$

$$\sigma_n = n\|A(E - A g_n(A))x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Кроме того, из (19) и (20)

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq \frac{n(\alpha + \beta + \gamma)}{3} \delta, \quad (27)$$

$$\|E - A g_n(A)\| \leq 1. \quad (28)$$

Применим правило останова (18). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b\delta$ и из (24) и (28) получим при $n = m$

$$\|A(E - A g_m(A))x\| \leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - A g_m(A))(y_\delta - y)\| \leq b\delta + \delta = (b+1)\delta.$$

Следовательно,

$$\|A(E - A g_m(A))x\| \leq (b+1)\delta. \quad (29)$$

Для любого $n < m$ получим

$$\|A(E - A g_n(A))x\| \geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - A g_n(A))(y - y_\delta)\| \geq b\delta - \delta = (b-1)\delta,$$

т. е. для любого $n < m$

$$\|A(E - A g_n(A))x\| \geq (b-1)\delta. \quad (30)$$

Из (26) и (30) при $n = m - 3$ получим $\frac{\sigma_{m-3}}{m-3} = \|A(E - A g_{m-3}(A))x\| \geq (b-1)\delta$ или

(что то же) $(m-3)\delta \leq \frac{\sigma_{m-3}}{b-1} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ (так как из (26) $\sigma_m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$), следовательно, $m\delta \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$. Если при этом $m \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} \|x_{m,\delta} - x\| &\leq \|(E - A g_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \|(E - A g_m(A))x\| + \\ &+ \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} m\delta \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \rightarrow x, \delta_n \rightarrow 0$.

Действительно, из (28) $\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \leq (b+1)\delta_n \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$.

Следовательно, при $\delta_n \rightarrow 0$ $A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$, и по лемме 3 $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$. Отсюда имеем $\|x_{m(\delta_n), \delta_n} - x\| \leq \|(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| + \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} m(\delta_n) \delta_n \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$. Теорема 7 доказана. Имеет место

Теорема 8. Пусть выполняются условия теоремы 7 и пусть $x = A^s z, s > 0$, тогда справедливы оценки $m \leq 3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha + \beta + \gamma)e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)}$,

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \left\{ 3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha + \beta + \gamma)e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)} \right\} \delta. \quad (31)$$

Доказательство.

При $n = m - 3$ имеем $\|A(E - Ag_{m-3}(A))x\| = \|A^{s+1}(E - Ag_{m-3}(A))z\| \leq (s+1)^{s+1} \left[(m-3) \frac{(\alpha + \beta + \gamma)e}{3} \right]^{-(s+1)} \|z\|$. Используя (30), получим $(b-1)\delta \leq (s+1)^{s+1} \left[(m-3) \frac{(\alpha + \beta + \gamma)e}{3} \right]^{-(s+1)} \|z\|$, откуда $m \leq 3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha + \beta + \gamma)e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)}$.

При помощи неравенства моментов оценим выражение

$$\|(E - Ag_m(A))x\| = \|A^s(E - Ag_m(A))z\| \leq \|A^{s+1}(E - Ag_m(A))z\|^{s/(s+1)} \times \|A(E - Ag_m(A))z\|^{1/(s+1)} \leq \|A(E - Ag_m(A))x\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|x_{m,\delta} - x\| &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \\ &\leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{m(\alpha + \beta + \gamma)}{3} \delta \leq \\ &\leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \left\{ 3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha + \beta + \gamma)e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)} \right\} \delta. \end{aligned}$$

Теорема 8 доказана.

Замечание 4. Порядок оценки (30) есть $O(\delta^{s/(s+1)})$, и, как следует из [2; 6], он оптимален в классе решений $x = A^s z, s > 0$.

Замечание 5. В формулировке теоремы 8 предполагается, что точное решение истокорпредставимо, но знание истокорпредставимости не потребуется на практике, так как при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку решения.

4. Численная модельная задача

Рассмотрим в пространстве $L_2(0,1)$ задачу в виде уравнения

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (32)$$

с симметричным положительным ядром $K(t, s) = \frac{1}{1+100(t-s)^2}$. В качестве точного решения сформулированной задачи выберем функцию

$$x(s) = \begin{cases} 2s, & 0 \leq s < 0,25, \\ -s + 0,75, & 0,25 \leq s < 0,5, \\ s - 0,25, & 0,5 \leq s < 0,75, \\ -2s + 2, & 0,75 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

С использованием квадратурной формулы правых прямоугольников при $m = 32$, $h = 1/m$ была вычислена в точках $t_i = ih$, $i = \overline{1, m}$ правая часть $y(t)$ интегрального уравнения (31). Сформулированная задача относится к классу обратных задач теории потенциала. Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ , и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения \tilde{y}_i , $i = \overline{1, m}$, полученные следующим образом $\tilde{y}_i = [y(t_i) \cdot 10^k + 0,5] / 10^k$, квадратные скобки означают целую часть числа и $k = 3; 4$. При $k = 3$ величина погрешности $\delta = 10^{-3}$. При $k = 4$ величина погрешности $\delta = 10^{-4}$. Действительно, $\int_0^1 [y(t) - \tilde{y}(t)]^2 dt \approx \sum_{i=1}^m [y(t_i) - \tilde{y}_i]^2 h \leq mh(10^{-k})^2 = 10^{-2k}$. Заменим интеграл в уравнении (31) квадратурной суммой, например, по формуле правых прямоугольников с узлами $s_j = jh$, $j = \overline{1, m}$, $h = 1/m$, т. е. $\int_0^1 K(t,s)x(s)ds \approx \sum_{j=1}^m K(t, s_j)hx_j$. Тогда получим равенство

$$\sum_{j=1}^m K(t, s_j)hx_j + \rho_m(t) = y(t), \text{ где } \rho_m(t) \text{ — остаток квадратурной замены.}$$

Записав последнее равенство в точках t_i , $i = \overline{1, m}$, получим уравнения $\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)hx_j + \rho_m(t_i) = y(t_i)$, $i = \overline{1, m}$. Точные значения $y(t_i)$ мы не знаем, а знаем лишь приближения \tilde{y}_i , и, отбросив теперь остаточный член, получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно приближенного решения

$$\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)hx_j = \tilde{y}_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (33)$$

Выберем для определенности $m = 32$ и будем решать систему (33) методом итераций (4), который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha_{n+1} \left[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h x_j^{(n)} \right], \quad x_i^{(0)} = 0,$$

$$\alpha_{3n+1} = \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad i = \overline{1, m}.$$

Затем система (33) решалась методом простой итерации [2], который в данном случае запишется $x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha \left[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h x_j^{(n)} \right], x_i^{(0)} = 0, i = \overline{1, m}$. При счете выбирались: $\alpha = 0,8, \beta = 4,4, \gamma = 2,1$. Задача была решена при $\delta = 10^{-3}$ и $\delta = 10^{-4}$.

При решении задачи итерационными методами (4) и [2] на каждом шаге итерации вычислялись: $\|Ax^{(n)} - \tilde{y}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h x_j^{(n)} - \tilde{y}_i \right]^2 \right\}^{1/2}$ – дискретная норма невязки,

$\|x^{(n)}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m \left[x_i^{(n)} \right]^2 \right\}^{1/2}$ – норма приближенного решения и дискретная норма разности

между точным и приближенным решениями $\|x - x^{(n)}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m \left[x(t_i) - x_i^{(n)} \right]^2 \right\}^{1/2}$.

Таблица – Результаты счета итераций разными методами

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближенные решения			
			Метод [2] $\delta = 10^{-3}$	Метод (4) $\delta = 10^{-3}$	Метод [2] $\delta = 10^{-4}$	Метод (4) $\delta = 10^{-4}$
0,00000	0,03038	0,00000	0,04025	0,04669	0,02731	0,02795
0,03125	0,03801	0,06250	0,07789	0,08404	0,06017	0,06099
0,06250	0,04695	0,12500	0,12639	0,13130	0,11313	0,11391
0,09375	0,05669	0,18750	0,19125	0,19389	0,18107	0,18168
0,12500	0,06669	0,25000	0,25682	0,25691	0,24990	0,25001
0,15625	0,07639	0,31250	0,30803	0,30600	0,31914	0,31879
0,18750	0,08519	0,37500	0,37318	0,36851	0,38502	0,38444
0,21875	0,09244	0,43750	0,41555	0,40922	0,43699	0,43621
0,25000	0,09753	0,50000	0,46200	0,45415	0,46778	0,46717
0,28125	0,10021	0,46875	0,45018	0,44334	0,46967	0,46910
0,31250	0,10071	0,43750	0,44362	0,43792	0,44699	0,44646
0,34375	0,09961	0,40625	0,41646	0,41287	0,41290	0,41256
0,37500	0,09755	0,37500	0,38401	0,38280	0,37434	0,37428
0,40625	0,09508	0,34375	0,33873	0,34033	0,34103	0,34144
0,43750	0,09274	0,31250	0,31626	0,31964	0,30473	0,30520
0,46875	0,09103	0,28125	0,28839	0,29362	0,27946	0,27998
0,50000	0,09040	0,25000	0,27274	0,27859	0,27103	0,27159
$\ Ax^{(n)} - \tilde{y}\ _m$			0,00102	0,00145	0,00011	0,00015
$\ x^{(n)}\ _m$			0,33540	0,33322	0,33792	0,33777
$\ x - x^{(n)}\ _m$			0,01794	0,02211	0,01267	0,01272

Количество итераций

26

11

42

17

В обоих случаях для решения задачи сведений об истокорпредставимости точного решения не потребовалось, т. к. здесь воспользовались правилом останова по невязке (18), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1,5\delta$. Итак, при $\delta = 10^{-3}$, $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-3}$ для достижения оптимальной точности при счете методом итераций (3) потребовалось 11 итераций, при счете методом Ландвебера [2] – 26 итераций. При $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-4}$, соответственно, потребовалось 17 и 42 итераций.

Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности метод итераций (4) требует примерно в 2,5 раза меньше итераций, чем метод простой итерации [2], что соответствует результатам раздела 3. Здесь также не потребовалось сведений об истокорпредставимости точного решения. Результаты счета приведены в таблице.

Графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (4) при $\delta = 10^{-4}$, приведены на рисунке.

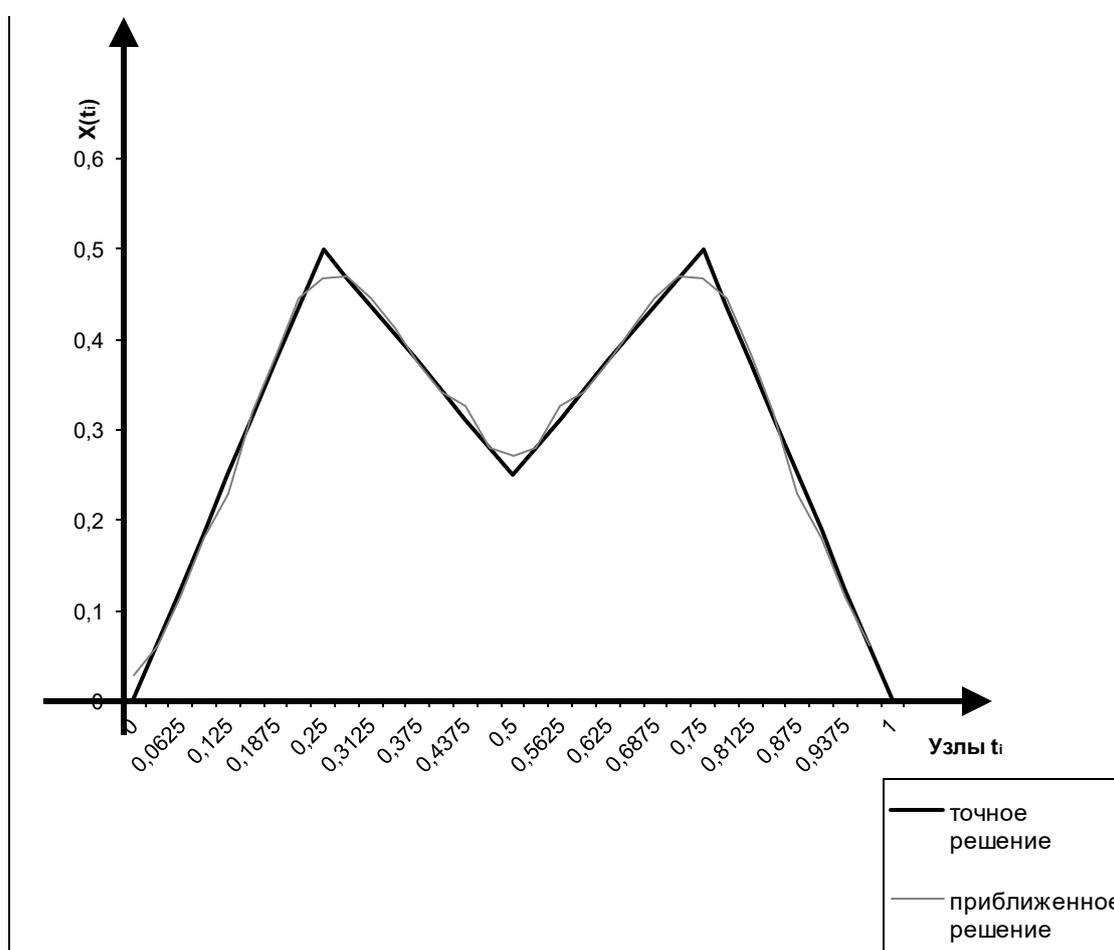


Рисунок – Графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (4) при $\delta = 10^{-4}$

Заключение

В настоящей статье изучены некоторые свойства предложенной явной схемы итераций решения некорректных задач:

1) доказана сходимость приближений с априорным и апостериорным выбором параметра регуляризации (останов по невязке) в исходной норме гильбертова про-

странства в случае ограниченного самосопряженного оператора, получены оценки погрешностей и оценки для моментов останова;

2) доказана сходимость метода в полунорме гильбертова пространства, и решена численная некорректная модельная задача.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.
2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
3. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
4. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
- 5 Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2008. – 196 с.
6. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.
7. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2014. – Nr 2 (116). – P. 89–95.
8. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.
9. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr 3. – P. 373–389.
10. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – Nr 2 (119). – P. 33–41.
11. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.
12. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr 416. – P. 1–12.

REFERENCES

- 1 Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.
2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
3. Yemielin, I. V. K tieorii niekorriektnykh zadach / I. V. Yemielin, M. A. Krasnosiel'skij // Dokl. AN SSSR. – 1979. – T. 244, № 4. – S. 805–808.
4. Samarskij, A. A. Chisliennyje metody rieshenija obratnykh zadach matiematichieskoj fiziki / A. A. Samarskij, P. N. Vabishchievich. – M. : Editorial URSS, 2004. – 480 s.
5. Савчук, В. Ф. Riegiularizacija opieratornykh uravnienij v gilbiertovom prostranstvie / V. F. Savchuk, O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2008. – 196 s.

6. Matysik, O. V. Javnyje i niejavyje iteracionnyje procedury rieshenija niekorriektno postavliennykh zadach / O. V. Matysik. – Brest : Brest. gos. un-t, 2014. – 213 s.

7. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2014. – Nr 2 (116). – P. 89–95.

8. Matysik, O. V. Iteracionnaja riegularizacija niekorriektnykh zadach / O. V. Matysik. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 s.

9. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr 3. – P. 373–389.

10. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – Nr 2 (119). – P. 33–41.

11. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.

12. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr 416. – P. 1–12.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 22.03.2024

УДК 519.652

Екатерина Ивановна Качаловская¹, Дмитрий Владимирович Грицук²
¹ст. преподаватель каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
²канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Ekaterina Kachalovskaya¹, Dmitry Gritsuk²
¹Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
of Brest State A. S. Pushkin University
²Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: ¹katerina.kulgun@gmail.com; ²dmitry.gritsuk@gmail.com

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Построены интерполяционные алгебраические матричные многочлены разных структур: Лагранжева, Ньютонова, Эрмитова, Эрмита – Биркгофа и других типов. Построена итерационная схема переменных направлений в реализации спектрального метода Чебышева для двумерного уравнения Пуассона. Выполнена итерационная реализация спектрального метода для двумерных эллиптических задач. Реализован спектральный метод Чебышева для двумерного уравнения Пуассона методом переменных направлений на GPU.

Ключевые слова: интерполирование, многочлен, матрица.

Spectral Methods of Variable Directions for Problems of Mathematical Physics

Interpolating algebraic matrix polynomials of different structures were constructed: Lagrange, Newton, Hermitian, Hermite – Birkhoff and other types. An iterative scheme of alternating directions has been constructed in the implementation of the Chebyshev spectral method for the two-dimensional Poisson equation. An iterative implementation of the spectral method for two-dimensional elliptic problems has been carried out. Implemented the Chebyshev spectral method for the two-dimensional Poisson equation using the alternating direction method on the GPU.

Key words: interpolation, polynomial, matrix.

Введение

Спектральные методы решения дифференциальных задач привлекают внимание с точки зрения высокой точности, которая во многих случаях сравнима с аналитическими подходами. Одна из наиболее серьезных проблем, связанная с практическим использованием данного класса методик, связана со сравнительно большими вычислительными затратами на их реализацию. Например, стандартное использование спектрального метода для многомерных задач со смешанными производными приводит к большим системам линейных алгебраических уравнений с полными матрицами. Из ряда возможных путей преодоления такого ряда трудностей можно отметить перспективность использования методов переменных направлений и других итерационных методов с переобусловливателями.

1. Алгебраическое интерполирование

В теории интерполирования функций скалярных аргументов построены интерполяционные многочлены относительно произвольных чебышевских систем функций и их частных случаев: тригонометрических, экспоненциальных, дробно-рациональных и других классов систем. Такого вида интерполяционные формулы, также как и формулы алгебраического типа, находят применение в ряде областей математики и ее приложений [1; 2].

При решении многих практических задач обычно используются интерполяционные формулы невысоких порядков. Это относится как к случаю интерполяции скалярных функций, так и к задаче операторного интерполирования и вызвано в значительной степени тем, что при увеличении порядка интерполяционных формул значительно усложняется их общий вид, что приводит, соответственно, к более сложной структуре получаемых на их основе алгоритмов.

Наряду с построением интерполяционных формул операторного интерполирования невысоких порядков является актуальным исследование данной задачи и для случая формул высших порядков.

Рассмотрим пространство $C^m[T]$ квадратных матриц $A(t) = [a_{ij}(t)]$, для которых производная $A^{(m)}(t) = [a_{ij}^{(m)}(t)]$ порядка m непрерывна на отрезке $[a, b]$ и матричный многочлен первой степени вида

$$P_1(A) = B + \sum_{j=0}^n A(t_j)C_j + \sum_{k=0}^m \int_T A^{(k)}(s)P_k(t,s)ds, \quad (1.1)$$

где t_0, t_1, \dots, t_n – фиксированные точки отрезка $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $B = B(t)$, $C_j = C_j(t) (j = \overline{0, n})$, $P_k(t, s) (k = \overline{0, m})$ – заданные матрицы той же размерности, что и матрица $A(t)$.

Пусть $F(A)$ – заданная на $C^m[T]$ функция матричного аргумента A . Имеет место следующая

Теорема 1.1 [3]. Для формулы

$$L_1(A) = F(A_0) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [A(t_i) - A_0(t_i)][A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} [F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] + \\ + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] d\tau, \quad (1.2)$$

где $A_0 = A_0(t)$, $A_1 = A_1(t)$ – узлы интерполирования,

$$\sigma_{1i}(t) = A_0(t) + A_1(t_i) - A_0(t_i), \quad (3)$$

$$H_i(t) = A(t) - A_0(t) - A(t_i) + A_0(t_i), \quad (1.4)$$

выполняются условия

$$L_1(A_i) = F(A_i) (i = \overline{0, 1}), \quad (1.5)$$

и она точна для матричных многочленов вида (1.1).

Если узлы интерполирования A_i имеют вид $A_i = H + \alpha_i I$, где $H = H(t)$ – фиксированная матрица, $\alpha_i = \alpha_i(t) (i = \overline{0, 1})$ – заданные числовые функции, причем $\alpha_0(t_i) \neq \alpha_1(t_i) (i = \overline{0, n})$, I – единичная матрица, то формула (2) примет вид

$$L_1(A) = F(A_0) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \frac{A(t_i) - A_0(t_i)}{\alpha_1(t_i) - \alpha_0(t_i)} [F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] + \\ + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] d\tau,$$

где

$$\sigma_{1i}(t) = A_0(t) + (\alpha_1(t_i) - \alpha_0(t_i))I = H(t) + (\alpha_0(t) + \alpha_1(t_i) - \alpha_0(t_i))I, \\ H_i(t) = A(t) - A(t_i) - H(t) + H(t_i) - (\alpha_0(t) - \alpha_0(t_i))I.$$

Построим аналогичную формулу второго порядка.

Рассмотрим матричные многочлены первой и второй степени вида

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1(A) = B + \sum_{j_1, j_2=0}^n C_{j_1 j_2} [A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})] D_{j_1 j_2} + \\ + \sum_{k=0}^m \int_{T^2} P_k(t, s_1, s_2) [A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)] Q_k(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2; \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2(A) = \tilde{P}_1(A) + \sum_{j=0}^n C_{3,j} [A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})] C_{4,j} [A(t_{j_3}) - A(t_{j_4})] C_{5,j} + \\ + \sum_{k=0}^m \int_{T^4} P_{k,3}(t, s) [A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)] P_{k,4}(t, s) [A^{(k)}(s_3) - A^{(k)}(s_4)] P_{k,5}(t, s) ds, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где t_0, t_1, \dots, t_n – те же фиксированные точки отрезка $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $B = B(t)$, $C_{j_1 j_2} = C_{j_1 j_2}(t)$, $D_{j_1 j_2} = D_{j_1 j_2}(t)$, $C_{i,j} = C_{i,j}(t)$ ($i = 3, 4, 5$), $(j, j_1, j_2, j_3, j_4 = \overline{0, n})$ – заданные фиксированные матрицы, $P_k(t, s_1, s_2)$, $Q_k(t, s_1, s_2)$, $P_{k,i}(t, s)$ ($i = 3, 4, 5$), $(k = \overline{0, m})$ – также заданные матрицы той же размерности, что и $A(t)$, а $s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$, $ds = ds_1 ds_2 ds_3 ds_4$.

Заметим, что формула (1.2) инвариантна также относительно многочленов вида (1.6). Действительно, очевидно, что $\sigma_{1i}(t_{j_1}) - \sigma_{1i}(t_{j_2}) = A_0(t_{j_1}) - A_0(t_{j_2})$ и $\sigma_{1i}^{(k)}(s_1) - \sigma_{1i}^{(k)}(s_2) = A_0^{(k)}(s_1) - A_0^{(k)}(s_2)$, поэтому для

$$F(A) = \sum_{j_1, j_2=0}^n C_{j_1 j_2} [A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})] D_{j_1 j_2} \quad (1.8)$$

и

$$F(A) = \sum_{k=0}^m \int_{T^2} P_k(t, s_1, s_2) [A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)] Q_k(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2 \quad (1.9)$$

при $i = 0, 1, \dots, n$ справедливы равенства $F(\sigma_{1i}) - F(A_0) = 0$.

Для функций (1.8), (1.9) и любых матриц $A(t)$ и $H(t)$ из пространства $C^m[T]$ по определению дифференциала Гато справедливы, соответственно, равенства

$$\delta F[A(\cdot); H(\cdot)] = \sum_{j_1, j_2=0}^n C_{j_1 j_2} [H(t_{j_1}) - H(t_{j_2})] D_{j_1 j_2}, \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \delta F[A(\cdot); H(\cdot)] = \\ = \sum_{k=0}^m \int_{T^2} P_k(t, s_1, s_2) [H^{(k)}(s_1) - H^{(k)}(s_2)] Q_k(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из (1.10) и (1.11) при $A(t) = \sigma_{1i}(t) + \tau(A_1(t) - \sigma_{1i}(t))$ и $H(t) = H_i(t)$ для функций (1.8), (1.9) будем иметь

$$\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] = F(A) - F(A_0).$$

Следовательно, $L_1(A) \equiv F(A)$ при $F(A) = \tilde{P}_1(A)$, т.е. формула (1.2) точна также и для многочленов первой степени вида (1.6).

Пусть $F(A)$ – функция от матриц, где $A \in C^m[a, b]$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} l_{21}(A) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [A(t_i) - A_1(t_i)] [A(t_i) - A_0(t_i)] [A_2(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} \times \\ \times \left([A_1(t_i) - A_2(t_i)]^{-1} [F(\sigma_{1i}^{21}) - F(A_2)] + [A_0(t_i) - A_1(t_i)]^{-1} [F(\sigma_{1i}^{01}) - F(A_0)] \right), \\ l_{22}(A) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \int_0^1 \tau \delta^2 F[\sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}^{01}(\cdot)) + \\ + \tau S(A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{12}(\cdot)); H_{i1}(\cdot) H_{i0}(\cdot)] d\tau ds, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $\sigma_{1i}^{01}(t) = \sigma_{1i}(t)$, $\sigma_{1i}^{12}(t) = A_1(t) + A_2(t_i) - A_1(t_i)$, $\sigma_{1i}^{21}(t) = A_2(t) + A_1(t_i) - A_2(t_i)$, $H_{i0}(t) = H_i(t)$, $H_{i1}(t) = A(t) - A_1(t) - A(t_i) + A_1(t_i)$, а функции $\sigma_{1i}(t)$ и $H_i(t)$, как и раньше, задаются формулами (1.3), (1.4).

Имеет место

Теорема 1.2. Если существуют матрицы $[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_2(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_1(t_i) - A_2(t_i)]^{-1}$ ($i = \overline{0, n}$), то для формулы

$$L_2(A) = L_1(A) + l_{21}(A) + l_{22}(A), \quad (1.13)$$

где $A_i = A_i(t)$ ($i = \overline{0, 2}$) – узлы интерполирования, $L_1(A)$ – многочлен, определенный формулой (1.2), выполняются условия

$$L_2(A_i) = F(A_i) (i = \overline{0, 2}), \quad (1.14)$$

и она инвариантна относительно матричных многочленов вида (1.7).

2. Сравнение сложности и реализация методов для решения двумерного уравнения Пуассона

2.1 Итерационная схема переменных направлений в реализации спектрального метода Чебышева для двумерного уравнения Пуассона

Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного уравнения Пуассона в прямоугольной области:

$$\frac{\partial}{\partial x} k(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y), \quad (2.1)$$

$$u(x = \pm 1, y) = u(x, y = \pm 1) = 0. \quad (2.2)$$

Полагаем, что коэффициенты уравнения (2.1) – достаточно гладкие функции, что допускает использование не дивергентной формы уравнения (2.1).

Для численного решения данной задачи используем спектральный метод на основе полиномов Чебышева [3]. На сетке чебышевских узлов

$$\omega_h = \left\{ (x_k, y_m), x_k = y_m = \cos \frac{k\pi}{N+1}, k = \overline{1, N}, m = \overline{1, N} \right\} \quad (2.3)$$

исходная дифференциальная задача (2.1) – (2.2) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$Ac = q, \quad (2.4)$$

где матрица A имеет вид:

$$A = K \cdot (I \otimes D^2 + D^2 \otimes I) + K_x \cdot I \otimes D + K_y \cdot D \otimes I.$$

Здесь D – матрица спектрального дифференцирования Чебышева размерности $N \times N$, учитывающая нулевые краевые условия [3; 4], I – единичная матрица такой же размерности, K, K_x, K_y – диагональные матрицы размерности $N^2 \times N^2$, содержащие значения функции $k(x, y)$ и ее частных производных по x и y соответственно в узлах сетки (2.3), упорядоченных по столбцам.

Для решения системы уравнений (2.4) используем итерационный метод бисопряженных градиентов. В рамках данного метода сравним два типа переобусловливателей, построенных на основе разностной аппроксимации дифференциального оператора задачи (2.1), (2.2) с постоянными коэффициентами матрицы A_{FD} . В первом случае для реализации двумерной сеточной задачи воспользуемся итерационным методом переменных направлений (ADI), а во втором случае – приближенным методом неполной LU факторизации (iLU). При решении задачи с переменными коэффициентами исходная матрица системы (2.4) масштабировалась с помощью диагональной матрицы коэффициентов задачи: $A = K^{-1} \cdot A$.

Отметим, что матрицы разностного и спектрального дифференцирования для задачи (2.1) – (2.2) с постоянными коэффициентами при любом сколь угодно большом количестве узлов сетки (2.3) удовлетворяет следующей оценке [5]:

$$1 \leq \|A_{FD}^{-1}A\| \leq \pi^2/4. \quad (2.5)$$

Оценка (2.5), согласно [6], позволяет рассматривать матрицу разностного дифференцирования A_{FD} в качестве спектрально-оптимального переобусловливателя для матриц спектрального дифференцирования A . Поскольку границы спектра переобусловленной матрицы равномерно ограничены по N , то количество итераций при использовании данного переобусловливателя не зависит от количества узлов сетки. Кроме того, компоненты аддитивного представления матрицы A_{FD} являются симметричными и перестановочными относительно умножения. В силу последнего обстоятельства данный тип переобусловливателя при обработке методом переменных направлений с оптимальным набором итерационных параметров обеспечивает эффективность, сопоставимую с алгоритмами быстрого дискретного преобразования Фурье [7].

Результаты численных экспериментов, касающиеся сравнения эффективности итерационных алгоритмов с использованием переобусловливателей на основе метода переменных направлений и неполной LU факторизации, представлены на рисунках 2.1, 2.2. Переменные коэффициенты задачи (2.1), (2.2) задавались в виде $k(x, y) = \exp(-s(x^2 + 2y^4)), f(x, y) = 1$.

Как видно из представленных результатов, схема переменных направлений обеспечивает существенные преимущества итерационного метода бисопряженных градиентов по сравнению с методом на основе неполной LU факторизации, при этом отмеченные преимущества возрастают с ростом количества узлов сетки N . Влияние неоднородности коэффициентов задачи на количество итераций достаточно хорошо компенсируется за счет соответствующего масштабирования системной матрицы (рисунок 2.2).

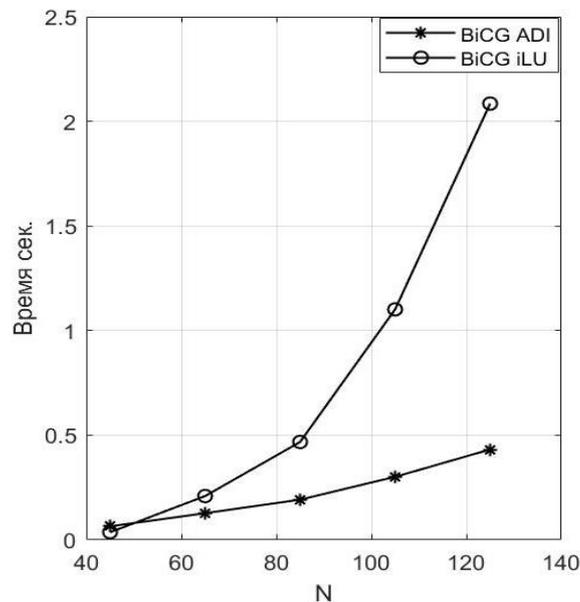


Рисунок 2.1 – Зависимость вычислительных затрат от размерности сетки при реализации задачи (2.1), (2.2) с переменными коэффициентами, $s = 1$

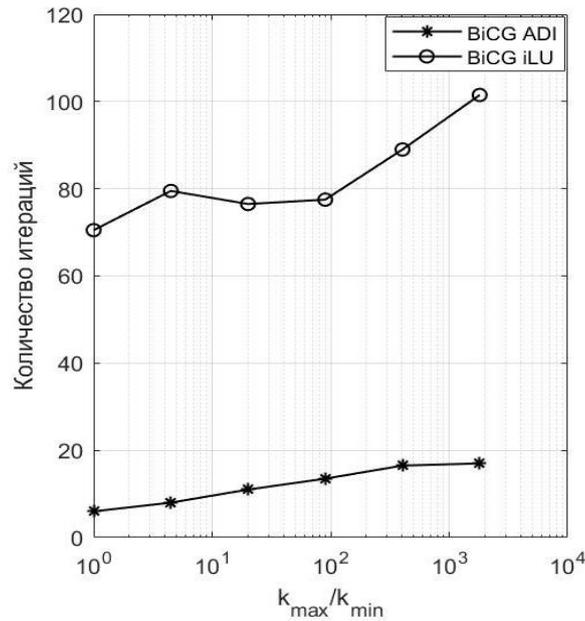


Рисунок 2.2 – Зависимость количества итераций от отношения максимального и минимального значений коэффициента задачи, $N = 85$

Замечание. Если вместо матрицы A_{FD} использовать матрицу на основе спектрального дифференцирования, то количество итераций в методе бисопряженных градиентов на основе неполной LU факторизации сокращается примерно вдвое, однако суммарные вычислительные затраты при этом возрастают за счет более полной матрицы переобусловливателя [8].

2.2 Об итерационной реализации спектрального метода для двумерных эллиптических задач

Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного эллиптического уравнения в прямоугольной области с переменными коэффициентами. В случае непрерывно дифференцируемых коэффициентов уравнение может быть представлено в не дивергентном виде:

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = -q(x, y), \tag{2.6}$$

$$u(x = \pm 1, y) = u(x, y = \pm 1) = 0. \tag{2.7}$$

Здесь $k = k(x, y) \in C^m, m \geq 1$.

Для численного решения данной задачи используем спектральный метод на основе полиномов Чебышева [3]. На сетке узлов

$$\omega_h = \left\{ (x_k, y_m), x_k = y_m = \cos \frac{k\pi}{N+1}, k = \overline{1, N}, m = \overline{1, N} \right\} \tag{2.8}$$

исходная дифференциальная задача (2.6) – (2.7) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида

$$AU = Q, \tag{2.9}$$

где $A \in R^{N^2 \times N^2}$ – квадратная матрица, имеющая блочную структуру, которая строится на основе матриц спектрального дифференцирования Чебышева с учетом краевых условий (2.7) [3], U и Q – векторы приближенного решения и правой части (2.6) соответственно в узлах сетки (2.8), упорядоченных по столбцам.

Для итерационной реализации (2.9) используем метод бисопрженных градиентов (стабилизированную версию) [4]. Предварительно отнормируем строки системы (2.9) на значения коэффициентов задачи $k(x, y)$ в соответствующих узлах сетки. В качестве переобусловливателя, который является спектрально оптимальным для матрицы второй спектральной производной с постоянными коэффициентами, используем матрицу второй разностной производной на множестве внутренних узлов сетки (2.8) [9]. Для обработки данного переобусловливателя используем итерационный метод переменных направлений (ADI) с оптимальным набором итерационных параметров [7].

Результаты численных экспериментов показывают высокую эффективность рассмотренного алгоритма. На рисунке 2.3 представлены зависимости количества итераций и удельного времени решения задачи (2.6), (2.7) от размерности сетки N . Количество итераций не превышает 13 и практически не зависит от размерности сетки, а вычислительные затраты вполне отвечают оптимальной вычислительной сложности [1].

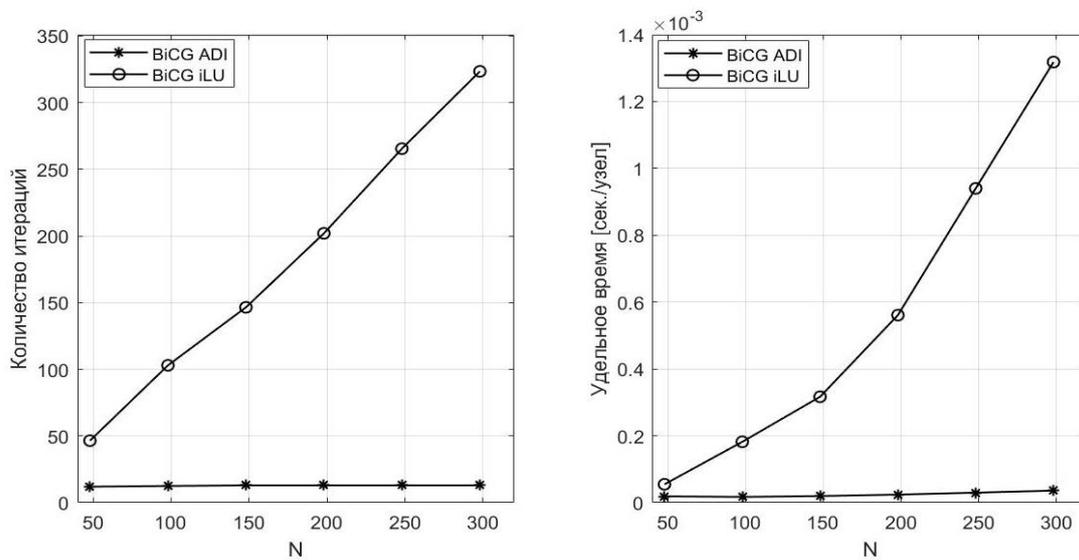


Рисунок 2.3 – Показатели эффективности итерационной реализации метода

Для сравнения на рисунке 2.3 приведены аналогичные показатели итерационного метода с переобусловливателем на основе неполной LU факторизации (iLU).

2.3 Особенности реализации спектрального метода Чебышева для двумерного уравнения Пуассона методом переменных направлений на GPU

Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного уравнения Пуассона в прямоугольной области:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = q(x, y), \quad (2.10)$$

$$u(x = \pm 1, y) = u(x, y = \pm 1) = 0. \quad (2.11)$$

Для численного решения данной задачи используем спектральный метод на основе полиномов Чебышева [3]. На сетке узлов

$$\omega_h = \left\{ (x_k, y_m), x_k = y_m = \cos \frac{k\pi}{N+1}, k = \overline{1, N}, m = \overline{1, N} \right\} \quad (2.12)$$

исходная дифференциальная задача (2.10) – (2.11) сводится к решению системы матричных уравнений вида

$$UA^T + AU = Q. \quad (2.13)$$

Здесь U – двумерный массив (матрица) приближенных значений решения задачи (2.10), (2.11) в узлах сетки (2.12), $A \in R^{N \times N}$ – матрица спектрального дифференцирования Чебышева второго порядка [3; 4], в которой удалены первые и последние строки и столбцы согласно однородным краевым условиям (2.11).

Первое и второе слагаемые в левой части (2.13) отвечают применению матрицы спектрального дифференцирования A к строкам и столбцам массива U , что определяет дифференцирование по x и y соответственно.

Итерационный алгоритм переменных направлений для решения системы (2.13) имеет вид [7]:

$$\begin{aligned} (\omega_{k+1}E + A)U_{k+1/2}^T &= U_k(\omega_{k+1}E - A)^T + Q^T, \\ (\omega_{k+1}E + A)U_{k+1} &= (\omega_{k+1}E - A)U_{k+1/2} + Q, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где итерационные параметры ω_k , $k = \overline{1, K}$, вычисляются по известным формулам [7, с. 438], $K = \pi^{-2} \ln(4/\eta) \ln(4\varepsilon^{-1})$, $\eta = \lambda \min_{max} \lambda \max_{min} \varepsilon$ – требуемая точность.

Вычислительная сложность (2.14) определяется необходимостью решения на каждой итерации систем линейных алгебраических уравнений с матрицей $C_k = \omega_{k+1}E + A$, что требует порядка $O(N^3)$ арифметических операций. Учитывая, что количество итераций K имеет логарифмическую зависимость от числа обусловленности матрицы [7], а число обусловленности, в свою очередь, имеет степенную зависимость от размерности матрицы N [6], вычислительная сложность метода переменных направлений (2.14) имеет порядок $O(N^3 \ln(N))$.

Результаты численных экспериментов показывают, что временные затраты на реализацию алгоритма не всегда пропорциональны вычислительной сложности. Они зависят также от вычислительной платформы, на которой выполняются вычисления. На рисунке 2.4а представлены результаты численной оценки удельных временных затрат на один узел сетки при расчетах на центральном процессоре (CPU – Intel Core™ i5-6200) и графическом (GPU – GeForce 940MX).

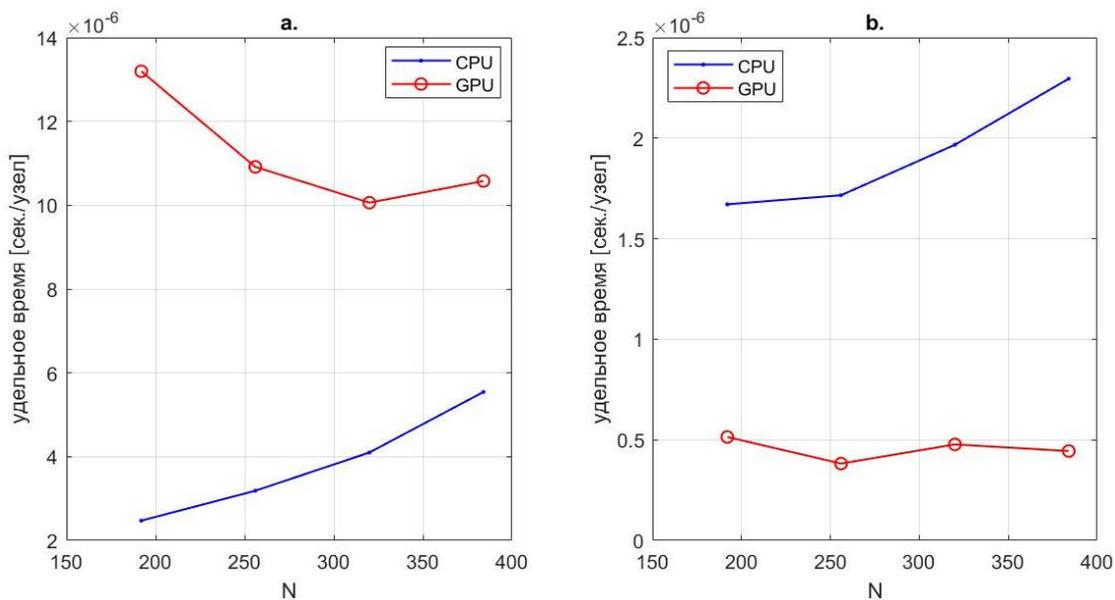


Рисунок 2.4 – Удельные временные затраты на реализацию итерационного алгоритма (2.14) с двойной точностью – а и одинарной точностью при постоянном итерационном параметре – б

Вычисления проводились для полностью векторизованного алгоритма в среде Матлаб с двойной точностью. Как видно из рисунка, при вычислениях на CPU удельные временные затраты согласуются с оценкой вычислительной сложности. В то же время при использовании GPU для размерности сетки $N = 150 \div 300$ наблюдается аномальное снижение удельных временных затрат с ростом N , что можно объяснить повышением производительности GPU при обработке больших массивов данных.

Несложно видеть также, что в целом производительность GPU при реализации алгоритма с двойной точностью в диапазоне $N = 150 \div 400$ оказывается как минимум вдвое меньше по сравнению с производительностью CPU.

Для повышения эффективности реализации можно предложить модифицированный алгоритм с постоянным итерационным параметром. При этом количество итераций для достижения заданной точности возрастает примерно вдвое. Однако в этом случае матрицы $C_k = \omega_{k+1}E + A = C$ и $S_k = \omega_{k+1}E - A = S$ не меняются от итерации к итерации и могут быть вычислены один раз перед итерационным циклом. Более того, вместо решения на каждой итерации систем линейных алгебраических уравнений можно один раз обратить матрицу C и использовать далее при реализации матричное умножение. Последнее не снижает вычислительную сложность алгоритма, но позволяет снизить вычислительные затраты благодаря возможности перехода на вычисления с одинарной точностью.

Результаты численного эксперимента для случая одинарной точности с постоянным итерационным параметром представлены на рисунке 1b. Как видно из рисунка, предложенная модификация позволяет многократно повысить эффективность вычислений на GPU. Использование одинарной точности для реализации (2.14) невозможно из-за высокой вычислительной погрешности [11]. В предложенном алгоритме данная погрешность была порядка $10^{-5} \div 10^{-4}$ [12].

Заклучение

При решении многих практических задач обычно используются интерполяционные формулы невысоких порядков. Это относится как к случаю интерполяции скалярных функций, так и к задаче операторного интерполирования и вызвано в значительной степени тем, что при увеличении порядка интерполяционных формул, значительно усложняется их общий вид, что приводит, соответственно, к более сложной структуре получаемых на их основе алгоритмов. Наряду с построением интерполяционных формул операторного интерполирования невысоких порядков является актуальным исследование данной задачи и для случая формул высших порядков.

Построены интерполяционные алгебраические матричные многочлены разных структур: Лагранжева, Ньютонова, Эрмитова, Эрмита – Биркгофа и других типов. Также выполнено построение итерационной схемы переменных направлений в реализации спектрального метода Чебышева для двумерного уравнения Пуассона, выполнена итерационная реализация спектрального метода для двумерных эллиптических задач и реализован спектральный метод Чебышева для двумерного уравнения Пуассона методом переменных направлений на GPU.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. – 2-е изд. – М. : Наука, 1975. – 632 с.

3. Weideman, J. A. A MATLAB differentiation matrix suite / J. A. Weideman, S. C. Reddy // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). – 2000. – Т. 26, nr 4. – P. 465–519.
4. Orszag, S. A. Spectral methods for problems in complex geometrics / S. A. Orszag // Numerical methods for partial differential equations. – Academic Press, 1979. – P. 273–305.
5. Дьяконов, Е. Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач / Е. Г. Дьяконов. – М. : Наука, 1989. – 272 с.
6. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев – М. : Наука, 1978. – 532 с.
7. Кульгун, Е. И. Итерационная схема переменных направлений в реализации спектрального метода Чебышева для двумерного уравнения Пуассона / Е. И. Кульгун // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 23–24 апр. 2020 г. / Брест. гос. ун-т. – Брест, 2020. – С. 74–76.
8. Van der Vorst, H. A. BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems / H. A. Van der Vorst // SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1992, – Vol. 13, nr 2. – P. 631–644.
9. Волков, В. М. Об итерационной реализации спектрального метода для двумерных эллиптических задач / В. М. Волков, Е. И. Мацулевич // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы X респ. науч.-практ. конф., Брест, 22 окт. 2021 г. / Брест. гос. ун-т. – Брест, 2021.
10. Абрашин, В. Н. О вычислительной погрешности векторно-аддитивных итерационных методов / В. Н. Абрашин, В. М. Волков, Н. Г. Жадаева // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 990–993.
11. Кульгун, Е. И. Особенности реализации спектрального метода Чебышева для двумерного уравнения Пуассона методом переменных направлений на GPU / Е. И. Кульгун В. М. Волков, Е. В. Проконина // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 23–24 апр. 2021 г. / Брест. гос. ун-т. – Брест, 2021. – С. 12.
12. Boyd, J. P. Chebyshev and Fourier spectral methods / J. P. Boyd. – New York : DOVER Publications, 2000. – 594 p.

REFERENCES

1. Kalitkin, N. N. Chisliennyje metody / N. N. Kalitkin. – М. : Nauka, 1978. – 512 s.
2. Bakhvalov, N. S. Chisliennyje metody / N. S. Bakhvalov. – 2-je izd. – М. : Nauka, 1975. – 632 s.
3. Weideman, J. A. A MATLAB differentiation matrix suite / J. A. Weideman, S. C. Reddy // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). – 2000. – Т. 26, nr 4. – P. 465–519.
4. Orszag, S. A. Spectral methods for problems in complex geometrics / S. A. Orszag // Numerical methods for partial differential equations. – Academic Press, 1979. – P. 273–305.
5. D'jakonov, Ye. G. Minimizacija vychislitel'noj raboty. Asimptoticheski optimal'nyje algoritmy dla elliptichieskikh zadach / Ye. G. D'jakonov. – М. : Nauka, 1989. – 272 s.
6. Samarskij, A. A. Metody reshenija setochnykh uravnenij / A. A. Samarskij, Ye. S. Nikolajev. – М. : Nauka, 1978. – 532 s.
7. Kul'gun, Ye. I. Iteracionnaja skhema pieriemiennykh napravlenij v riezalizacii spiektral'nogo metoda Chiebysheva dla dvumiernogo uravnenija Puassona /

Ye. I. Kul'gun // Matematichieskoje modelirovanije i novyje obhazovatel'nyje tiekhnologii v matematikie : materialy resp. nauch.-prakt. konf., Brest, 23–24 apr. 2020 g. / Brest. gos. un-t. – Brest, 2020. – S. 74–76.

8. Van der Vorst, H. A. BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems / H. A. Van der Vorst // SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1992, – Vol. 13, nr 2. – P. 631–644.

9. Volkov, V. M. Ob iteracionnoj riezalizacii spiektral'nogo mietoda dlja dvumiernykh elliptichieskikh zadach / V. M. Volkov, Ye. I. Maculievich // Vychislitel'nyje mietody, modeli i obrazovatel'nyje tiekhnologii : materialy X resp. nauch.-prakt. konf., Brest, 22 okt. 2021 g. / Brest. gos. un-t. – Brest, 2021.

10. Abrashin, V. N. O vychislitel'noj pogrieshnosti vektorno-additivnykh iteracionnykh mietodov / V. N. Abrashin, V. M. Volkov, N. G. Zhadajeva // Diffierenc. uravnienija. – 2005. – T. 41, nr 7. – S. 990–993.

11. Kul'gun, Ye. I. Osobiennosti riezalizacii spiektral'nogo mietoda Chiebysheva dlja dvumiernogo uravnienija Puassona mietodom pieriemienykh napravlienij na GPU / Ye. I. Kul'gun, V. M. Volkov, E. V. Prokonina, // Matematichieskoje modelirovanije i novyje obrazovatel'nyje tiekhnologii v matematikie : materialy resp. nauch.-prakt. konf., Brest, 23–24 apr. 2021 g. / Brest. gos. un-t. – Brest, 2021. – S. 12.

12. Boyd, J. P. Chebyshev and Fourier spectral methods / J. P. Boyd. – New York : DOVER Publications, 2000. – 594 p.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 12.04.2024

УДК 517.9

Марина Геннадьевна Кот*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. фундаментальной математики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Marina Kot***Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of Department of Fundamental Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University**e-mail: mtorkaylo@mail.ru***РЕЗОЛЬВЕНТНАЯ СХОДИМОСТЬ ОПЕРАТОРОВ,
АППРОКСИМИРУЮЩИХ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ
С ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Уравнения и системы, записываемые в виде $L_0 u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$, возникают в разных приложениях и интенсивно изучаются. Входящее в это уравнение произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций, поэтому одной из основных задач является придание смысла выражению в левой части уравнения, т. е. фактически построение оператора, который соответствует данному формальному выражению. Это достигается с помощью специальных аппроксимаций оператора умножения на δ -функцию. Для исследования уравнений с δ -образными коэффициентами применяется подход, основные этапы которого: построение аппроксимаций рассматриваемого выражения с помощью операторов конечного ранга; нахождение явного вида резольвенты аппроксимирующего семейства; нахождение предела резольвенты и выделение случаев резонанса, когда предельный оператор не совпадает с $-\Delta$; описание спектра построенных предельных операторов; исследование поведения собственных значений аппроксимирующих операторов. Цель данной работы заключается в нахождении предела резольвенты и выделении случаев резонанса.

Ключевые слова: обобщенная функция, асимптотика, резонанс, оператор.

Resolvent Convergence of Operators Approximating a System of Equations with Delta-Shaped Coefficients

The equations can be written as $L_0 u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$, there are in different applications and studied intensively. In this equation work δu not determined in the classical theory of generalized functions, so one of the main objectives is to give meaning to the expression on the left side of the equation, that is, the actual construction of the operator, which corresponds to a given formal expression. This is achieved by special approximations multiplication by δ -function. For the study of equations with δ -shaped coefficients an approach is used, the main steps of which are: the construction of approximations considered expressions with operators of finite rank; finding the explicit form approximating the resolvent family; resolvent limit of determination and allocation of cases of resonance; description of the spectrum constructed limit operators; study of the behavior of the eigenvalues of approximating operators. The purpose of this work is to find the limit of the resolvent and highlight cases of resonance.

Key words: generalized function, asymptotic behavior, resonance, operator.

Введение

Уравнения, записываемые в виде

$$L_0 u = -\Delta u + a(\varepsilon)\delta u = f, \quad (1)$$

где δ есть δ -функция Дирака, возникают в разных приложениях [1] и интенсивно изучаются. Входящее в (1) произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций, поэтому одной из основных задач является придание смысла выражению в левой части (1), т. е. фактически построение оператора, соответствующего формальному выражению (1).

Один из основных подходов к определению понятия решения уравнения и построению таких решений основан на аппроксимации выражения в левой части (1) семейством корректно заданных операторов L_ε и затем нахождении предела резольвент

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (L_\varepsilon - \lambda)^{-1} := R(\lambda).$$

Если такой предел существует, то операторно-значная функция $R(\lambda)$ оказывается резольвентой некоторого оператора, который соответствует рассматриваемой аппроксимации формального выражения. В случае операторов в пространстве $L_2(R^3)$ скалярных функций было обнаружено, что в типичных случаях $R_0(\lambda)$ есть резольвента невозмущенного оператора $R_0(\lambda) = (-\Delta - \lambda I)^{-1}$, но возможны случаи *резонанса*, когда $R_0(\lambda)$ есть резольвента некоторого оператора, отличного от $-\Delta$. Резольвента $R_0(\lambda)$ действует по формуле

$$R_0(\lambda)f = E_\lambda * f,$$

где $*$ – свертка функций, а $E_\lambda(x)$ – фундаментальное решение для оператора $-\Delta u - \lambda u$, заданное формулой

$$E_\lambda(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|} e^{-\mu\|x\|},$$

где $\mu^2 = -\lambda$, $\operatorname{Re} \mu > 0$. Отметим, что $E_\lambda \in L_2(R^3)$.

Спектр оператора $-\Delta$ есть положительная полупрямая, причем спектр не содержит собственных значений. А у предельных операторов, отличных от $-\Delta$, имеется одно собственное значение. У аппроксимирующего оператора L_ε спектр может содержать (в зависимости от выбранного способа аппроксимации) конечный или даже бесконечный набор собственных значений. Поэтому общая задача заключается в описании поведения собственных значений аппроксимирующих операторов и выяснении того, как в пределе из них получается одно собственное значение.

Анализ систем уравнений обычно оказывается более сложным по сравнению с анализом одного уравнения и содержит большее число возможных вариантов.

Целью работы является исследование в пространстве вектор-функций $L_2(R^3)^2$ системы уравнений (1), где $u = (u_1, u_2)$, а коэффициент является матрицей вида

$$a(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & a_1(\varepsilon) \\ a_2(\varepsilon) & 0 \end{pmatrix}.$$

Специальный вид матрицы коэффициентов соответствует тому, что в рассматриваемой системе вторая компонента воздействует на первую, а первая воздействует на вторую. Заметим, что системы с такими матрицами коэффициентов возникают в квантовой механике.

Основная часть

Наиболее простыми являются аппроксимации с помощью операторов конечного ранга. Мы применяем подход, развитый в [2; 3] для исследования уравнений с δ -образными коэффициентами. Основные этапы этого подхода: построение аппроксимаций рассматриваемого выражения операторами конечного ранга; нахождение

явного вида резольвенты аппроксимирующего семейства; нахождение предела резольвенты и выделение случаев резонанса; описание спектра построенных предельных операторов; исследование поведения собственных значений аппроксимирующих операторов. В данной работе рассматриваются первые три этапа вышеизложенного подхода.

1. Построение аппроксимации

Мы рассматриваем формальную систему

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + a_1(\varepsilon)\delta u_2 &= f_1, \\ -\Delta u_2 + a_2(\varepsilon)\delta u_1 &= f_2. \end{aligned}$$

Пусть φ – финитная функция из пространства Шварца $D(R^3)$ [4], такая что $\int \varphi(x)dx = 1$. Тогда семейство гладких функций $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ задает аппроксимацию δ -функции как элемента пространства обобщенных функций, а семейство функционалов $\Phi_\varepsilon(u) = \int u(x)\varphi_\varepsilon(x)dx$ – аппроксимацию δ -функции как функционала. Поэтому для гладких функций u имеем $\Phi_\varepsilon(u)\varphi_\varepsilon \rightarrow u(0)\delta = \delta u$ [3], т. е. на гладких функциях семейство операторов $\Phi_\varepsilon(u)\varphi_\varepsilon$ сходится к произведению δu .

Таким образом, оператор

$$L_\varepsilon u = -\Delta u + a(\varepsilon) \int u(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x) \tag{2}$$

задает аппроксимацию формального выражения $-\Delta u + a(\varepsilon)\delta u$ в покоординатной записи это семейство имеет вид

$$L_\varepsilon(u)_1 = -\Delta u_1 + a_1(\varepsilon) \int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x), \tag{3}$$

$$L_\varepsilon(u)_2 = -\Delta u_2 + a_2(\varepsilon) \int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x). \tag{4}$$

Задача заключается в исследовании поведения решений уравнения $(L_\varepsilon - \lambda)u = f$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Резольвента аппроксимирующих операторов

При фиксированном $\varepsilon > 0$ найдем для данных аппроксимаций такие решения непосредственно, т. е. построим резольвенту $(L_\varepsilon - \lambda)^{-1} f = u$ и найдем, для каких λ она определена.

Лемма. Резольвента $(L_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ аппроксимирующего семейства $L_\varepsilon(u)$ записывается в виде

$$(L_\varepsilon - \lambda)^{-1} = R_0(\lambda)f - S(\varepsilon, \lambda) \cdot \tilde{f} \cdot (R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x), \tag{5}$$

где

$$R_0(\lambda)f = \begin{bmatrix} R_0(\lambda)f_1 \\ R_0(\lambda)f_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}_1 = \int (R_0(\lambda)f_2)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy, \quad \tilde{f}_2 = \int (R_0(\lambda)f_1)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$

и $S(\varepsilon, \lambda)$ есть матрица вида

$$S(\varepsilon, \lambda) = \frac{1}{1 - a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b^2(\varepsilon, \lambda)} \begin{bmatrix} a_1(\varepsilon) & -a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda) \\ -a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda) & a_2(\varepsilon) \end{bmatrix},$$

$$b(\varepsilon, \lambda) = \int (R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy. \tag{6}$$

Резольвента определена, если: $\lambda \notin R^+$ и $1 - a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b^2(\varepsilon, \lambda) \neq 0$.

Доказательство.

Построение резольвенты эквивалентно нахождению решения системы

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 - \lambda u_1 + a_1(\varepsilon) \int u_2(y) \varphi_\varepsilon(y) dy \varphi_\varepsilon(x) &= f_1, \\ -\Delta u_2 - \lambda u_2 + a_2(\varepsilon) \int u_1(y) \varphi_\varepsilon(y) dy \varphi_\varepsilon(x) &= f_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Из системы (7) получаем, если решение существует, то оно имеет вид

$$\begin{aligned} u_1(x) &= R_\lambda f_1 - C_1(\varepsilon)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x), \\ u_2(x) &= R_\lambda f_2 - C_2(\varepsilon)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x); \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} C_1(\varepsilon) &= a_1(\varepsilon) \int u_2(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\ C_2(\varepsilon) &= a_2(\varepsilon) \int u_1(y) \varphi_\varepsilon(y) dy. \end{aligned} \quad (9)$$

Преобразовав выражения, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1(\varepsilon) + a_1(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_2(\varepsilon) = a_1(\varepsilon)\tilde{f}_1, \\ a_2(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_1(\varepsilon) + C_2(\varepsilon) = a_2(\varepsilon)\tilde{f}_2, \end{cases}$$

где

$$\tilde{f}_1 = \int (R_0(\lambda)f_2)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy, \quad \tilde{f}_2 = \int (R_0(\lambda)f_1)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy$$

и $b(\varepsilon, \lambda)$ задается формулой (6).

Система имеет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1(\varepsilon)} & b(\varepsilon, \lambda) \\ b(\varepsilon, \lambda) & \frac{1}{a_2(\varepsilon)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(\varepsilon) \\ C_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix}.$$

Поэтому если $\det \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1(\varepsilon)} & b(\varepsilon, \lambda) \\ b(\varepsilon, \lambda) & \frac{1}{a_2(\varepsilon)} \end{bmatrix} \neq 0$, то $\begin{bmatrix} C_1(\varepsilon) \\ C_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1(\varepsilon)} & b(\varepsilon, \lambda) \\ b(\varepsilon, \lambda) & \frac{1}{a_2(\varepsilon)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix}$.

Выполнив все необходимые вычисления, получаем

$$\begin{bmatrix} C_1(\varepsilon) \\ C_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon, \lambda) \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{a_2(\varepsilon)} & -b(\varepsilon, \lambda) \\ -b(\varepsilon, \lambda) & \frac{1}{a_1(\varepsilon)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, решение (8) представляется в виде

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0(\lambda)f_1 \\ R_0(\lambda)f_2 \end{bmatrix} - S(\varepsilon, \lambda) \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix} (R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x),$$

что эквивалентно (5). Лемма доказана.

3. Предел резольвент

Основной задачей является исследование поведения построенных резольвент (8) при $\varepsilon \rightarrow 0$. В полученное выражение входят величины, имеющие вид и поведение, аналогичные скалярному случаю. Пусть

$$(u_0^1, u_0^2) = (E_\lambda * f_1, E_\lambda * f_2).$$

Тогда

$$\tilde{f}_1(\varepsilon) \rightarrow u_0^2(0), \quad \tilde{f}_2(\varepsilon) \rightarrow u_0^1(0).$$

Кроме того, известно, что $E_\lambda(\varepsilon) = E_\lambda * \varphi_\varepsilon \rightarrow E_\lambda$, причем сходимость имеет место не только в смысле обобщенных функций, но и в $L_2(R^3)$.

Из существования указанных пределов получаем, что нахождение предела резольвент сводится к нахождению предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(\varepsilon, \lambda) := D(\lambda) \quad (10)$$

и предел резольвент имеет вид

$$R(\lambda) = R_0(\lambda)f - D(\lambda) \begin{bmatrix} u_0^2(0) \\ u_0^1(0) \end{bmatrix} \cdot E(\lambda).$$

В трехмерном случае для величины (6) имеет место разложение [3]

$$b(\varepsilon, \lambda) = M \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\mu}{4\pi} + o(\varepsilon),$$

где

$$M(\varepsilon, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \int \left(\int \varphi(y) \bar{\varphi}(x-y) dy \right) \frac{1}{\|x\|} dx.$$

Задача заключается в том, чтобы выяснить, для каких коэффициентов $a(\varepsilon)$ существует ненулевой предел (10), и найти этот предел.

Рассмотрим коэффициенты $a_1(\varepsilon)$ и $a_2(\varepsilon)$, для которых обратные величины имеют вид

$$\frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-2}^1 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + o(\varepsilon), \quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + o(\varepsilon). \quad (11)$$

В скалярном случае наиболее содержательные результаты имеют место именно для коэффициентов такого вида.

Теорема. Для коэффициентов $a_1(\varepsilon)$ и $a_2(\varepsilon)$ вида (11) предел $D(\lambda)$ может быть ненулевым только в трех случаях:

$$1) \quad \frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_0^1 + k_{-1}^1 \varepsilon + k_{-2}^1 \varepsilon^2 + o(\varepsilon), \quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + o(\varepsilon),$$

т. е. $k_{-2}^1 = 0, k_{-1}^1 = 0$.

Тогда

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{k_{-2}^2}{k_0^1 k_{-2}^2 - M^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

если $k_0^1 k_{-2}^2 - M^2 \neq 0$.

В случае, когда $k_0^1 k_{-2}^2 = M^2$, предел (10) равен бесконечности.

$$2) \frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + k_1^1 \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + k_1^2 \varepsilon + o(\varepsilon),$$

т. е. $k_{-2}^1 = 0, k_{-2}^2 = 0$ и при этом выполнено условие резонанса $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M^2$.

Тогда

$$D(\lambda) = \frac{1}{k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + \frac{M\mu}{2\pi}} \begin{bmatrix} k_{-1}^2 & -M \\ -M & k_{-1}^1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

$$3) \frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-2}^1 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + o(\varepsilon), \quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_0^2 + k_1^2 \varepsilon + k_2^2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon),$$

т. е. $k_{-2}^2 = 0, k_{-1}^2 = 0$.

Тогда

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{-2}^1}{k_0^2 k_{-2}^1 - M^2} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

если $k_0^2 k_{-2}^1 - M^2 \neq 0$.

В случае, когда $k_0^2 k_{-2}^1 = M^2$, предел (10) равен бесконечности. Для всех остальных коэффициентов вида (11) предел (10) нулевой.

Доказательство.

Запишем $S(\varepsilon, \lambda)$ в виде

$$S(\varepsilon, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_2(\varepsilon)} & -b(\varepsilon, \lambda) \\ \frac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon, \lambda) & \frac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} \\ -b(\varepsilon, \lambda) & \frac{1}{a_1(\varepsilon)} \\ \frac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon, \lambda) & \frac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Согласно (11)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} &= k_{-2}^1 k_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^4} + (k_{-2}^1 k_{-1}^2 + k_{-1}^1 k_{-2}^2) \frac{1}{\varepsilon^3} + (k_{-2}^1 k_0^2 + k_{-1}^1 k_{-1}^2 + k_0^1 k_{-2}^2) \frac{1}{\varepsilon^2} + \\ &+ (k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2) \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 k_0^2 + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

$$b^2(\varepsilon, \lambda) = M^2 \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{M\mu}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\mu^2}{16\pi^2}.$$

Знаменатель запишется в виде

$$\frac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon, \lambda) = k_{-2}^1 k_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^4} + (k_{-2}^1 k_{-1}^2 + k_{-1}^1 k_{-2}^2) \frac{1}{\varepsilon^3} + (k_{-2}^1 k_0^2 + k_{-1}^1 k_{-1}^2 + k_0^1 k_{-2}^2 - M^2) \frac{1}{\varepsilon^2} + \\ + \left(k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + \frac{M\mu}{2\pi} \right) \frac{1}{\varepsilon} + (k_0^1 k_0^2 - \frac{\mu^2}{16\pi}) + o(\varepsilon).$$

Получаем, что для существования ненулевого предела (10) необходимо, чтобы хотя бы один из элементов матрицы при разложении по степеням ε в числителе и знаменателе имел одинаковую степень.

В общем случае разложение числителя имеет степень $\frac{1}{\varepsilon^2}$, а знаменателя — $\frac{1}{\varepsilon^4}$. Предел (10) в этом случае равен нулю. Для того, чтобы существовал ненулевой предел, необходимо, чтобы коэффициенты при $\frac{1}{\varepsilon^4}$ и $\frac{1}{\varepsilon^3}$ были равны нулю.

$$\begin{cases} k_{-2}^1 k_{-2}^2 = 0, \\ k_{-2}^1 k_{-1}^2 + k_{-1}^1 k_{-2}^2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим три случая.

$$1) \quad \begin{cases} k_{-2}^1 = 0, \\ k_{-1}^1 = 0. \end{cases}$$

Степени числителя и знаменателя равны, тогда существует конечный ненулевой предел (12) если $k_0^1 k_{-2}^2 - M^2 \neq 0$.

$$2) \quad \begin{cases} k_{-2}^1 = 0, \\ k_{-2}^2 = 0. \end{cases}$$

Степень числителя меньше степени знаменателя, таким образом, необходимо, чтобы коэффициент при $\frac{1}{\varepsilon^2}$ был равен нулю. Следовательно, для того, чтобы существовал ненулевой предел необходимо выполнение условия резонанса $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M^2$, и тогда справедливо (13).

Таким образом, при данном виде величин $a_1(\varepsilon)$ и $a_2(\varepsilon)$, получили условия резонанса, аналогичные условиям в скалярном случае.

$$3) \quad \begin{cases} k_{-2}^2 = 0, \\ k_{-1}^2 = 0. \end{cases}$$

Аналогично случаю 1) получаем, что если $k_0^2 k_{-2}^1 - M^2 \neq 0$, то имеет место (14).

Теорема доказана.

Из пунктов 1) и 3) вышеизложенного доказательства видно, что при анализе системы возникают случаи, когда предел $D(\lambda)$ равен бесконечности, т. е. предел резольвент не существует. Таким образом, в векторном случае появляются ситуации, которые не встречались в скалярном случае.

В терминах исходных коэффициентов случай 1) соответствует коэффициентам вида

$$a_1(\varepsilon) = a_0^1 + a_1^1 \varepsilon + a_2^1 \varepsilon^2 + o(\varepsilon), \quad a_2(\varepsilon) = a_2^2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon),$$

случай 2) –

$$a_1(\varepsilon) = a_1^1 \varepsilon + a_2^1 \varepsilon^2 + o(\varepsilon), \quad a_2(\varepsilon) = a_1^2 \varepsilon + a_2^2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon),$$

а случай 3) – коэффициентам вида

$$a_1(\varepsilon) = a_2^1 \varepsilon^2 + o(\varepsilon), \quad a_2(\varepsilon) = a_0^2 + a_1^2 \varepsilon + a_2^2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon).$$

Заклучение

Таким образом, построена резольвента, аппроксимирующая выражение вида (1), рассмотрены всевозможные случаи резонанса и в каждом из них найден предел резольвенты в явном виде.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио [и др.] ; пер. с англ. В. А. Гейлера [и др.]. – М. : Мир, 1991. – 566 с.
2. Антоневич, А. Б. Аппроксимации операторов с дельта-образными коэффициентами / А. Б. Антоневич, Т. А. Романчук // Актуальные проблемы математики : сб. науч. тр. ГрГУ им. Я. Купалы / редкол.: Е. А. Ровба [и др.]. – Гродно, 2008. – С. 11–28.
3. Антоневич, А. Б. Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций / А. Б. Антоневич, Т. А. Романчук // LAPLAMBERT. – Саарбрюккен, 2012. – 137 с.
4. Березин, Ф. А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 137, № 5. – С. 1011–1014.
5. Кот, М. Г. О резольвентной сходимости операторов, аппроксимирующих систему уравнений с δ -образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вестн. БГУ. Физика. Математика. Информатика. – 2015. – № 1. – С. 111–117.
6. Кот, М. Г. Асимптотика собственных вектор-функций операторов, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с δ -образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вестн. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. фв.-мат. наук. – 2017. – № 3. – С. 15–26.
7. Романчук, Т. А. Явление резонанса для матрично-значных функций // Вестн. НАН Беларуси. Сер. фв.-мат. наук. – 2008. – № 2. – С. 8–16.
8. Кащенко, И. С. Асимптотическое разложение решений уравнений : метод. указания / И. С. Кащенко. – Ярославль : ЯрГУ, 2011. – 44 с.

REFERENCES

1. Rieszajemyje modeli v kvantovoj miekhanike / S. Al'beverio [i dr.] ; pier. s angl. V. A. Giejliera [i dr.]. – M. : Mir, 1991. – 556 s.
2. Antonievich, A. B. Approksimacii operatorov s del'ta-obraznymi koefficientami / A. B. Antonievich, T. A. Romanchuk // Aktual'nyje problemy matematiki : sb. nauch. tr. GrGU im. Ya. Kupaly / riedkol.: Ye. A. Rovba [i dr.]. – Grodno, 2008. – S. 11–28.
3. Antonievich, A. B. Uravnenija s del'ta-obraznymi koefficientami: mietod koniechnomiernykh approksimacij / A. B. Antonievich, T. A. Romanchuk // LAPLAMBERT. – Saarbrjukken, 2012. – 137 s.

4. Bieriezin, F. A. Zamiechanije ob uravnenii Shredingiera s singuliarnym potencialom / F. A. Bieriezin, L. D. Faddiejev // Dokl. AN SSSR. – 1961. – T. 137, № 5. – S. 1011–1014.

5. Kot, M. G. O riezol'vientnoj skhodimosti opieratorov, approksimirujushchikh sistem uravnenij s δ -obraznymi koeficientami / M. G. Kot // Viestn. BGU. Fizika. Matematika. Informatika. – 2015. – № 1. – S. 111–117.

6. Kot, M. G. Asimptotika sobstviennykh vector-funkcij opieratorov, approksimirujushchikh differencial'nyje uravnenija s δ -obraznymi koeficientami / M. G. Kot // Vies. Nac. acad. navuk Bielarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2017. – № 3. – S. 15–26.

7. Romanchuk, T. A. Javlienije riezonansa dlia matrichno-znachnykh funkcij / T. A. Romanchuk // Vies. NAN Bielarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2008. – № 2. – S. 8–16.

8. Kashchienko, I. S. Asimptotichieskoje razlozenije rieshenij uravnenij : mietod ukazanija / I. S. Kashchienko. – Jaroslavl' : YArGU, 2011. – 44 s.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 24.01.2024

УДК 512.542

Полина Александровна Павлушко¹, Александр Александрович Трофимук²¹студент III курса физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²д-р физ.-мат. наук, доц., зав. каф. фундаментальной математики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Polina Pavlushko¹, Alexandr Trofimuk²¹1-st Student of the Faculty of Physics and Mathematics of Brest State A. S. Pushkin University²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

Head of the Department of Fundamental Mathematics

of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: ¹polinapavlushko@gmail.com; ²alexander.trofimuk@gmail.com**О ПРОИЗВОДНОЙ ДЛИНЕ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП С ОГРАНИЧЕНИЯМИ
НА ИНДЕКСЫ НЕАБЕЛЕВЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП***

Исследуются конечные разрешимые группы с фиксированными индексами неабелевых максимальных подгрупп. В частности, установлено, что для разрешимой группы, максимальные подгруппы которой либо абелевы, либо имеют индексы, не делящиеся на $(n+1)$ -ых степени простых чисел, производная длина $d(G/\Phi(G)) \leq 3+n$. В работе получена оценка производной длины конечных разрешимых групп с малыми индексами неабелевых максимальных подгрупп. Исследованы такие A_4 -свободные группы. Построены примеры, показывающие точность полученных оценок.

Ключевые слова: производная длина, максимальные подгруппы, разрешимые группы.

***On the Derived Length of Soluble Groups with Restrictions
on the Indices of Non-Abelian Maximal Subgroups***

Finite soluble groups with fixed indices of non-Abelian maximal subgroups are studied. In particular, it is established that for a soluble group whose maximal subgroups are either Abelian or have indices not divisible by the $(n+1)$ -th powers of prime numbers, the derived length is $d(G/\Phi(G)) \leq 3+n$. In present paper we obtain an estimate for the derived length of finite soluble groups with small indices of non-Abelian maximal subgroups. Such A_4 -free groups are studied. We also constructed examples that show the accuracy of the estimates

Key words: the derived length, maximal subgroups, soluble groups.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

В теории конечных групп одними из центральных объектов, оказывающих существенное влияние на строение группы, являются максимальные подгруппы. За 70 лет сформировалось направление, связанное с изучением строения группы в зависимости от индексов максимальных подгрупп. К данному направлению относятся и результаты настоящей работы.

Б. Хупперт [2] в 1954 г. доказал, что группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы ее максимальных подгрупп являются простыми числами. В этой же работе Б. Хупперт сформулировал проблему о разрешимости конечной группы с индексами максимальных подгрупп, являющимися простыми числами или квадратами простых чисел.

Положительный ответ на это вопрос дал Ф. Холл [3] в 1958 г. Он установил разрешимость конечной группы, у которой индексы максимальных подгрупп есть простые числа или квадраты простых чисел.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ «Конвергенция – 2025», № госрегистрации 20211467).

Детальное исследование разрешимых групп, у которых индексы максимальных подгрупп есть простые числа или квадраты простых чисел, получено в работе [4]. Строение разрешимых групп, у которых индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел, получено в работе [5].

Для исследования свойств разрешимых групп в зависимости от произвольной величины индексов максимальных подгрупп В. С. Монахов [6] предложил на множестве всех разрешимых групп рассматривать следующие функции:

$$m_p(G) = \max\{\log_p |G : M| \mid M <_{\max} G, |G : M| = p^a\}, \quad p \in \pi(G);$$

$$m(G) = \max_{p \in \pi(G)} m_p(G).$$

В [6] получены оценки инвариантов разрешимых групп для произвольных значений $m(G)$. В частности, для разрешимой группы G справедлива следующая оценка: $d(G/\Phi(G)) \leq 3 + m(G)$. Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G .

Д. А. Ходанович [7] заметил, что в результате Ф. Холла для разрешимости группы достаточно ограничивать индексы только ненильпотентных максимальных подгрупп. Очевидно, что такие группы охватывают группы, у которых индексы неабелевых максимальных подгрупп ограничены. Кроме того, в [7] были установлены оценки нильпотентной длины и p -длины разрешимой группы, у которой ненильпотентные максимальные подгруппы имеют индексы, свободные от четвертых степеней. Информацию об оценках производной длины таких групп работа [7] не содержала. Однако если наложить ограничения на индексы неабелевых максимальных подгрупп, то получим следующую теорему.

Теорема 1. Пусть G – разрешимая группа, максимальные подгруппы которой либо абелевы, либо имеют индексы, не делящиеся на $(n+1)$ -ых степени простых чисел. Тогда $d(G/\Phi(G)) \leq 3 + n$. В частности:

1) Если максимальные подгруппы либо абелевы, либо имеют индексы, свободные от четвертых степеней, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6.

2) Если максимальные подгруппы либо абелевы, либо имеют индексы, свободные от кубов, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Пример 1. Пусть E_{7^3} – элементарная абелева группа порядка 7^3 и S – экстра-специальная группа порядка 3^3 . В системе компьютерной алгебры GAP построена группа $G = [E_{7^3}][S]SL(2,3)$ порядка 222264 с единичной подгруппой Фраттини, у которой максимальные подгруппы имеют индексы, свободные от четвертых степеней. Производная длина группы G равна 6. Значит, оценка производной длины в теореме 1 (1) точная.

Пример 2. Пусть S – экстраспециальная группа порядка 3^3 . В системе компьютерной алгебры GAP построена группа $G = [S]GL(2,3)$ порядка 1296, у которой максимальные подгруппы имеют индексы, свободные от кубов. Производная длина группы $G/\Phi(G)$ равна 5. Значит, оценка производной длины в теореме 1 (2) точная.

Разрешимые группы из п. 1 и п. 2 теоремы 1 имеют различные верхние границы производной длины. Однако, если индексы неабелевых максимальных подгрупп ограничить кубами малых простых чисел $p \in \{2, 3, 5, 11, 17\}$, то можно сохранить верхнюю оценку производной длины $G/\Phi(G)$, равную 5.

Следствие 1. Пусть в разрешимой группе G максимальные подгруппы либо абелевы, либо имеют индексы, равные простому числу, квадрату простого числа или p^3 , где $p \in \{2, 3, 5, 11, 17\}$. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Пример 3. В системе компьютерной алгебры GAP построена группа, подтверждающая точность полученной оценки производной длины в следствии 1. Так, группа $G = [E_{3^5}]GL(2,3)$ порядка 11664 с единичной подгруппой Фраттини имеет индексы максимальных подгрупп, принадлежащие множеству $\{2, 3, 2^2, 3^2, 3^3\}$, и производную длину, равную 5.

Напомним, что группа называется A_4 -свободной, если она не содержит секций, изоморфных знакопеременной группе A_4 .

Из теоремы Гуральника следует, что если индекс любой максимальной подгруппы группы G примарен, то группа G либо разрешима, либо $G/S(G)$ изоморфна простой группе $PSL(2,7)$. Здесь $S(G)$ – разрешимый радикал группы G . Так как в $PSL(2,7)$ есть подгруппа, изоморфная знакопеременной группе A_4 , то любая A_4 -свободная группа, у которой индексы максимальных подгрупп примарны, является разрешимой.

Следствие 2. Пусть G – A_4 -свободная группа.

1) Если максимальные подгруппы либо абелевы, либо имеют индексы, свободные от четвертых степеней, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

2) Если максимальные подгруппы либо абелевы, либо имеют индексы, свободные от кубов, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

Пример 4. Пусть E_{7^3} – элементарная абелева группа порядка 7^3 , S – экстра-специальная группа порядка 3^3 и Q_8 – группа кватернионов порядка 8. В системе компьютерной алгебры GAP построена A_4 -свободная группа $G = [E_{7^3}][S]Q_8$ порядка 74088 с единичной подгруппой Фраттини, у которой максимальные подгруппы имеют индексы, свободные от четвертых степеней. Производная длина группы G равна 5. Значит, оценка производной длины в следствии 2 (1) точная.

Пример 5. Группа $G = [E_{3^2}]Q_8$ является A_4 -свободной с единичной подгруппой Фраттини. Кроме того, G имеет индексы максимальных подгрупп, свободные от кубов, и производную длину, равную 3. Следовательно, оценка производной длины, полученная в следствии 2 (2), является точной.

1. Вспомогательные результаты

Пусть F – некоторая формация групп и G – группа. Тогда G^F – F -коррадикал группы G , т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in F$. Произведение $FN = \{G \in \mathcal{G} \mid G^H \in F\}$ формаций F и H состоит из всех групп G , для которых H -коррадикал принадлежит формации F . Как обычно, $F^2 = FF$. Формация F называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in F$ следует, что $G \in F$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначают через N и A соответственно.

Здесь $\rho(n)$ – максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп полной линейной группы $GL(n, P)$ над полем P . Значения $\rho(n)$ вычислены для всех n .

Пусть n и m – натуральные числа. Говорят, что m свободно от n -х степеней, если p^n не делит m для всех простых чисел p . При $n=4$ говорят, что m свободно от четвертых степеней, а при $n=3$ – свободно от кубов.

Для доказательства нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть F – формация. Тогда NF – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно [8, с. 36], произведение NF является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то NF – насыщенная формация.

Лемма 2 ([9], лемма 13). Если H – A_4 -свободная разрешимая неприводимая подгруппа группы $GL(n, p)$. Тогда:

1) если $n=2$, то H метабелева;

2) если $n=3$, то $H \in A^4$.

Лемма 3 ([9], лемма 7). Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in A^k$, когда $G \in NA^{k-1}$.

Лемма 4 ([9], лемма 12). Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n, p)$. Тогда:

1) если $n=2$, то $H \in N^3 \cap A^4$;

2) если $n=3$, то $H \in N^3 \cap A^5$.

Лемма 5 ([10], теорема 7.1). Если H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(3, 2)$, то $H \in A^2$.

Лемма 6 ([10], теорема 7.1). Если H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(3, p)$, где $p \in \{3, 5, 11, 17\}$, то $H \in A^3$.

2. Доказательство теоремы 1

Применим индукцию по порядку группы G . Покажем, что $G \in NA^{\rho(n)}$. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$ и $M/\Phi(G)$ – произвольная максимальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Тогда M – максимальная подгруппа группы G и по условию теоремы M либо абелева, либо ее индекс $|G:M|$ свободен от $(n+1)$ -ых степеней.

Поэтому в первом случае фактор-группа $M/\Phi(G)$ является абелевой, а так как $|G:M| = |G/\Phi(G):M/\Phi(G)|$, то во втором случае индекс максимальной подгруппы $M/\Phi(G)$ в группе $G/\Phi(G)$ свободен от $(n+1)$ -ых степеней. Таким образом, условие теоремы наследуют все фактор-группы $G/\Phi(G)$. Поэтому справедливо включение $G/\Phi(G) \in NA^{\rho(n)}$. Так как по лемме 1 формация $NA^{\rho(n)}$ насыщена, то $G \in NA^{\rho(n)}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$.

По теореме III.4.5 [11] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп F_i группы G , где $1 \leq i \leq k$. Поэтому по теореме I.4.5 [11] для каждого F_i фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $Aut(F_i)$. По лемме I.9.6 [11] фактор-группа

$G/\prod_{i=1}^k C_G(F_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(F_i)$, $1 \leq i \leq k$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то

$$\prod_{i=1}^k C_G(F_i) = C_G(F) = F \text{ и } G/\prod_{i=1}^k C_G(F_i) = G/F.$$

Пусть F_i – элементарная абелева p_i -подгруппа. Ясно, что для каждого i существует максимальная подгруппа M_i в группе G , такая, что $G = [F_i]M_i$. Если M_i абелева, то $G \in \mathbf{NA} \subseteq \mathbf{NA}^{\rho(n)}$. Поэтому считаем, что индекс $F_i = |G : M_i| = p_i^{m_i}$, $m_i \leq n$.

Поскольку $\text{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(m_i, p_i)$ и неприводимая группа вполне приводима, то из определения функции $\rho(n)$ получаем, что $\rho(m_i) \leq \rho(n)$ и $G/C_G(F_i) \in \mathbf{A}^{\rho(m_i)} \subseteq \mathbf{A}^{\rho(n)}$. Таким образом, для каждого i фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathbf{A}^{\rho(n)}$. Так как $\mathbf{A}^{\rho(n)}$ – формация, то $G/F \in \mathbf{A}^{\rho(n)}$. Значит, $G \in \mathbf{NA}^{\rho(n)}$ и по лемме 3 $G/\Phi(G) \in \mathbf{A}^{\rho(n)+1}$. Таким образом, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает $\rho(n)+1$. Поскольку $\rho(n) \leq n+2$, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает $n+3$.

Очевидно, что если максимальные подгруппы либо абелевы, либо имеют индексы, свободные от четвертых степеней, то $n=3$ и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6. Если максимальные подгруппы либо абелевы, либо имеют индексы, свободные от кубов, то $n=2$ и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Теорема доказана.

3. Доказательство следствия 1

Вначале докажем, что $G \in \mathbf{F} = \mathbf{NA}^4$. Воспользуемся индукцией по порядку G . Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$ и $M/\Phi(G)$ – максимальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Тогда M – максимальная подгруппа группы G и по условию теоремы M либо абелева, либо ее индекс $|G:M|$ есть простое число, квадрат простого или p^3 , где $p \in \{2,3,5,11,17\}$. В первом случае, фактор-группа $M/\Phi(G)$ абелева. Так как $|G:M| = |G/\Phi(G) : M/\Phi(G)|$, то во втором случае индекс максимальной подгруппы $M/\Phi(G)$ в группе $G/\Phi(G)$ есть простое число, квадрат простого или p^3 , где $p \in \{2,3,5,11,17\}$. Таким образом, фактор-группа $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условию теоремы и $G/\Phi(G) \in \mathbf{F}$. Так как по лемме 1 формация \mathbf{F} насыщена, то $G \in \mathbf{F}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$.

Основываясь на доказательстве теоремы 1, рассмотрим следующие случаи.

Если M_i абелева, то $G \in \mathbf{NA} \subseteq \mathbf{F}$. Поэтому считаем, что индекс $F_i = |G : M_i|$ есть простое число, квадрат простого или p_i^3 , где $p_i \in \{2,3,5,11,17\}$. Поэтому возможны следующие варианты: $\text{Aut}(F_i)$ изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$; $\text{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$; $\text{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(3, p_i)$, где $p_i \in \{2,3,5,11,17\}$.

В первом случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(F_i) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^4$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и по лемме 4 фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathcal{A}^4$.

В третьем случае, если $|F_i| = p_i^3$, где $p \in \{3, 5, 11, 17\}$. Тогда $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3, p)$. Из лемм 5–6 следует, что $G/C_G(F_i) \in \mathcal{A}^3 \subset \mathcal{A}^4$.

Значит, $G/C_G(F_i) \in \mathcal{A}^4$. Так как \mathcal{A}^4 – формация, то $G/F \in \mathcal{A}^4$. Поэтому $G \in \mathcal{F}$.

Итак, мы доказали, что $G \in \mathcal{NA}^4$. По лемме 3 $G/\Phi(G) \in \mathcal{A}^5$ и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

4. Доказательство следствия 2

Пусть G является A_4 -свободной группой. Повторим предложенное в следствии 1 доказательство, рассмотрев случаи, когда $\text{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$ и $\text{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(3, p_i)$.

Если фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$, то по лемме 2 фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathcal{A}^2$.

Если фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3, p_i)$, то по лемме 2 фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathcal{A}^4$.

Значит, $G/C_G(F_i) \in \mathcal{A}^4$. Так как \mathcal{A}^4 – формация, то $G/F \in \mathcal{A}^4$. Поэтому $G \in \mathcal{NA}^4$ и по лемме 3 $G/\Phi(G) \in \mathcal{A}^5$. Таким образом, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Zeitschr. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
3. Холл, М. Теория групп / М. Холл. – М. : Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
4. Монахов, В. С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская // Мат. заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
5. Монахов, В. С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В. С. Монахов, М. В. Селькин, Е. Е. Грибовская // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.
6. Монахов, В. С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.
7. Ходанович, Д. А. О разрешимости конечной группы с ограниченными индексами ненильпотентных максимальных подгрупп / Д. А. Ходанович // Вестн. ПГУ. Сер. С, Фундамент. науки. – 2005. – № 4. – С. 18–22.
8. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

9. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.
10. Bloom, D. The subgroups of $PSL(3, q)$ for Odd q / D. Bloom // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – Vol. 127, nr 1. – P. 150–178.
11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 793 p.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedeniye v teoriyu koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk., 2006. – 207 s.
2. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Zeitschr. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
3. Khol, M. Teorija grupp / M. Khol. – M. : Izd-vo inostr. lit., 1962. – 468 s.
4. Monakhov, V. S. O maksimal'nykh i silovskikh podgruppakh koniechnykh razrieshimykh grupp / V. S. Monakhov, Ye. Ye. Gribovskaja // Mat. zamietki. – 2001. – T. 70, № 4. – S. 603–612.
5. Monakhov, V. S. O razrieshimykh normal'nykh podgruppakh koniechnykh grupp / V. S. Monakhov, M. V. Siel'kin, Ye. Ye. Gribovskaja // Ukr. mat. zhurn. – 2002. – T. 54, № 7. – S. 940–950.
6. Monakhov, V. S. Zamiechanija o maksimal'nykh podgruppakh koniechnykh grupp / V. S. Monakhov // Dokl. NAN Bielarusi. – 2003. – T. 47, № 4. – S. 31–33.
7. Khodanovich, D. A. O razrieshimosti koniechnoj grupy s ograniczennymi indeksami nienil'potentnykh maksimal'nykh podgrupp / D. A. Khodanovich // Viestn. PGU. Sier. C, Fundamient. nauki. – 2005. – № 4. – S. 18–22.
8. Shemietkov, L. A. Formacii koniechnykh grupp / L. A. Shemietkov. – M. : Nauka, 1978. – 272 s.
9. Monakhov, V. S. O koniechnykh razrieshimykh gruppakh fiksirovannogo ranga / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Sib. mat. zhurn. – 2011. – Т. 52, № 5. – S. 892–903.
10. Bloom, D. The subgroups of $PSL(3, q)$ for Odd q / D. Bloom // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – Vol. 127, nr 1. – P. 150–178.
11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 793 p.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 04.04.2024

УДК 513.82

*Александр Андреевич Юдов¹, Елена Валерьяновна Арабчик²,
Дмитрий Станиславович Арабчик³, Елена Вячеславовна Кисилюк⁴*

¹канд. физ.-мат. наук, доц.

²учитель математики и информатики гимназии г. Пружаны

³учитель математики и информатики средней школы № 5 г. Пружаны

⁴учитель математики и информатики средней школы № 14 имени Е. М. Фомина г. Бреста

Aleksandr Yudov¹, Yelena Arabchik², Dmitriy Arabchik³, Yelena Kisilyuk⁴

¹Candidate Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

²Teacher of Mathematics and Computer Science of the Gymnasium of Pruzhany

³Teacher of Mathematics and Computer Science of the Secondary School nr 5 of Pruzhany

⁴Teacher of Mathematics and Computer Science

of the Secondary School nr 14 named after Ye. M. Fomin of Brest

e-mail: modelmath@brsu.by

ГРУППЫ СИММЕТРИИ ПОДГРУПП ГРУППЫ S_4

Изучаются конечные группы и симметрии конечной группы относительно произвольной точки, находятся группы симметрий, изучаются их свойства, рассматриваются примеры.

Ключевые слова: группа, подгруппа, гомоморфизм, симметрия, однородное пространство.

Groups Symmetry in a Finite Groups S_4

In this work finite groups are studied. A definition of a finite group with respect to approaching points of view is given and the properties of the collection are studied. Homomorphisms of a finite group are considered and homogeneous spaces generated by a homomorphism are constructed, its properties are studied, and examples are considered.

Key words: group, subgroup, homomorphism, symmetry, homogeneous space.

Введение

Теория конечных групп представляет собой активно развивающийся раздел современной алгебры. В этом направлении работали: О. Ю. Шмидт, В. Хупперт, Л. А. Шеметков, С. А. Чунихин, В. С. Монахов, А. А. Трофимук, Д. В. Грицук и др.

В данной работе для конечной группы вводится понятие симметрии. Это понятие применяется для исследования структуры конечных групп.

Рассмотрим группу S_4 и ее подгруппы

$$F_1 = \{\varepsilon, (12)\}, F_2 = \{\varepsilon, (13)\}, F_3 = \{\varepsilon, (14)\}, F_4 = \{\varepsilon, (23)\}, F_5 = \{\varepsilon, (24)\}, F_6 = \{\varepsilon, (34)\}, F_7 = \{\varepsilon, (12)(34)\}, F_8 = \{\varepsilon, (13)(24)\}, F_9 = \{\varepsilon, (14)(23)\},$$

$$G_1 = \{\varepsilon, (123), (132)\}, G_2 = \{\varepsilon, (124), (142)\}, G_3 = \{\varepsilon, (134), (143)\},$$

$$G_4 = \{\varepsilon, (234), (243)\}.$$

$$K_1 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}, K_2 = \{\varepsilon, (12)(34), (12), (34)\},$$

$$K_3 = \{\varepsilon, (13)(24), (13), (24)\}, K_4 = \{\varepsilon, (14)(23), (14), (23)\},$$

$$K_5 = \{\varepsilon, (1234), (1432), (13)(24)\}, K_6 = \{\varepsilon, (1243), (1342), (14)(23)\},$$

$$K_7 = \{\varepsilon, (1324), (1423), (12)(34)\}.$$

$$S_3^1 = \{\varepsilon, (12), (13), (23), (123), (132)\},$$

$$S_3^2 = \{\varepsilon, (124), (142), (12), (14)(24)\}, S_3^3 = \{\varepsilon, (134), (143), (13), (14), (34)\},$$

$$S_3^4 = \{\varepsilon, (234), (243), (23), (24), (34)\}.$$

$$H_1 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (12), (34), (1324), (1423)\},$$

$$H_2 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (14), (23), (1243), (1342)\},$$

$$H_3 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (13), (24), (1234), (1432)\}.$$

$$A_1 = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (142), (134), (243), \\ (132), (124), (143), (234) \end{array} \right\}.$$

Пользуясь теорией, изложенной в [1], будем вычислять группы симметрий этих подгрупп.

1. Рассмотрим группу $F_1 = \{\varepsilon, (12)\}$. Пользуясь определением (1) [1], находим симметрии относительно ее элементов.

$$\begin{aligned} S_\varepsilon: \varepsilon &\rightarrow \varepsilon\varepsilon^{-1}\varepsilon = \varepsilon. \\ (12) &\rightarrow \varepsilon(12)^{-1}\varepsilon = (12). \end{aligned}$$

Если обозначить ε номером 1, а (12) номером 2, то симметрия S_ε запишется в виде перестановки: $\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \varepsilon$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} S_{(12)}: \varepsilon &\rightarrow (12)\varepsilon^{-1}(12) = \varepsilon. \\ (12) &\rightarrow (12)(12)^{-1}(12) = (12). \end{aligned}$$

Таким образом, $S_{(12)}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \varepsilon$.

Теорема 1. Группа симметрий группы F_1 тождественная. Аналогично получим для групп F_2, F_3, \dots, F_9 .

Рассмотрим группу $C_{5_1} = \{\varepsilon, (123), (132)\}$. Найдем симметрии элементов этой группы.

$$\begin{aligned} S_\varepsilon: \varepsilon &\rightarrow \varepsilon. \\ (123) &\rightarrow \varepsilon(123)\varepsilon = (123), \\ (132) &\rightarrow \varepsilon(132)\varepsilon = (132). \end{aligned}$$

Выполняя обозначения, как в предыдущем случае, получим

$$\begin{aligned} S_\varepsilon &= (23) = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}. \\ S_{(123)}: \varepsilon &\rightarrow (123)(123) = (132), \\ (123) &\rightarrow (123)(132)(123) = (123), \\ (132) &\rightarrow (123)(132)(123) = \varepsilon. \\ S_{(123)} &= \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} = (13). \\ S_{(132)}: \varepsilon &\rightarrow (123), \\ (123) &\rightarrow (132)(132)(132) = \varepsilon \\ (132) &\rightarrow (132)(123)(132) = (132), \\ S_{(132)} &= (12). \end{aligned}$$

Итак, базовые симметрии имеют вид: $\varepsilon, (12), (13)$. Возьмем первую производную

	ε	(12)	(13)
ε	ε	(12)	(13)
(12)	(12)	ε	(132)
(13)	(13)	(123)	ε

Таким образом, первая симметрическая производная имеет вид:

$$S_G^1 = \{\varepsilon, (12), (13), (123), (132)\}.$$

Рассмотрим вторую симметрическую производную.

	ε	(12)	(13)	(123)	(132)
ε	ε	(12)	(13)	(123)	(132)
(12)	(12)	ε	(132)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	ε	(12)	(23)
(123)	(123)	(13)	(23)	(132)	ε
(132)	(13)	(23)	(12)	ε	(123)

Вторая симметричная производная группы G_1 равна

$$S_{G_1}^2 = \{\varepsilon, (12), (13), (23), (123), (132)\},$$

т. е. совпадает с группой S_3^1 .

Теорема 2. Группа симметрии G_1 есть группа шестого порядка и совпадает с S_3^1 .

Такая же группа симметрий будет у групп G_2, G_3, G_4 .

Рассмотрим симметрии группы K_1 – группы Клейна. Делая аналогичные вычисления, получаем теорему.

Теорема 3. Группа симметрий группы K_1 тождественная.

Проведем вычисления для групп K_2, K_3, K_4 . Получим теорему.

Теорема 4. Группы симметрий K_2, K_3, K_4 тождественные.

Для K_5, K_6, K_7 получим следующее:

$$S(K_5) = K_4, S(K_6) = K_4, \quad S(K_7) = K_4.$$

Рассмотрим группу S_3^1 . Базовая совокупность симметрий для S_3^1 имеет вид:

$$S_{S_3^1}^6 = \{(15), (16), (23), (24), (34), (56)\}.$$

Возьмем первую симметрическую производную.

	(56)	(34)	(24)	(23)	(16)	(15)
(56)	ε	(34)(56)	(34)(56)	(23)(56)	(156)	(165)
(34)	(34)(56)	ε	(234)	(243)	(16)(34)	(15)(34)
(24)	(24)(56)	(243)	ε	(234)	(16)(24)	(15)(24)
(23)	(23)(56)	(234)	(243)	ε	(16)(23)	(15)(23)
(16)	(165)	(16)(34)	(16)(24)	(16)(23)	ε	(156)
(15)	(156)	(15)(34)	(15)(24)	(15)(23)	(165)	ε

После взятия первой симметричной производной, получим совокупность:

$$S_{S_3^1}^1 = \{\varepsilon, (15), (16), (23), (24), (34), (56), (15)(24), (15)(34), (15)(23), (16)(23), (16)(24), (16)(34), (23)(56), (24)(56), (34)(56), (156), (165), (234), (243)\}.$$

После взятия второй производной получим совокупность:

$$S_{S_3^1}^1 = \{\varepsilon, (15), (16), (23), (24), (34), (56), (15)(24), (15)(34), (15)(23), (16)(23), (16)(24), (16)(34), (23)(56), (24)(56), (34)(56), (156), (165), (234), (243) (156)(23), (156)(24), (156)(243), (165)(234), (165)(243)\}.$$

Будем составлять таблицу произведений симметрии для элементов второй производной.

Составляя таблицу, убеждаемся, что новых элементов не появилось. Поэтому $S_{S_3^2}^2$ является группой и является группой симметрии для группы S_3^1 .

Теорема 5. Группой симметрии для группы S_3^1 является подгруппа группы S_6 , состоящая из следующих 36 элементов:

$$\begin{aligned} & \varepsilon, (15), (16), (23), (24), (34), (56), (15)(24), (15)(34), (15)(23), (16)(23), \\ & (16)(24), (16)(34), (23)(56), (24)(56), (34)(56), (156), (165), (234), (243) \\ & (156)(23), (156)(24), (156)(243), (165)(234), (165)(243). \end{aligned}$$

Заклучение

Введенное в работе понятие симметрии конечной группы позволяет получить новые характеристики подгрупп конечной группы. Вычисление групп симметрий для подгрупп конечной группы позволяет получить новые инвариантные характеристики и свойства данной группы, что позволяет, в частности, устанавливать классификацию таких групп.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов : учеб. пособие / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
2. Монахов, В. С. Введение в теорию групп : тексты лекций по курсу «Алгебра и теория чисел» / В. С. Монахов. – Минск, 1990. – 71 с.
3. Богопольский, О. В. Введение в теорию групп / О. В. Богопольский. – М. ; Ижевск : ИКИ, 2002.
4. Юдов, А. А. Симметрия в конечной группе и ее свойства / А. А. Юдов, Е. В. Кисилук, А. М. Кузьмич // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2023. – № 1. – С. 93–104.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedienije v teoriju koniechnykh grupp i ikh klassov : uchieb. posobije / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk., 2006. – 207 s.
2. Monakhov, V. S. Vviedienije v teoriju grupp : tieksty liekcij po kursu «Algiebra i teorija chisiel» / V. S. Monakhov. – Minsk, 1990. – 71 s.
3. Bogopol'skij, O. V. Vviedienije v teoriju grupp / O. V. Bogopol'skij. – M. ; Izhevsk : IKI, 2002.
4. Yudov, A. A. Simmetrija v koniechnoj gruppie i jejo svojstva / A. A. Yudov, Ye. V. Kisiliuk, A. M. Kuz'mich // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2023. – № 1. – S. 93–104.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 27.03.2024

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай, рускай ці англійскай мове ў адным экзэмпляры аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша (14 000 – 20 000 знакаў), у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc, *.docx ці *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармату А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Усе малюнкi і фотаздымкі павінны быць толькі ў чорна-белым выкананні. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 (у рэдакцыі загада ад 08.09.2016 № 206). Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылкаў падаюцца ў квадратных дужках ([1–4], [1; 3], [1, с. 32], [2, с. 52–54], [3, л. 5], [4, л. 6об.]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў (аўтараў не больш за 5) на мове артыкула;
- звесткі пра аўтара/аўтараў (навуковая ступень, званне, пасада, месца працы/вучобы) на мове артыкула;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- звесткі пра аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- e-mail аўтара/аўтараў;
- назва артыкула на мове артыкула;
- анатацыя ў аб'ёме 100–150 слоў і ключавыя словы на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- назва артыкула на англійскай мове;
- анатацыя і ключавыя словы на англійскай мове.

Звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы ўнізе.

Асноўны тэкст структуравецца ў адпаведнасці з патрабаваннямі Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў:

- Уводзіны (пастаноўка мэты і задач даследавання).
- Асноўная частка (матэрыялы і метады даследавання; вынікі і іх абмеркаванне).
- Заклучэнне (фармулююцца асноўныя вынікі даследавання, указваецца іх навізна, магчымасці выкарыстання).
- Спіс выкарыстанай літаратуры; спіс літаратуры павінен уключаць не больш за 20–22 крыніцы і абавязкова ўтрымліваць публікацыі, у тым ліку замежныя, па тэме даследавання за апошнія 10 гадоў.

➤ References – спіс выкарыстанай літаратуры, які прадубліраваны лацінскім алфавітам (колькасць крыніц, прыведзеных у спісе і ў References, павінна супадаць).

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- выпіска з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе (вучыцца) аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў);
- вынікі правэркі тэксту на прадмет арыгінальнасці пры дапамозе інструмента «Антыплагіят» (арыгінальнасць павінна складаць не менш за 70 %).

Усе артыкулы абавязкова праходзяць «сляпое» рэцэнзаванне. Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегія не разглядае і не вяртае. Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Рукапіс артыкула і дакументы дасылаць на адрас: 224016, г. Брэст, бульвар Касманаўтаў, 21, рэдакцыя часопіса «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта», электронны варыянт артыкула накіроўваць на e-mail: vesnik@brsu.by.

Карэктары *А. А. Іванюк, Л. М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *Г. Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 01.07.2024. Фармат 60×84/8. Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Рызаграфія.

Ум. друк. арк. 14,42. Ул.-выд. арк. 6,93. Тыраж 50 экз. Заказ № 189.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.