



ВЕСНИК

БРЭСЦКАГА УНІВЕРСІТЭТА

Рэдакцыйная калегія

галоўны рэдактар

Ю. П. Голубеў

намеснік галоўнага рэдактара

У. А. Плещохоў

адказны рэдактар

А. А. Трафімук

А. Б. Антаневіч (Беларусь)

А. І. Басік (Беларусь)

А. Я. Будзько (Беларусь)

М. А. Громаў (Расія)

А. М. Ішханян (Арменія)

М. І. Ляўчук (Беларусь)

І. П. Мартынаў (Беларусь)

П. П. Матус (Беларусь)

А. І. Мелькер (Расія)

В. С. Манахаў (Беларусь)

У. А. Плещохоў (Беларусь)

В. М. Радзькоў (Беларусь)

Пасведчанне аб рэгістрацыі
ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:
224016, г. Брэст,
бульвар Касманаўтаў, 21
тэл.: +375-(162)-21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага
ўніверсітэта» выдаецца
са снежня 1997 г.

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы на год

Заснавальнік – установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»

№ 1 / 2025

У адпаведнасці з Дадаткам да загада
Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь
ад 06.02.2024 № 30 (са змяненнямі, унесенымі загадамі
ад 27.02.2025 № 48, ад 06.05.2025 № 107)
часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта.

Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»

ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў у 2025 г.
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

◇ ◇ ◇

У адпаведнасці з дагаворам паміж установай адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»
і ТАА «Навуковая электронная бібліятэка» (ліцэнзійны дагавор
№ 457-11/2020 ад 03.11.2020) часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта.
Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»
размяшчаецца на платформе eLIBRARY.RU
і ўключаны ў Расійскі індэкс навуковага цытавання (РІНЦ)

ЗМЕСТ

ФІЗИКА

Плетюхов В. А.

Обобщенные релятивистские волновые уравнения и безмассовые пределы уравнения Дирака – Кэлера5

Антонович Д. А., Сковородко М. А., Шидловская Д. В.

Плазменные источники низкоэнергетичных ионно-электронных совмещенных в пространстве пучков 13

Ивашкевич А. В., Саченок П. О., Овсюк Е. М.

Поле Кальба – Рамона, решения со сферической симметрией, калибровочные степени свободы..... 22

Ивашкевич А. В.

Частица Дирака – Кэлера в однородном электрическом поле, решения с цилиндрической симметрией..... 29

Балухо И. Н., Дудчик Ю. И., Кольчевский Н. Н.

Широкополосный источник рентгеновского излучения 48

МАТЕМАТИКА

Матысик О. В., Ковальчук И. В.

Трехслойная итерационная процедура решения некорректных уравнений первого рода в гильбертовом пространстве 56

Павлушко П. А., Трофимук А. А.

Конечные группы с заданными системами tss_n -подгрупп 73

Юдов А. А., Давыдчик А. А.

Ф-пространства симметрической группы S_4 и их симметрии 85

Басик А.И., Басик Д.А., Козинец Р.Н.

О краевой задаче Римана – Гильберта для одной системы четырех уравнений бигармонического типа в R^3 90



VESNIK

OF BREST UNIVERSITY

Editorial Board

editor-in-chief
Yu. P. Golubeu

deputy editor-in-chief
U. A. Plietsiukhou

managing editor
A. A. Trafimuk

A. B. Antanievich (Belarus)
A. I. Basik (Belarus)
A. Ya. Budzko (Belarus)
M. A. Gromau (Russia)
A. M. Ishkhanian (Armenia)
A. U. Dziamidchyk (Belarus)
M. I. Liauchuk (Belarus)
I. P. Martynau (Belarus)
P. P. Matus (Belarus)
A. I. Melkier (Russia)
V. S. Manakhau (Belarus)
U. A. Plietsiukhou (Belarus)
V. M. Radzkou (Belarus)

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
nr 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224016, Brest,
21, Kosmonavtov Boulevard
tel.: +375-(162)-21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.by

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued twice a year

Founder – Educational Establishment
«Brest State A. S. Pushkin University»

№ 1 / 2025

According to the Supplement to the order of Supreme Certification
Commission of the Republic of Belarus from February 06, 2024 nr 30
(with the amendments made by the orders of Supreme Certification
Commission from February 27, 2025 nr 48, from May 06, 2025 nr 107)
the journal «Vesnik of Brest University.

Series 4. Physics. Mathematics» has been included
to the List of scientific editions of the Republic of Belarus
for publication of the results of scientific research in 2025
in physics-mathematical sciences (Physics)

◇ ◇ ◇

According to the agreement
between Educational Establishment
«Brest State A. S. Pushkin University» and Pvt Ltd «Scientific Electronic
Library» (licence contract № 457-11/2020 from 03.11.2020)
the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics»
is placed on the platform eLIBRARY.RU
and included in the Russian Science Citation Index (RSCI)

CONTENTS

PHYSICS

Vladimir Pletyukhov.

General Relativistic Wave Equations and Massless Limits
of the Dirac – Kähler Equation 5

Dmitry Antonovich, Marina Skovorodko, Diana Shidlovskaya.

Plasma Sources of Low-Energy Ion-Electron Space-Combined Beams.....13

Alina Ivashkevich, Polina Sachenok, Elena Ovsiyuk.

Calb – Ramond Field, Solutions with Spherical Symmetry,
the Gauge Degrees of Freedom22

Alina Ivashkevich.

Dirac – Kähler Particle in the Uniform Electric Field,
Solutions with Cylindrical Symmetry.....29

Iren Balukho, Yuri Dudchik, Nickolai Kolchevsky.

Broadband X-ray Source48

MATHEMATICS

Oleg Matysik, Ivan Kovalchuk.

Three-Layer Iterative Solution Procedure Ill-Posed Equations
of the First Kind in a Hilbert Space..... 56

Polina Pavlushko, Alexander Trofimuk.

Finite Groups with Given Systems of tcc_n -Subgroups..... 73

Alexander Yudov, Anastasiya Davydchik.

Φ -Spaces of the Symmetric Group S_4 and Their Symmetries 85

Aliaxandr Basik, Denis Basik, Ruslan Kozinets.

About Riemann – Hilbert Boundary Value Problem for One System
of four Equations of Biharmonic Type in R^3 90

Владимир Анестиевич Плетюхов

*д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*

Vladimir Pletyukhov

*Doctor of Physics and Mathematical Sciences, Professor,
Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: pletyukhov@yandex.by*

ОБОБЩЕННЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И БЕЗМАССОВЫЕ ПРЕДЕЛЫ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА – КЭЛЛЕРА

Предложены матричная и тензорная формулировки релятивистских волновых уравнений, обеспечивающих совместное описание электромагнитного поля (фотона) и безмассового поля Кальба – Рамонда с нулевой спиральностью (нотопфа). Показано, что эти уравнения являются частными случаями уравнениям Дирака – Кэллера.

Ключевые слова: релятивистские волновые уравнения, уравнение Дирака – Кэллера, поле Кальба – Рамонда, электромагнитное поле, фотон, нотопф.

General Relativistic Wave Equations and Massless Limits of the Dirac – Kähler Equation

Matrix and tensor formulations of the relativistic wave equations providing description both an electromagnetic field (photon) and a massless Kalb – Ramond field with the zero helicity (notoph) are given. It is shown that this equations are particular cases of the Dirac – Kähler equation.

Key words: relativistic wave equations, Dirac – Kähler field, Kalb – Ramond field, electromagnetic field, photon, notoph.

Введение

Подход обобщенной теории релятивистских волновых уравнений (РВУ) исходит из того, что описание микрообъектов (полей) как с ненулевой, так и нулевой массой всегда может быть сведено к системе дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, представимой в матрично-дифференциальной форме [1]

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + \Gamma_0) \Psi(x) = 0 \quad (\mu = 1 \div 4), \quad (1.1)$$

где $\Psi(x)$ – многокомпонентная волновая функция-столбец, преобразующаяся по некоторому приводимому представлению Т полной группы Лоренца; Γ_μ и Γ_0 – квадратные матрицы соответствующей размерности.

Матрица Γ_0 в общем случае является проективной ($\Gamma_0^2 = \Gamma_0$). При этом возможны варианты, когда $\det \Gamma_0 \neq 0$ и $\det \Gamma_0 = 0$ (в том числе $\Gamma_0 = 0$). В первом случае РВУ (1.1) описывает микрообъект с ненулевой массой и умножением на $m\Gamma_0^{-1}$ может быть приведено к виду

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + mI) \Psi(x) = 0, \quad (1.2)$$

где m – скалярный параметр, связанный с массой; во втором случае уравнение (1.1) описывает безмассовый микрообъект.

В работах [1–4] были собраны воедино положения, которые в настоящее время составляют так называемый постулативный базис теории обобщенных РВУ.

Перечислим некоторые (основные) из них:

(1) любое РВУ должно удовлетворять требованиям инвариантности относительно преобразований полной группы Лоренца, а также обеспечивать возможность лагранжевой формулировки теории;

(2) РВУ, описывающее единый физический объект, должно быть не распадающимся в смысле полной группы Лоренца;

(3) среди состояний физического микрообъекта не могут присутствовать такие, которым соответствует нулевая плотность энергии;

(4) «правильное» РВУ должно соответствовать положительно определенной плотности энергии (заряда) в случае целого (полуцелого) спина;

(5) микрообъект с целым (полуцелым) спином описывается на основе тензорных (спинорных) представлений группы Лоренца;

(6) если под микрообъектом понимается бесструктурная элементарная частица со спином s , не обладающая иными внутренними степенями свободы, то для построения соответствующего РВУ достаточно ограничиться минимально необходимым набором неприводимых зацепляющихся компонент τ в представлении T , реализующих данное значение спина.

Однако в настоящее время с появлением новых экспериментальных фактов (обнаружение структуры у микрообъектов, ранее считавшихся элементарными, наличие у них дополнительных внутренних (изоспиновых) степеней свободы и др.) некоторые из вышеперечисленных положений теории РВУ, в частности условия (5) и (6), потеряли обязательный характер.

Объектом нашего рассмотрения в настоящей работе будет тензорная полевая система уравнений первого порядка, известная в литературе как уравнение Дирака – Кэлера (ДК) [5], волновая функция которого представляет собой полный набор антисимметричных тензорных полей в пространстве Минковского. Интерес к уравнению ДК на протяжении многих десятилетий связан с рядом специфических свойств, обуславливающих возможность его применения для описания изоспиновых степеней свободы дираковских частиц (частиц со спином $\frac{1}{2}$, например кварков) [5–8]. Основное внимание при этом будет уделено анализу безмассовых пределов уравнения ДК в рамках подхода теории обобщенных РВУ первого порядка.

Основное содержание

В 1962 г. Кэлером [6] в формализме внешних дифференциальных форм было предложено уравнение

$$(d - \delta - m) \Phi = 0, \quad (2.1)$$

где d – внешняя производная; $\delta = * d *$, обозначение $*$ соответствует оператору де Рама, действие которого в пространстве Минковского сводится к свертке тензоров с тензором Леви – Чивита $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$; Φ – неоднородная дифференциальная форма вида

$$\Phi = \varphi + \varphi_\mu dx_\mu + \frac{1}{2!} \varphi_{[\mu\nu]} dx_\mu \wedge dx_\nu + \frac{1}{3!} \varphi_{[\mu\nu\alpha]} dx_\mu \wedge dx_\nu \wedge dx_\alpha + \frac{1}{4!} \varphi_{[\mu\nu\alpha\beta]} dx_\mu \wedge dx_\nu \wedge dx_\alpha \wedge dx_\beta, \quad (2.2)$$

и символ $\wedge$ означает операцию внешнего произведения.

Тензорный эквивалент уравнения (2.1), (2.2) выглядит так [5; 9]:

$$\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \varphi + m \varphi_\mu = 0, \quad (2.3)$$

$$\partial_\nu \widetilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \widetilde{\varphi} + m \widetilde{\varphi}_\mu = 0, \quad (2.4)$$

$$-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \widetilde{\varphi}_\beta + m \varphi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (2.5)$$

$$\partial_\mu \varphi_\mu + m \varphi = 0, \quad \partial_\mu \widetilde{\varphi}_\mu + m \widetilde{\varphi} = 0. \quad (2.6)$$

Здесь используются обозначения

$$\tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varphi_{[\alpha\beta]}, \quad \tilde{\varphi}_\mu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varphi_{[\nu\alpha\beta]}, \quad \tilde{\varphi} = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varphi_{[\mu\nu\alpha\beta]},$$

где лоренцевские коварианты φ (скаляр), $\tilde{\varphi}$ (псевдоскаляр), φ_μ (вектор), $\tilde{\varphi}_\mu$ (псевдовектор), $\varphi_{[\mu\nu]}$ (антисимметричный тензор второго ранга) сопоставляются неприводимым представлениям полной группы Лоренца $(0,0)$, $(0,0)'$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})'$, $(0,1) \oplus (1,0)$ соответственно и образуют схему зацеплений [10]

$$(0,0) \oplus (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (0,1) \oplus (1,0) \oplus (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})' \oplus (0,0)'. \quad (2.7)$$

Матрично-дифференциальная форма тензорной системы (2.3) – (2.6) имеет вид (1.2), где Γ_μ – матрицы размерности 16×16 , подчиняющиеся перестановочным соотношениям алгебры Клиффорда – Дирака, $\Psi(x)$ – 16-компонентная волновая функция-столбец с компонентами φ , φ_μ , $\varphi_{[\mu\nu]}$, $\tilde{\varphi}_\mu$, $\tilde{\varphi}$. С точки зрения стандартной теории РВУ уравнение ДК описывает микрообъект с ненулевой массой и наборов спинов $s = 0, 1$. Уникальность этого уравнения состоит в динамической неразличимости поля ДК и системы четырех дираковских полей для всех взаимодействий, не нарушающих внутреннюю симметрию лагранжиана, что означает принципиальную возможность применения уравнения ДК для описания частиц со спином $\frac{1}{2}$ и изоспиновыми степенями свободы, имеющими таким образом, геометрическое происхождение.

Безмассовому полю ДК в формализме внешних дифференциальных форм сопоставляется уравнение, которое получается из (2.1) путем предельного перехода $m \rightarrow 0$ (фермионный предел [5]):

$$(d - \delta)\varphi = 0. \quad (2.8)$$

Тензорный эквивалент уравнения (2.8) имеет вид

$$\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \varphi = 0, \quad (2.9)$$

$$\partial_\nu \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \tilde{\varphi} = 0, \quad (2.10)$$

$$-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_\beta = 0, \quad (2.11)$$

$$\partial_\mu \varphi_\mu = 0, \quad \partial_\mu \tilde{\varphi}_\mu = 0. \quad (2.12)$$

Проведем исследование системы (2.9) – (2.12) на предмет возможности описания на ее основе безмассовых дираковских частиц с внутренними квантовыми числами. Предварительно заметим, что подсистема (2.9), (2.10) известна в литературе [11]; подсистема (2.11), (2.12) также обсуждалась: в работах [12; 13] на ее основе осуществлялась попытка «бозонизации» фермионного поля (но без всякой связи с полем Дирака – Кэлера).

Система (2.9) – (2.12) представляет собой прямую сумму 8-компонентных систем (2.9), (2.10) и (2.11), (2.12), каждая из которых инвариантна относительно преобразований полной группы Лоренца. Они могут быть записаны в матрично-дифференциальной форме соответственно:

$$\Gamma_\mu^{(8)} \partial_\mu \chi = 0, \quad \Gamma_\mu^{(8)} \partial_\mu \xi = 0, \quad (2.13)$$

где $\Gamma_\mu^{(8)}$ – матрицы размерности 8×8 , удовлетворяющие алгебре Клиффорда – Дирака; χ и ξ – 8-компонентные волновые функции

$$\chi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \tilde{\varphi} \\ \varphi_{[\mu\nu]} \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \varphi_\mu \\ \tilde{\varphi}_\mu \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

В то же время нетрудно убедиться, что аналогичный предельный переход $m \rightarrow 0$, осуществленный непосредственно в матричном РВУ (1.2), не приведет к прямой сумме двух независимых лоренц-инвариантных тензорных систем дираковского типа для функций χ и ξ . Причиной этого является то обстоятельство, что в случае массивного РВУ волновая функция и само уравнение преобразуются по одному и тому же представлению группы Лоренца; для безмассовых же РВУ указанные представления могут отличаться.

Так, в нашем случае волновая функция χ (2.14) преобразуется по представлению

$$T^{(1)}: (0,0) \oplus (0,0)' \oplus (0,1) \oplus (1,0),$$

а уравнение (2.13), эквивалентное тензорной системе (2.9), (2.10), – по представлению

$$T^{(2)}: (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})'.$$

Для функции ξ (2.14) все наоборот: функция преобразуется по представлению $T^{(2)}$, а уравнение (2.13), эквивалентное системе (2.11), (2.12), – по представлению $T^{(1)}$.

Отсюда следует и то что для безмассового релятивистского волнового уравнения, у которого волновая функция и уравнение преобразуются по различным представлениям группы Лоренца, отсутствует массивный аналог. Кроме того, из матриц $\Gamma_\mu^{(8)}$ и волновых функций χ, ξ можно построить только лоренц-инвариантные билинейные комбинации типа

$$\bar{\xi} \Gamma_\mu^{(1)} \partial_\mu \chi, \quad \bar{\chi} \Gamma_\mu^{(2)} \partial_\mu \xi,$$

которые содержат компоненты обеих функций одновременно. Другими словами, несмотря на то, что системы (2.9), (2.10) и (2.11), (2.12) алгебраически независимы, лагранжева формулировка для каждой из них отсутствует. И, следовательно, физически корректная формулировка теории безмассового поля ДК приводит к необходимости совместного рассмотрения этих систем.

Для установления физического содержания системы (2.9) – (2.12) найдем плотность энергии соответствующего безмассового поля. Лагранжиан, из которого может быть получена данная система, с точностью до несущественного слагаемого типа дивергенции имеет вид

$$L = -\varphi_\mu \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} \varphi_{[\mu\nu]} (\partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu) + \tilde{\varphi}_\mu \partial_\mu \tilde{\varphi} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varphi_{[\mu\nu]} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_\beta. \quad (2.15)$$

Отсюда для тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial \varphi_A}{\partial x_\mu})} \frac{\partial \varphi_A}{\partial x_\nu} - L \delta_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

получаем выражение

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & -\varphi_\mu \partial_\nu \varphi + \tilde{\varphi}_\mu \partial_\nu \tilde{\varphi} - \varphi_{[\mu\alpha]} \partial_\alpha \varphi_\nu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\eta} \varphi_{[\alpha\beta]} \partial_\eta \varphi_\nu + \\ & + \delta_{\mu\nu} \varphi_\alpha \partial_\alpha \varphi + \delta_{\mu\nu} \varphi_{[\alpha\beta]} - \delta_{\mu\nu} \tilde{\varphi}_\alpha \partial_\alpha \tilde{\varphi} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\eta} \varphi_{[\sigma\eta]} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_\beta. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Переписывая (2.17) в импульсном представлении и используя методику, развитую в [9, с. 182–183], найдем:

$$T_{44} = 0, \quad T_{4i} = 0. \quad (2.18)$$

Равенства (2.18) означают, что фермионный безмассовый предел уравнения Дирака – Кэлера приводит к нулевой плотности энергии и импульса, т. е. физического смысла не имеет.

Помимо фермионного безмассового предела (2.9) – (2.12) уравнения ДК представляют интерес тензорные системы

$$\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \varphi = 0, \quad (2.19)$$

$$\partial_\nu \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \tilde{\varphi} = 0, \quad (2.20)$$

$$-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_\beta + \varphi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (2.21)$$

$$\partial_\mu \varphi_\mu + \varphi = 0, \quad \partial_\mu \tilde{\varphi}_\mu + \tilde{\varphi} = 0 \quad (2.22)$$

и

$$\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \varphi + \varphi_\mu = 0, \quad (2.23)$$

$$\partial_\nu \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}_\mu = 0, \quad (2.24)$$

$$-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_\beta = 0, \quad (2.25)$$

$$\partial_\mu \varphi_\mu = 0, \quad \partial_\varphi \varphi_\varphi = 0, \quad (2.26)$$

которые обычно называют бозонными безмассовыми пределами уравнения ДК. Будучи записанными в стандартной матрично-дифференциальной форме (1.1), эти системы отличаются друг от друга видом проективной матрицы Γ_0 .

В тензорном базисе $\Psi = (\varphi_\mu, \tilde{\varphi}_\mu, \varphi_{[\mu\nu]}, \varphi, \tilde{\varphi})$ – столбец, матрица Γ_0 имеет вид

$$\Gamma_0 \begin{pmatrix} o_8 & \\ & I_8 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

для системы (2.19) – (2.22) и

$$\Gamma_0 \begin{pmatrix} I_8 & \\ & o_8 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

в случае системы (2.23) – (2.26).

Рассмотрим сначала систему (2.19) – (2.22). Прежде всего отметим, что все входящие в нее полевые функции удовлетворяют уравнению Даламбера, т. е. данная система действительно описывает безмассовое поле (или поля). Роль потенциалов здесь выполняют вектор $\varphi_\mu(x)$ и псевдовектор $\tilde{\varphi}_\mu(x)$; $\varphi_{[\mu\nu]}(x)$ – тензор напряженностей. Обсуждаемая система инвариантна относительно калибровочных преобразований потенциалов

$$\varphi_\mu \rightarrow \varphi'_\mu = \varphi_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad \tilde{\varphi}_\mu \rightarrow \tilde{\varphi}'_\mu = \varphi_\mu + \partial_\mu \tilde{\Lambda}, \quad (2.29)$$

где калибровочные функции $\Lambda(x)$, $\tilde{\Lambda}(x)$ удовлетворяют условиям

$$\square \Lambda(x) = 0, \quad \square \tilde{\Lambda}(x) = 0. \quad (2.30)$$

Таким же уравнениям удовлетворяют скалярные функции $\varphi(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, т. е. они играют роль калибровочных полей и никаких физических полей не описывают. В итоге приходим к заключению, что система (2.19) – (2.22) описывает безмассовое векторное поле с двукратным вырождением состояний, частным случаем которого является обычное электромагнитное поле.

В системе (2.23) – (2.26) роль потенциалов выполняют величины φ_0 , $\tilde{\varphi}_0$, $\varphi_{[\mu\nu]}$, а в качестве напряженностей выступают вектор φ_μ и псевдовектор $\tilde{\varphi}_\mu$. При этом

уравнения (2.23), (2.24) являются определениями напряженностей через потенциалы, а (2.25), (2.26) – уравнениями движения. Как и в предыдущем случае, нетрудно убедиться, что все полевые функции системы (2.23) – (2.26) удовлетворяют уравнению Даламбера, т. е. данная система также описывает безмассовое поле.

Для выяснения физического смысла этой системы учтем, что она инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned}\varphi_{[\mu\nu]} &\rightarrow \varphi'_{[\mu\nu]} = \varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \Lambda_\nu(x) - \partial_\nu \Lambda_\mu(x), \\ \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} &\rightarrow \tilde{\varphi}'_{[\mu\nu]} = \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \tilde{\Lambda}_\nu(x) - \partial_\nu \tilde{\Lambda}_\mu(x), \\ \varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi + \Lambda(x), \quad \tilde{\varphi} \rightarrow \tilde{\varphi}' = \tilde{\varphi} + \tilde{\Lambda}(x),\end{aligned}\tag{2.31}$$

где калибровочные функции $\Lambda_\mu(x)$, $\tilde{\Lambda}_\mu$, $\Lambda(x)$, $\tilde{\Lambda}(x)$ должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned}\square \Lambda_\mu(x) - \partial_\mu \partial_\nu \Lambda_\nu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) &= 0, \\ \square \tilde{\Lambda}_\mu(x) - \partial_\mu \partial_\nu \tilde{\Lambda}_\nu(x) + \partial_\mu \tilde{\Lambda}(x) &= 0.\end{aligned}\tag{2.32}$$

Калибровочные преобразования (2.31), (2.32) приводят к тому, что из восьми полевых величин $\varphi_{[\mu\nu]}$ ($\tilde{\varphi}_{[\mu\nu]}$), φ , $\tilde{\varphi}$ независимыми являются только две составляющие тензор-потенциала $\varphi_{[\mu\nu]}$ ($\tilde{\varphi}_{[\mu\nu]}$) и величины φ , $\tilde{\varphi}$, описывающие соответственно скалярное и псевдоскалярное безмассовые поля [9, стр. 177–180].

Согласно [14] компоненты тензор-потенциала соответствуют состояниям безмассовых векторного (поле Кальба – Рамонда [15]) и псевдовекторного (нотиф Огиевского – Полубаринова [16]) полей с продольной поляризацией, но переносящих во взаимодействиях спин 1. С учетом этого можно сделать вывод: тензорная система (2.23) – (2.26) описывает объединенное поле Кальба – Рамонда – Огиевского – Полубаринова и безмассовое скалярное поле с удвоенным набором состояний (скалярное плюс псевдоскалярное) как единый физический микрообъект.

Заключение

Рассмотрены три безмассовых предела уравнения Дирака – Кэлера: фермионный, соответствующий выбору матрицы $\Gamma_0 = 0$ в уравнении (1.1), и два бозонных, при которых матрица Γ_0 имеет вид (2.27) или (2.28). Использовались тензорный формализм и подход теории обобщенных РВУ первого порядка.

Показано, что фермионный предел приводит к нулевой плотности энергии и импульса, т. е. никакому реальному физическому полю не соответствует.

Бозонный предел с матрицей Γ_0 (2.28) (тензорная система (2.23) – (2.26)) дает совместное описание поля Кальба – Рамонда и нотифа Огиевского – Полубаринова, а также скалярного и псевдоскалярного полей. В работе [15] тензор-потенциал $\varphi_{[\mu\nu]}$ трактуется в качестве потенциала поля, описывающего взаимодействие замкнутых струн в пространстве размерности $d = 4$. В [16] безмассовое псевдоскалярное поле $\tilde{\varphi}$ передает взаимодействие между мембранами второго порядка. В русле этих трактовок логично интерпретировать тензорную систему (2.23) – (2.26) в качестве феноменологической модели для описания полей, осуществляющих взаимодействие замкнутых струн и мембран в пространстве $d = 4$.

В случае открытых струн одной только системы (2.23) – (2.26) недостаточно. Взаимодействие концов открытых струн естественно описывать посредством электромагнитного поля. В качестве подходящей для этой цели модели может служить тензорная система (2.19) – (2.22) – безмассовый предел уравнения ДК с матрицей Γ_0 (2.27), т. е. тензорная система (2.19) – (2.22).

Таким образом, предлагаемая трактовка бозонных безмассовых пределов уравнения Дирака – Кэлера дает ключ к пониманию физического смысла этого уравнения: в безмассовом варианте оно может выступать в качестве феноменологической модели для описания взаимодействий заряженных микрообъектов, геометрическим образом которых является не точка, а струна.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Федоров, Ф. И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф. И. Федоров // Доклады АН СССР. – 1952. – Т. 82, № 1. – С. 37–40.
2. Bhabha, H. J. Relativistic wave equations for the elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1945. – Vol. 17, nr 2-3. – P. 200–216.
3. Bhabha, H. J. On the postulational basis of the theory of elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1949. – Vol. 21, nr 3. – P. 451–462.
4. Harish-Chandra. Relativistic equations for elementary particles / Harish-Chandra // Proc. Roy. Soc. – 1948. – Vol. A192. – P. 195–218.
5. Стражев, В. И. Уравнение Дирака – Кэлера. Классическое поле / В. И. Стражев, И. А. Сатиков, Д. А. Ционенко. – Минск : БГУ, 2007. – 195 с.
6. Kähler, E. Der innere differentialkalkul / E. Kähler // Rendiconti di Mat. (Roma). – 1962. – Ser. S. – Vol. 21, nr 3–4. – P. 343–361.
7. Darwin, C. G. The wave equation of the electron / C. G. Darwin // Proc. Roy. Soc. A. – 1928. – Vol. 118. – P. 654–680.
8. Боргардт, А. А. Матричные аспекты теории бозонов / А. А. Боргардт // ЖЭТФ. – 1956. – Т. 30, № 2. – С. 334–341.
9. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 326 с.
10. Плетюхов, В. А. К теории частиц с максимальным спином 1 / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Весці АН БССР, Сер. фіз.-мат. навук. – 1983. – № 5. – С. 94–98.
11. Стражев, В. И. О группе симметрии обобщенных уравнений векторного поля / В. И. Стражев // Изв. вузов СССР. Физика. – 1977. – № 8. – С. 45–48.
12. Garbaczewski, P. Quantization of spinor fields. Meaning of «bosonization» in 1+1 and 1+3 dimension / P. Garbaczewski // J. Math. Phys. – 1982. – Vol. 23, nr 3 – P. 442–450.
13. Aratyn, H. A Bose representation for the massless Dirac field in four dimensions / H. Aratyn // Nucl. Phys. – 1983. – Vol. B227, nr 1. – P. 172–188.
14. Огиевецкий, В. И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В. И. Огиевецкий, И. В. Полубаринов // ЯФ. – 1966. – Т. 4. – вып. 1. – С. 216–223.
15. Kalb, M. Classical direct interesting action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 9, nr 8. – P. 2273–2284.
16. Aurilia, A. Generalized Maxwell equations and the gauge mixing mechanism of mass generation / A. Aurilia, Y. Takahashi // Progr. Theor. Phys. – 1981. – Vol. 66. – P. 693–712.

REFERENCES

1. Fiodorov, F. I. Obobshchionnyje rieliativistskije volnovyje uravnienija / F. I. Fiodorov // Doklady AN SSSR. – 1952. – Т. 82, № 1. – S. 37–40.
2. Bhabha, H. J. Relativistic wave equations for the elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1945. – Vol. 17, nr 2-3. – P. 200–216.
3. Bhabha, H. J. On the postulational basis of the theory of elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1949. – Vol. 21, nr 3. – P. 451–462.

4. Harish-Chandra. Relativistic equations for elementary particles / Harish-Chandra // Proc. Roy. Soc. – 1948. – Vol. A192. – P. 195–218.
5. Strazhev, V. I. Uravnenije Diraka – Keliera. Klassichieskoje polie / V. I. Strazhev, I. A. Satikov, D. A. Cionienko. – Minsk : BGU, 2007. – 195 s.
6. Kähler, E. Der innere differentialkalkul / E. Kähler // Rendiconti di Mat. (Roma). – 1962. – Ser. S. – Vol. 21, nr 3–4. – P. 343–361.
7. Darwin, C. G. The wave equation of the electron / C. G. Darwin // Proc. Roy. Soc. A. – 1928. – Vol. 118. – P. 654–680.
8. Borgardt, A. A. Matrichnyje aspiekty tieorii bozonov / A. A. Borgardt // ZhETF. – 1956. – T. 30, № 2. – S. 334–341.
9. Plietiukhov, V. A. Rielativistskije volnovyje uravnenija i vnutriennije stiepieni svobody / V. A. Plietiukhov, V. M. Ried'kov, V. I. Strazhev. – Minsk : Bielarus. navuka, 2015. – 326 s.
10. Plietiukhov, V. A. K tieorii chastic s maksimal'nym spinom 1 / V. A. Plietiukhov, V. I. Strazhev // Viesci AN BSSR, Cier. fiz.-mat. navuk. – 1983. – № 5. – S. 94–98.
11. Strazhev, V. I. O gruppie simmetrii obobshchionnykh uravnenij viktornogo polia / V. I. Strazhev // Izv. vuzov SSSR. Fizika. – 1977. – № 8. – S. 45–48.
12. Garbaczewski, P. Quantization of spinor fields. Meaning of «bosonization» in 1+1 and 1+3 dimension / P. Garbaczewski // J. Math. Phys. – 1982. – Vol. 23, nr 3 – P. 442–450.
13. Aratyn, H. A Bose representation for the massless Dirac field in four dimensions / H. Aratyn // Nucl. Phys. – 1983. – Vol. B227, nr 1. – P. 172–188.
14. Ogijevieckij, V. I. Notof i jeho vozmozhnyje vzaimodiejstvija / V. I. Ogijevieckij, I. V. Polubarinov // JAF. – 1966. – T. 4. – vyp. 1. – S. 216–223.
15. Kalb, M. Classical direct interesting action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 9, nr 8. – P. 2273–2284.
16. Aurilia, A. Generalized Maxwell equations and the gauge mixing mechanism of mass generation / A. Aurilia, Y. Takahashi // Progr. Theor. Phys. – 1981. – Vol. 66. – P. 693–712.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.04.2025

УДК 537.533; 621.384

DOI 10.63874/2218-0303-2025-1-13-21

**Дмитрий Анатольевич Антонович¹, Марина Александровна Сковородко²,
Диана Владимировна Шидловская³**

¹канд. техн. наук, доц., ведущий науч. сотрудник
отдела электронно-лучевых технологий и физики плазмы
Физико-технического института Национальной академии наук Беларуси

²магистр техн. наук, ст. преподаватель каф. физики
Полоцкого государственного университета имени Евфросинии Полоцкой

³преподаватель каф. прикладного и системного программирования
Витебского государственного университета имени П. М. Машерова

Dmitry Antonovich¹, Marina Skovorodko², Diana Shidlovskaya³

¹Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
Leading Researcher of the Department of Electron Beam Technologies and Plasma Physics
of the Physical-Technical Institute of National Academy of Sciences of Belarus

²Master of Technical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Physics
of Polotsk State University named after Euphrosyne of Polotsk

³Teacher of the Department of Applied and System Programming
of Vitebsk State University named after P. M. Masherov
e-mail: ²volal26@ya.ru; ³dianabirukovaseal@gmail.com

ПЛАЗМЕННЫЕ ИСТОЧНИКИ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧНЫХ ИОННО-ЭЛЕКТРОННЫХ СОВМЕЩЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ ПУЧКОВ

Представлены некоторые результаты, полученные в результате исследований разработанных ранее плазменных источников низкоэнергетических ионно-электронных совмещенных в пространстве пучков, в конструкции которых были внесены изменения, касающиеся формы и геометрических характеристик эмиссионного канала и протяженности ускоряющих промежутков. Показано, что двойная плазменная эмиссионная система, формируемая в подобных конструкциях, представляющих собой две соединенных последовательно (вдоль оси) газоразрядных ячейки «пеннинговского» типа, за счет обратного потока зарядов из вторичной плазмы в эмитирующую и частичной компенсации объемного заряда пучка, способствует увеличению тока эмиссии и обладает повышенным первеансом. Кроме того, в рассматриваемых конструкциях за счет снижения радиального градиента потенциала в ускоряющем промежутке обеспечивается уменьшение расходимости пучка и повышается токопрохождение. Приведены вольт-амперные и эмиссионные характеристики для различных условий и режимов работы источников. Показано, что достигаемые параметры свидетельствуют о возможности использования разработанных конструкций в качестве прототипов технологических источников низкоэнергетических ионно-электронных совмещенных в пространстве пучков.

Ключевые слова: электронно-ионные лучевые технологии, плазменные источники электронов, плазменные источники ионов, плазменные эмиссионные системы, электронно-ионные технологии, совмещенные электронно-ионные низкоэнергетические пучки.

Plasma Sources of Low-Energy Ion-Electron Space-Combined Beams

The paper presents some results obtained in the studies of previously developed plasma sources of low-energy ion-electron spatially aligned beams, the design of which was modified to include the shape and geometric characteristics of the emission channel and the length of the accelerating gaps. It is shown that a double plasma emission system formed in such designs, which are two Penning-type gas-discharge cells connected in series (along the axis), due to the reverse charge flow from the secondary plasma to the emitting plasma and partial compensation of the beam space charge, contributes to an increase in the emission current and has an increased perveance. In addition, in the designs under consideration, due to a decrease in the radial potential gradient in the accelerating gap, a decrease in the beam divergence is ensured and current flow is increased. Current-voltage and emission characteristics are given for various conditions and operating modes of the sources. It is shown that the achieved parameters indicate the possibility of using the developed designs as prototypes of technological sources of low-energy ion-electron beams combined in space.

Key words: electron-ion beam technologies, plasma electron sources, plasma ion sources, plasma emission systems, electron-ion technologies, combined electron-ion low-energy beams.

Введение

В современных электронно-ионных лучевых технологиях модификации поверхностей активно развивается область, связанная с использованием пучков заряженных частиц, которые генерируются пушками на основе плазменных образований, являющихся альтернативой термокатодным источникам [1–3].

Одновременно с этим прогресс в технологиях, требующих одновременного воздействия на материалы как электронными, так и ионными пучками, которые в настоящее время реализуются с помощью отдельных источников, способствует поиску решений для создания источников, способных генерировать совмещенные (комбинированные) электронно-ионные пучки [4; 5] с параметрами, удовлетворяющими требованиям таких технологий.

Как было показано ранее [4; 5], одним из возможных подходов к формированию совмещенных электронно-ионных пучков в источниках на основе плазменных эмиттеров является создание газоразрядной структуры, в которой формируются два последовательно расположенных электрических слоя.

В одном из слоев генерируется поток зарядов (ионов или электронов), в то время как другой электрический слой обеспечивает поток зарядов противоположного знака в том же направлении, оставаясь «прозрачным» для потока зарядов из первого слоя.

Очевидно, что такая система формирования совмещенных пучков заряда более сложна по сравнению с известными плазменными источниками электронов и ионов.

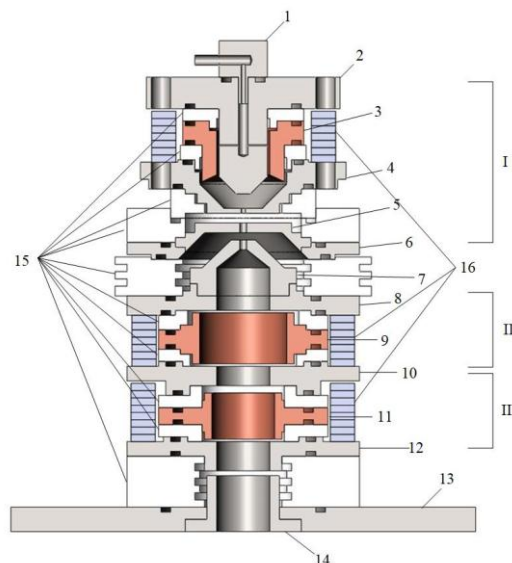
Тем не менее в некоторых случаях она может оказаться наиболее эффективной за счет одновременного воздействия на обрабатываемую поверхность пучками заряженных частиц обоих знаков – термического assisting электронного и модифицирующего ионного.

Полученные ранее первичные результаты позволяют предполагать, что подобные системы обладают повышенным первенством при формировании электронных пучков благодаря частичной или полной компенсации объемного ионного заряда и увеличению концентрации плазмы в области первичной эмиссии.

В данной работе представлены некоторые результаты, полученные при дальнейшей оптимизации разработанных ранее конструкций плазменных источников низкоэнергетических ионно-электронных совмещенных в пространстве пучков [4; 5], в которых осуществлены конструктивные изменения в части формы и геометрических характеристик (диаметр, протяженность) эмиссионных отверстий, а также протяженности промежутков ускорения.

Электродная структура плазменных источников низкоэнергетических ионно-электронных совмещенных в пространстве пучков

Экспериментальные исследования проводились с разработанными макетами плазменных источников низкоэнергетических ионно-электронных совмещенных в пространстве пучков, представленных в [4], электродные структуры которых приведены на рисунках 1 и 2.

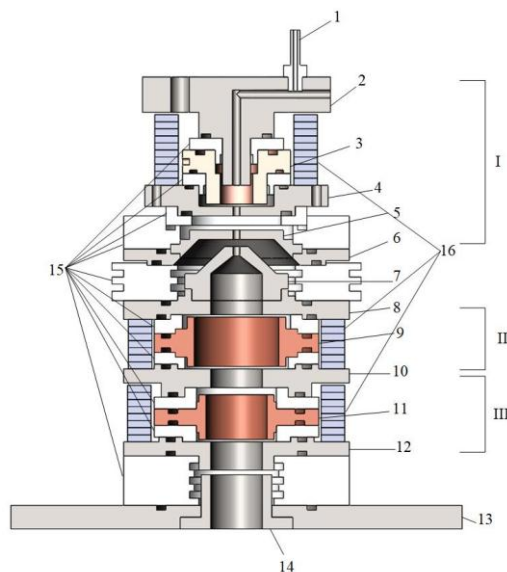


1 – канал для напуска плазмообразующего газа; 2, 4, 8, 10, 12 – катоды; 3, 6, 9, 11 – аноды; 5 – эмиттерный электрод; 7 – экстрактор; – катоды; 13 – фланец; 14 – согласующий электрод; 15 – изоляторы; 16 – постоянные магниты I, II, III – области разрядных камер

Рисунок 1 – Электродная структура плазменного источника низкоэнергетичных ионно-электронных совмещенных в пространстве пучков со скрещенными $E \times H$ полями [4]

Экспериментальный вариант макета плазменного источника совмещенных ионных и электронных низкоэнергетичных пучков (рисунок 1) конструктивно состоит из трех блоков. Первый (верхний, область I на рисунке 1) блок, состоящий из катодов 2 и 4, анода 3 и эмиттерного электрода 5, отвечает за генерацию первичной плазмы, эмитирующей электроны. К этому же блоку относится промежуток ускорения электронов – электроды 6 и 7, где происходит извлечение и формирование электронного пучка. Далее, во втором (среднем, область II на рисунке 1) блоке, состоящем из катодов 8, 10 и анода 9, и третьем (нижнем, область III на рисунке 1) – катоды 10, 12 и анод 11 создается эмитирующая ионы, поверхность. При этом данные блоки соответствуют характеристикам устройства, называемого «ячейкой Пеннинга», в котором совмещаются однородное магнитное и неоднородное электрическое поля, определенная комбинация которых позволяет удерживать заряженные частицы в пространственной области вдоль оси газоразрядной структуры. В нижней части макета расположены электроды 12 и 14, которые могут одновременно как ускорять ионы, так и тормозить электроны.

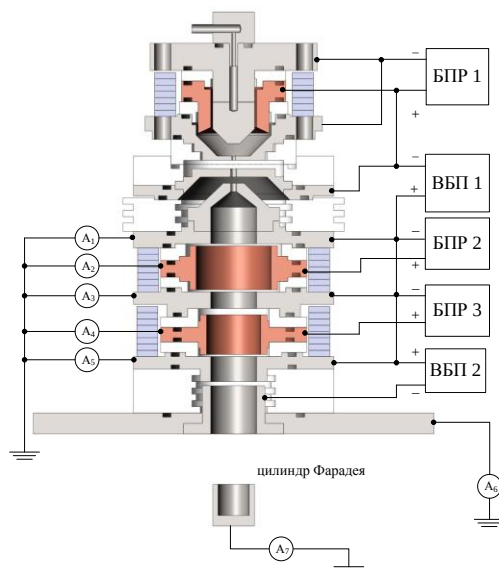
На рисунке 2 приведена электродная структура макета плазменного источника низкоэнергетичных ионно-электронных совмещенных в пространстве пучков с полым катодом. В данной конструкции эмитирующая электроны плазма формируется при подаче разрядного напряжения на электроды разрядной камеры I в области, ограниченной полым катодом 2, катодом 4 и анодом 3. На начальной стадии плазма формируется в области между плоскими частями катодов 2 и 4. Дальнейшее увеличение разрядного напряжения приводит к увеличению тока разряда и концентрации плазмы. При некотором значении тока разряда и концентрации плазмы она проникает в полость катода 2 и стимулирует в ней ионизационные процессы. В этот момент разряд переходит в рабочий режим формирования эмитирующей плазмы – разряд с полым катодом – и концентрация плазмы скачком достигает значений порядка $10^{11} - 10^{12} \text{ м}^{-3}$. Дальнейший механизм работы аналогичен предыдущей структуре.



1 – канал для напуска плазмообразующего газа; 2, 4, 8, 10, 12 – катоды; 3, 6, 9, 11 – аноды; 5 – эмиттерный электрод; 7 – экстрактор; 13 – фланец; 14 – согласующий электрод; 15 – изоляторы; 16 – постоянные магниты, I, II, III – области разрядных камер

Рисунок 2 – Электродная структура плазменного источника низкоэнергетических ионно-электронных совмещенных в пространстве пучков с полым катодом [4]

На рисунке 3 представлена схема подключения электродов разрядных камер разработанного макета источника заряженных частиц со скрещенными $E \times H$ полями [6] к системе электропитания. Индивидуальное подключение каждой разрядной камеры единой конструкции позволяет обеспечить работу всего источника в целом в различных режимах: генерация электронного, ионного и электронно-ионного пучков. Подключения для макета источника с полым катодом аналогичны.



БПР – блок питания разряда соответствующей разрядной (I, II или III камеры) с напряжением разряда U_d до 1000 В и током I_d до 1,2 А; ВБП – высоковольтный блок питания с ускоряющим напряжением U_{ac} до 5 кВ и током до 0,5 А; ВБП 1 – блок ускорения электронов; ВБП 2 – блок ускорения ионов A1 – A7 – амперметры

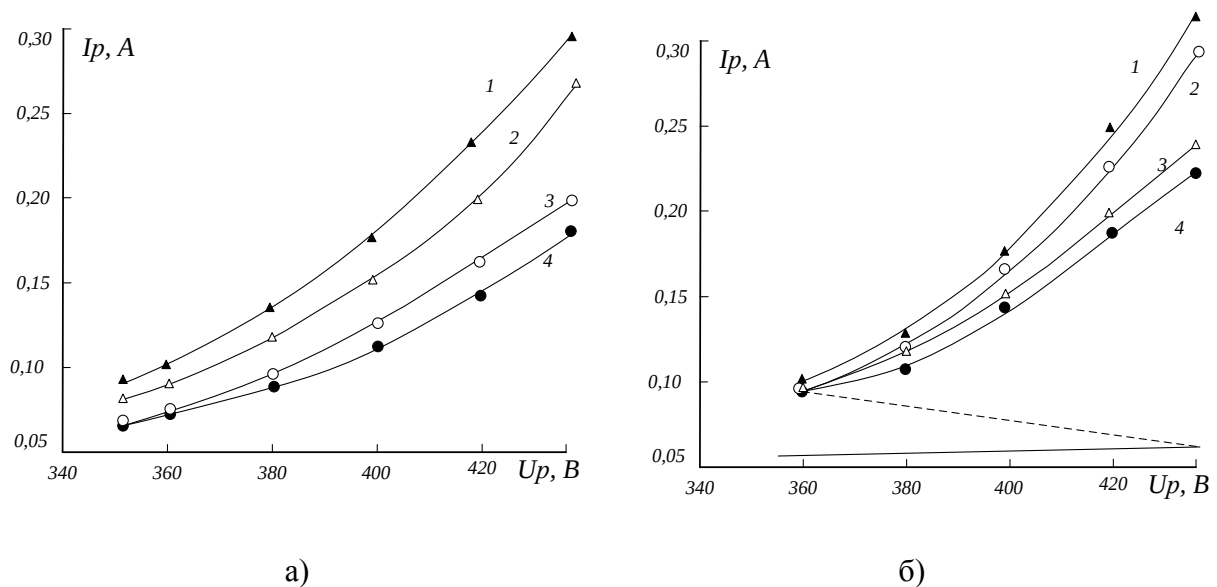
Рисунок 3 – Схема подключения электродов разрядных камер к системе электропитания

Необходимо отметить, что в ходе экспериментов в цилиндр Фарадея (рисунок 3) принимался пучок электронов, ионов или смешанный, электронно-ионный пучок в зависимости от режима работы источника. И в качестве соответствующего тока (электронного или ионного) принимался ток амперметра A_7 (рисунок 3) без учета полярности. На полученных характеристиках, представленных ниже, данный ток обозначен, соответственно, как ток электронного пучка – I_e или ионного I_i .

С представленными макетами плазменных источников низкоэнергетичных ионно-электронных совмещенных в пространстве пучков проводились исследования по извлечению электронов и ионов при инициации разрядов в различных камерах I, II и III.

Эксперименты показали, что вид вольт-амперных характеристик является типичным для структур такого типа (рисунок 4) и не зависит от наличия или отсутствия инициации разряда во всех камерах.

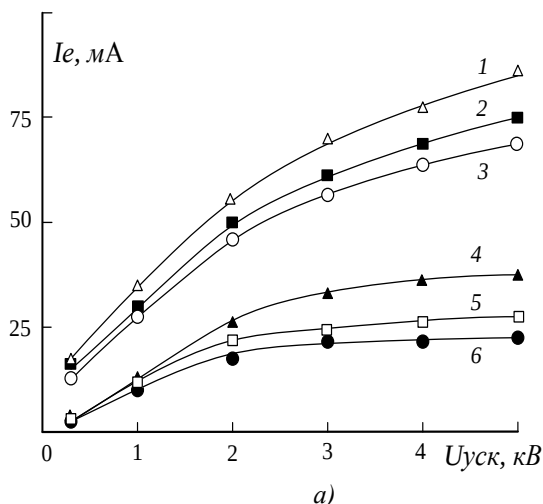
Далее приведены полученные результаты для конструкции, представленной на рисунке 1. Для макета плазменного источника низкоэнергетичных ионно-электронных совмещенных в пространстве пучков с полым катодом (рисунок 2) результаты оказались подобными и в тексте статьи не приводятся.



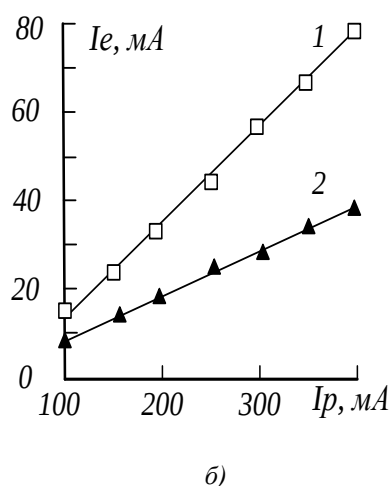
Напуск газа Q : 1, 3 – $3,5 \text{ мПа} \cdot \text{м}^3/\text{с}$; 2, 4 – $2,2 \text{ мПа} \cdot \text{м}^3/\text{с}$

Рисунок 4 – Вольт-амперные характеристики разряда для I (1, 2) и II (3, 4) разрядных камер при одновременном формировании разрядов в указанных камерах для конструкции, представленных на рисунке 1 (а) и рисунке 2 (б)

На рисунке 5а приведены характеристики извлечения электронов с инициацией разряда в нижней камере (II, рисунок 1) и без, а на рисунке 5б приведена эмиссионная характеристика источника при фиксации на уровне 5 кВ напряжения, ускоряющего электроны, и инициацией разряда в нижней камере (II, рисунок 1).



а) эмиссионная характеристика при наличии (1–3) и отсутствии (4–6) инициации разряда в разрядной камере II (электроды 8–10, рисунок 1) для различных напусков газа Q : 1, 4 – $3,5 \text{ мПа} \cdot \text{м}^3/\text{с}$; 2, 5 – $3 \text{ мПа} \cdot \text{м}^3/\text{с}$; 3, 6 – $2 \text{ мПа} \cdot \text{м}^3/\text{с}$; параметры разряда: в камере I (рисунок 1) $U_p = 415 \text{ В}$, $I_p = 0,2 \text{ А}$; в камере II (рисунок 1) $U_p = 420 \text{ В}$, $I_p = 0,15 \text{ А}$

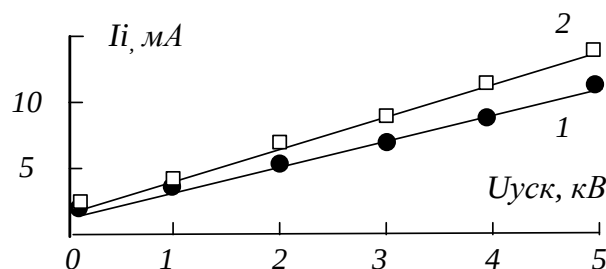


б) вольт-амперная характеристика извлечения при наличии (1) и отсутствии (2) инициации разряда в разрядной камере II (электроды 8–10, рисунок 1), напуск газа Q : 1, 2 – $3,5 \text{ мПа} \cdot \text{м}^3/\text{с}$; параметры в камере II (рисунок 1) $U_p = 420 \text{ В}$, $I_p = 0,15 \text{ А}$

Рисунок 5 – Характеристика извлечения электронов в структуре на основе разряда в скрещенных $E \times H$ полях

Анализ полученных характеристик подтверждает гипотезу о том, что при инициации разряда в камере II (рисунок 1) поток ионов из плазмы, образовавшейся в этой области, направляется в верхнюю структуру (камера I, рисунок 1). Это способствует частичной компенсации электронного объемного заряда в ускоряющем промежутке, увеличению ионизации газа в области отбора электронов и, как следствие, повышению плотности эмиссионного тока. В результате наблюдается общее увеличение первеанса источника (рисунок 5а, кривые 1–3 и рисунок 5б, кривая 1).

На рисунке 6 представлена вольт-амперная характеристика извлечения ионов при формировании разряда в камерах II и III. Видно, что такой режим работы данного источника отличается низкой эффективностью и представляется малоперспективным для дальнейшей работы.



1 – напуск газа Q : $2 \text{ мПа} \cdot \text{м}^3/\text{с}$; $U_p = 420 \text{ В}$, $I_p = 0,15 \text{ А}$; 2 – напуск газа Q : $3,5 \text{ мПа} \cdot \text{м}^3/\text{с}$; $U_p = 450 \text{ В}$, $I_p = 0,2 \text{ А}$

Рисунок 6 – Характеристики извлечения ионов при наличии разрядов во II и III камерах (рисунок 1)

При формировании электронно-ионного пучка низковольтный разряд зажигался во всех трех камерах (I, II и III – рисунок 1). Электронный пучок, извлекаемый из разрядной камеры I (рисунок 1), ускоряется между электродами 5 и 7 (рисунок 1) и движется вдоль оси конструкции, попадая в разрядные камеры II и III (рисунок 1), что способствует увеличению плотности плазмы, эмитирующей ионы, в этих камерах. Ускоряющее для ионов напряжение прикладывается между электродами 12 и 14 (рисунок 1), в результате чего на выходе источника формируется ионно-электронный пучок. Как указано в [5], влияние полей двойных электрических слоев, образующихся в данной структуре, значительно уменьшается при ускоряющих напряжениях свыше 1,5 кВ, а токи электронной и ионной компонент в электронно-ионном пучке в этом случае имеют определенные значения. На рисунке 7 представлены вольт-амперные характеристики извлечения для электронов (рисунок 7а) и ионов (рисунок 7б) при ускоряющих напряжениях в диапазоне свыше 1,5 кВ. Эмиссионная характеристика, показанная на рисунке 7а, была получена при напряжении ускорения ионов 1,5 кВ и ускоряющем электроны напряжением в диапазоне 1,5–5 кВ. Аналогично, эмиссионная характеристика на рисунке 7б, была получена при фиксированном напряжении ускорения электронов 1,5 кВ и ускоряющем ионы напряжением в диапазоне 1,5–5 кВ.

На рисунке 8 показан внешний вид электронного (а) и ионного (б) пучков.

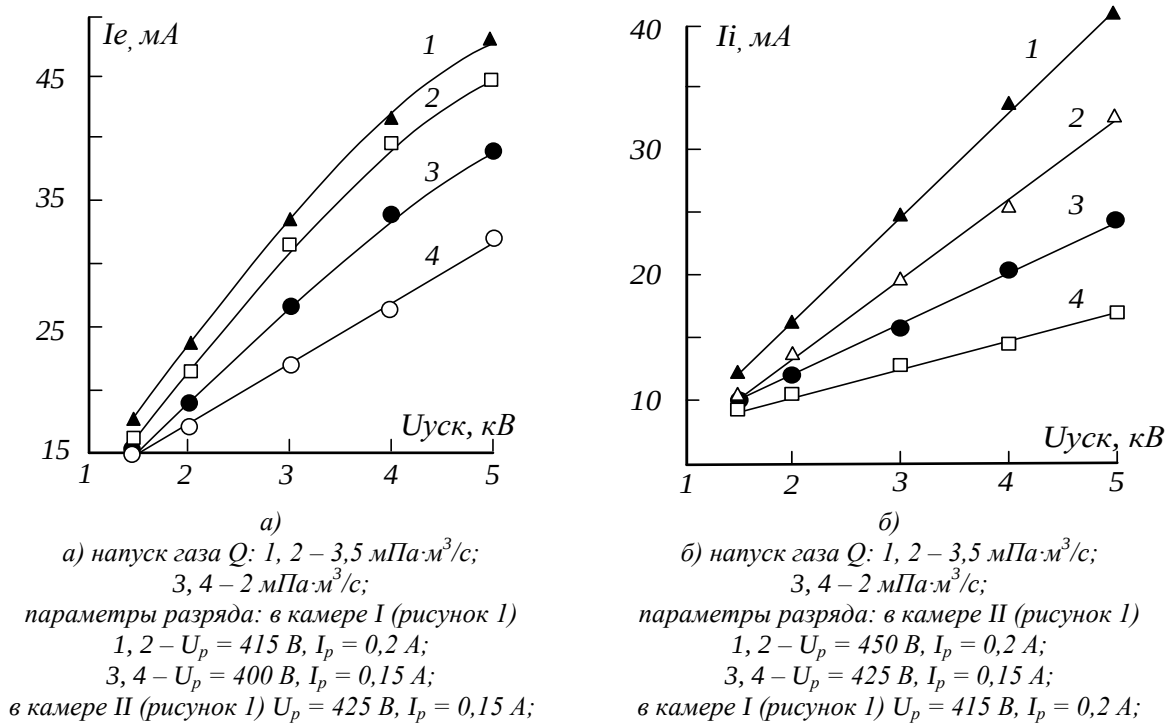
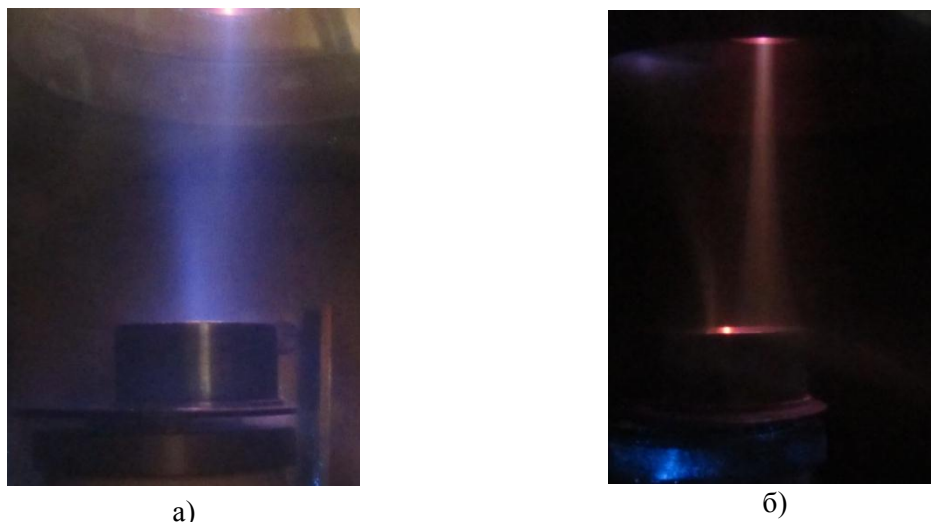


Рисунок 7 – Электронная (а) и ионная (б) характеристики извлечения при генерации совмещенного электронно-ионного пучка



**Рисунок 8 – Электронный (а) и ионный (б) пучки
(ускоряющее напряжение $U_{\text{уск}} = 5 \text{ кВ}$; $I_e = 45 \text{ мА}$; $I_i = 40 \text{ мА}$)**

Анализ экспериментальных данных и их сравнение с результатами расчетов позволил оценить эмиссионную способность в ионном режиме. Существуют основания предполагать, что при эмиссии электронов положение эмитирующей плазменной поверхности в конструкции подчиняется закону «степени $3/2$ » в плоской геометрии и задается равенством плотности тока эмиссии и тепловой плотности электронного тока в плазме [2, 7]:

$$\frac{1}{4} en \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{e}{m_e}} \frac{U^{3/2}}{l_{\text{сл}}^2}$$

где n – концентрация плазмы; $l_{\text{сл}}$ – протяженность ускоряющего промежутка; T_e – электронная температура; U – ускоряющее напряжение (потенциал ускоряющего электрода относительно плазмы); m_e, e – масса и заряд электрона; ε_0, k – постоянные.

Для рассматриваемых разрядов электронная температура, как правило, составляет 5–6 эВ [8], тогда при параметрах, соответствующих экспериментам (ускоряющее напряжение 5 кВ, протяженность промежутка ускорения 5 мм), выражение (1) позволяет оценить концентрацию плазмы, которая составляет $(2 - 3) \times 10^{16} \text{ м}^{-3}$. Поскольку плотность ионного тока соответствует бомовской плотности тока, то при заданных параметрах плотность ионного тока эмиссии составит 15–20 А/м², что достаточно для реализации широкого спектра технологий модификации поверхностей [9].

Заклучение

Представленные в данной работе конструкции и их характеристики подтверждают возможность создания низкоэнергетичных совмещенных электронно-ионных пучков, а также демонстрируют перспективы их применения для решения актуальных задач, связанных с электронно-лучевым ассистированием плазмохимических процессов или комбинированным воздействием электронно-ионными потоками. Рассмотренные конструкции могут служить прототипами технологических источников, формирующих скомпенсированные ионные пучки, пучки нейтральных атомов, а также для реализации попеременного (комбинированного) или одновременного воздействия пучками обоих типов заряженных частиц.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Физика и технология плазменных эмиссионных систем / под общ. ред. В. Т. Барченко. – СПб. : Изд-во Санкт-Петерб. гос. электротехн. ун-та «ЛЭТИ», 2014. – 286 с.
2. Источники электронов с плазменным эмиттером / Ю. Е. Крейндель [и др.]. – Новосибирск : Наука, 1983. – 120 с.
3. Плазменные процессы в технологических электронных пушках / М. А. Завьялов [и др.] – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 212 с.
4. Плазменный источник заряженных частиц для формирования совмещенных ионно-электронных пучков / Д. А. Антонович [и др.] // Известия НАН Беларуси. Серия физико-технических наук. – 2020. – Т. 65, № 3. – С. 285–291.
5. Antonovich, D. A. Features of Electron Optical Systems with the Plasma Emitter Based on Stationary Double Electric Layers in the Plasma / D. A. Antonovich, V. A. Gruzdev, V. G. Zalesski // Russian Physics Journal. – 2021. – Vol. 63, nr 10. – P. 1713–1720.
6. Залесский, В. Г. Эмиссионные и электронно-оптические системы плазменных источников электронов : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.04 / Залесский Виталий Геннадьевич. – Минск, 2015. – 316 л.
7. Лоусон, Дж. Физика пучков заряженных частиц / Дж. Лоусон ; пер. с англ. А. В. Агафонова. – М. : Мир, 1980. – 438 с.
8. Райзер, Ю. П. Основы современной физики газоразрядных процессов / Ю. П. Райзер. – М. : Наука, 1980. – 416 с.
9. Ионно-плазменные технологии в электронном производстве : монография / В. Т. Барченко, Ю. А. Быстров, Е. А. Колгин ; под ред. Ю. А. Быстрова. – СПб. : Энергоатомиздат, 2001. – 331 с.

REFERENCES

1. Fizika i tiekhnologija plazmiennykh emissionnykh sistiem / pod obshch. ried. V. T. Barchienko. – SPb. : Izd-vo Sankt-Pietierb. gos. eliektrotiekhn. un-ta «LETI», 2014. – 286 s.
2. Istochniki eliektronov s plazmiennym emittierom / Ju. Je. Krejndel' [i dr.]. – Novosibirsk : Nauka, 1983. – 120 s.
3. Plazmiennyje prociessy v tiekhnologichieskikh eliektronnykh pushkakh / M. A. Zavjalov [i dr.] – M. : Energoatomizdat, 1989. – 212 s.
4. Plazmiennyj istochnik zariazhennykh chastic dlja formirovanija sovmieshchionnykh ionno-eliektronnykh puchkov / D. A. Antonovich [i dr.] // Izviestija NAN Bielarusi. Sierija fiziko-tiekhnichieskikh nauk. – 2020. – T. 65, № 3. – S. 285–291.
5. Antonovich, D. A. Features of Electron Optical Systems with the Plasma Emitter Based on Stationary Double Electric Layers in the Plasma / D. A. Antonovich, V. A. Gruzdev, V. G. Zalesski // Russian Physics Journal. – 2021. – Vol. 63, nr 10. – P. 1713–1720.
6. Zaliesskij, V. G. Emissionnyje i eliektronno-optichieskije sistiemy plazmiennykh istochnikov eliektronov : dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk : 01.04.04 / Zaliesskij Vitalij Giennad'jevich. – Minsk, 2015. – 316 l.
7. Louson, Dzh. Fizika puchkov zariazhennykh chastic / Dzh. Louson ; pier. s angl. A. V. Agafonova. – M. : Mir, 1980. – 438 s.
8. Rajzer, Ju. P. Osnovy sovriemiennoj fiziki gazorazriadnykh processov / Ju. P. Rajzier. – M. : Nauka, 1980. – 416 s.
9. Ionno-plazmiennyje tiekhnologii v eliektronnom proizvodstvie : monografija / V. T. Barchienko, Ju. A. Bystrov, Je. A. Kolgin ; pod ried. Ju. A. Bystrova. – SPb. : Energoatomizdat, 2001. – 331 s.

УДК 539.12

DOI 10.63874/2218-0303-2025-1-22-28

Alina Ivashkevich¹, Polina Sachenok², Elena Ovsyuk³¹Junior Researcher of Fundamental Interaction and Astrophysics Center
of B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus²3-d Year Student of the Physics and Engineering Faculty

of Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin

³Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

Leading Researcher of F. Skorina Gomel State University

Алина Валентиновна Ивашкевич¹, Полина Олеговна Саченок², Елена Михайловна Овсюк³¹мл. науч. сотрудник центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики Института
физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси²студент 3-го курса физико-инженерного факультета

Мозырского государственного педагогического университета имени И. П. Шамякина

³д-р физ.-мат. наук, доц., ведущий науч. сотрудник

Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины

e-mail: ¹ivashkevich.alina@yandex.by; ²polinasachenok@gmail.com; ³e.ovsyuk@mail.ru**Calb – Ramond Field, Solutions with Spherical Symmetry, the Gauge Degrees of Freedom**

In the present paper, the system of 10 equations for Calb – Ramond particle is studied in spherical coordinates. For this particle, in contrast to Maxwell theory, the antisymmetric tensor represents gauge variables, and 4-vector relates to physically observable ones. After separating the variables we get the first order system of 10 radial equations. By diagonalising the space reflection operator, we get to more simple subsystems of 4 and 6 equations, related to states with parities $P = (-1)^{j+1}$ and $P = (-1)^j$ respectively. For parity $P = (-1)^{j+1}$ the system of 4 equations has two independent solutions, they both describe two gauge states. For parity $P = (-1)^j$, the system of 6 equations has 2 independent solutions; one of them is purely gauge, and the other includes both observable and gauge variables. Therefore, for Calb – Ramond particle there exist only one physically observable state with spherical symmetry, and three states are gauge ones. Recall that in Maxwell theory, exist 2 physically observable states, and 2 pure gauge states.

Key words: Calb – Ramond field, spherical symmetry, separation of the variables, exact solutions, the gauge degrees of freedom.

ПОЛЕ КАЛЬБА – РАМОНА, РЕШЕНИЯ СО СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ, КАЛИБРОВОЧНЫЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Исследуется система из 10 уравнений для безмассовой частицы Кальба – Рамона в сферических координатах. Для этой частицы в отличие от теории Максвелла антисимметричный тензор представляет калибровочные переменные, а 4-вектор соответствует наблюдаемым величинам. После разделения переменных получена система из 10 радиальных уравнений. С помощью диагонализации оператора пространственного отражения получаем более простые подсистемы из 4 и 6 уравнений, относящиеся к состояниям с четностью $P = (-1)^{j+1}$ и $P = (-1)^j$ соответственно. Для четности $P = (-1)^{j+1}$ система из 4 уравнений имеет два независимых решения, оба чисто калибровочные. Для четности $P = (-1)^j$ система из 6 уравнений имеет два независимых решения; одно чисто калибровочное, второе включает наблюдаемые и калибровочные переменные. Следовательно, для частицы Кальба – Рамона существует только одно физическое наблюдаемое состояние, три остальных чисто калибровочные. В теории Максвелла существуют два физических и 2 калибровочных решения.

Ключевые слова: поле Кальба – Рамона, сферическая симметрия, разделение переменных, точные решения, калибровочные степени свободы.

Introduction

The field of Ogievetsky – Polubarinov [1], now it is mostly called as Calb – Ramond field [2], takes much attention in the current literature; for instance see in [3; 4]. In this theory, in contrast to Maxwell theory, the antisymmetric tensor represents the gauge variables, and

4-vector relates to physically observable ones. In the present paper, we focus on the problem of finding in explicit form all independent solutions for this field with spherical symmetry.

1. Exact solutions

We start with the known radial equations [5] for massive Stueckelberg field [6; 7], restricted to the ordinary spin 1 particle:

$$\begin{aligned} -E'_2 - \frac{2}{r}E_2 - \frac{1}{r\sqrt{2}}(E_1 + E_3) &= Mh_0, \quad i\epsilon E_1 - B'_3 - \frac{1}{r}B_3 + \frac{1}{r\sqrt{2}}B_2 = Mh_1, \\ i\epsilon E_2 - \frac{1}{r\sqrt{2}}(B_1 - B_3) &= Mh_2, \quad i\epsilon E_3 + B'_1 + \frac{1}{r}B_1 - \frac{1}{r\sqrt{2}}B_2 = Mh_3, \\ -i\epsilon h_1 + \frac{1}{r\sqrt{2}}h_0 &= ME_1, \quad -i\epsilon h_2 - h'_0 = ME_2, \\ -i\epsilon h_3 + \frac{1}{r\sqrt{2}}h_0 &= ME_3, \quad h'_3 + \frac{1}{r}h_3 + \frac{1}{r\sqrt{2}}h_2 = MB_1, \\ -\frac{1}{r\sqrt{2}}h_1 + \frac{1}{r\sqrt{2}}h_3 &= MB_2, \quad -h'_1 - \frac{1}{r}h_1 - \frac{1}{r\sqrt{2}}h_2 = MB_3. \end{aligned}$$

The variables h_a refer to 4-vector, and E_i, B_i refer to antisymmetric tensor. In massless Calb – Ramond case, this system becomes slightly different

$$\begin{aligned} -E'_2 - \frac{2}{r}E_2 - \frac{1}{r\sqrt{2}}(E_1 + E_3) &= h_0, \quad i\epsilon E_1 - B'_3 - \frac{1}{r}B_3 + \frac{1}{r\sqrt{2}}B_2 = h_1, \\ i\epsilon E_2 - \frac{1}{r\sqrt{2}}(B_1 - B_3) &= h_2, \quad i\epsilon E_3 + B'_1 + \frac{1}{r}B_1 - \frac{1}{r\sqrt{2}}B_2 = h_3, \\ -i\epsilon h_1 + \frac{1}{r\sqrt{2}}h_0 &= 0, \quad -i\epsilon h_2 - h'_0 = 0, \\ -i\epsilon h_3 + \frac{1}{r\sqrt{2}}h_0 &= 0, \quad h'_3 + \frac{1}{r}h_3 + \frac{1}{r\sqrt{2}}h_2 = 0, \\ -\frac{1}{r\sqrt{2}}h_1 + \frac{1}{r\sqrt{2}}h_3 &= 0, \quad -h'_1 - \frac{1}{r}h_1 - \frac{1}{r\sqrt{2}}h_2 = 0. \end{aligned}$$

These equations substantially differ from the corresponding equations for Maxwell theory.

There exists possibility to diagonalize the space reflection operator, this results in two types of restrictions depending on the parity:

$$\begin{aligned} P &= (-1)^{j+1}, \quad h_0 = 0, h_2 = 0, h_3 = -h_1, E_3 = -E_1, E_2 = 0, B_3 = +B_1; \\ P &= (-1)^j, \quad h_3 = +h_1, B_3 = -B_1, B_2 = 0, E_3 = +E_1. \end{aligned}$$

Taking them into account in the radial system, we obtain two subsystems of 4 and 6 equations.

Let $P = (-1)^{j+1}$, then we have 4 equations

$$i\epsilon E_1 - B'_1 - \frac{B_1}{r} + \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{B_2}{r} = h_1, \quad -i\epsilon h_1 = 0, \quad -h'_1 - \frac{h_1}{r} = 0, \quad -\frac{a\sqrt{2}h_1}{r} = 0;$$

note that vector variables vanish $h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = 0$ identically; whereas 3 gauge components obey the equations

$$E_3 = -E_1, \quad E_2 = 0, \quad B_3 = +B_1, \quad i\epsilon E_1 = \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)B_1 - \frac{a}{\sqrt{2}r} B_2.$$

Here two independent solutions are possible:

$$\begin{aligned} 1. \quad & B_2 = 0, B_3 = B_1 \text{ is arbitrary}, E_3 = -E_1, i\epsilon E_1 = \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)B_1; \\ 2. \quad & B_3 = B_1 = 0, B_2 \text{ is arbitrary}, E_3 = -E_1, E_2 = 0, i\epsilon E_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}} B_2. \end{aligned} \quad (1)$$

It is evident, that in (1) we describe two gauge solutions, because each of them is determined by an arbitrary function (correspondingly by B_2 and B_1). Thus, for states with parity $P = (-1)^{j+1}$, any physically observable states do not exist.

For states with the opposite parity $P = (-1)^j$, we have 6 equations:

$$\begin{aligned} 1) \quad & -E_2' - \frac{2}{r}E_2 - \frac{a\sqrt{2}}{r}E_1 = h_0, \\ 2) \quad & h' + i\epsilon E_2 - \frac{a\sqrt{2}}{r}B_1 = h_2, \\ 3) \quad & -\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{2}}{r}h + i\epsilon E_1 + B_1' + \frac{B_1}{r} = h_1; \\ 4) \quad & -i\epsilon h_2 - h_0' = 0, \\ 5) \quad & -i\epsilon h_1 + \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{2}}{r}h_0 = 0, \\ 6) \quad & h_1' + \frac{h_1}{r} + \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{2}}{r}h_2 = 0; \end{aligned}$$

three last equations contain only variables related to the 4-vector.

Let us consider the first 3 equations, in which the gauge variables E_1, E_2, B_1 are linked to the variables h, h_0, h_1, h_2 :

$$\begin{aligned} 1) \quad & -E_2' - \frac{2}{r}E_2 - \frac{a\sqrt{2}}{r}E_1 = h_0, \\ 2) \quad & E_2 = \frac{1}{i\epsilon}\left[h_2 + \frac{a\sqrt{2}}{r}B_1\right], \\ 3) \quad & E_1 = \frac{1}{i\epsilon}\left[h_1 - B_1' - \frac{B_1}{r}\right]. \end{aligned}$$

Let us substitute expressions for E_1 and E_2 into equation 1):

$$\frac{d}{dr}\left[h_2 + \frac{a\sqrt{2}}{r}B_1\right] + \frac{2}{r}\left[h_2 + \frac{a\sqrt{2}}{r}B_1\right] + \frac{a\sqrt{2}}{r}\left[h_1 - \frac{d}{dr}B_1 - \frac{B_1}{r}\right] = -i\epsilon h_0;$$

whence it follows

$$\frac{d}{dr}h_2 - \frac{a\sqrt{2}}{r^2}B_1 + \frac{a\sqrt{2}}{r}\frac{d}{dr}B_1 + \frac{2}{r}h_2 + \frac{2\sqrt{2}a}{r^2}B_1 + \frac{a\sqrt{2}}{r}h_1 - \frac{a\sqrt{2}}{r}\frac{d}{dr}B_1 - \frac{a\sqrt{2}}{r^2}B_1 = -i\epsilon h_0.$$

Note that all terms with the variable B_1 cancel each other, so we arrive at the equation

$$\frac{a\sqrt{2}}{r}h_1 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)h_2 = -i\epsilon h_0; \quad (2)$$

only the variables $h_0, h_1 = h_3, h_2$ enter into eq. (2). Besides, remain two equations which relate the main variables to the gauge ones

$$2) \quad E_2 = \frac{1}{i\epsilon} \left[h_2 + \frac{a\sqrt{2}}{r} B_1 \right], \quad 3) \quad E_1 = \frac{1}{i\epsilon} \left[h_1 - B_1' - \frac{B_1}{r} \right].$$

Now consider equations 4), 5), 6):

$$4) \quad -i\epsilon h_1 + \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2}}{r} h_0 = 0 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{i\epsilon} \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{1}{r} h_0,$$

$$5) \quad -i\epsilon h_2 - h_0' = 0 \Rightarrow h_2 = -\frac{1}{i\epsilon} h_0',$$

$$6) \quad h_1' + \frac{h_1}{r} + \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2}}{r} h_2 = 0;$$

let us substitute expressions for h_1 and h_2 into equation 6), which yields the identity

$$7) \quad \frac{d}{dr} \frac{1}{i\epsilon} \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{1}{r} h_0 + \frac{1}{r} \frac{1}{i\epsilon} \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{1}{r} h_0 - \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{1}{r} \frac{1}{i\epsilon} \frac{d}{dr} h_0 = 0 \Rightarrow 0 = 0;$$

so equation 6) may be ignored. Thus we have only three independent equations

$$\frac{a\sqrt{2}}{r} h_1 + \frac{d}{dr} h_2 + \frac{2}{r} h_2 = -i\epsilon h_0, \quad h_1 = \frac{1}{i\epsilon} \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{1}{r} h_0, \quad h_2 = -\frac{1}{i\epsilon} h_0'. \quad (3)$$

Eliminating the variables h_1 and h_2 , we get

$$\frac{a\sqrt{2}}{r} \frac{1}{i\epsilon} \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{1}{r} h_0 - \frac{d}{dr} \frac{1}{i\epsilon} \frac{d}{dr} h_0 - \frac{2}{r} \frac{1}{i\epsilon} \frac{d}{dr} h_0 = -i\epsilon h_0,$$

whence we obtain the second order equation for h_0 :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{a^2}{r^2} \right) h_0 = 0.$$

Therefore, instead of (3) we get the equivalent system

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{a^2}{r^2} \right) h_0 = 0, \quad h_1 = \frac{1}{i\epsilon} \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{1}{r} h_0, \quad h_2 = -\frac{1}{i\epsilon} h_0'; \quad (4)$$

recall two equations

$$2) \quad E_2 = \frac{1}{i\epsilon} \left[h_2 - h_0' + \frac{a\sqrt{2}}{r} B_1 \right], \quad 3) \quad E_1 = \frac{1}{i\epsilon} \left[h_1 + \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2}}{r} h_0 - B_1' - \frac{B_1}{r} \right].$$

Two last equations may be rewritten differently

$$i\epsilon E_2 - \frac{a\sqrt{2}}{r} B_1 = h_2 - h_0', \quad i\epsilon E_1 + B_1' + \frac{B_1}{r} = h_1 + \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2}}{r} h_0.$$

In accordance with eq. (4), we may express h_1 and h_2 through the variable h_0 , then we obtain

$$\begin{aligned} i\epsilon E_2 - \frac{a\sqrt{2}}{r} B_1 &= -\frac{1}{i\epsilon} h'_0 - h' = -\left(\frac{1}{i\epsilon} h'_0 + h'\right), \\ i\epsilon E_1 + B'_1 + \frac{B_1}{r} &= \frac{1}{i\epsilon} \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{1}{r} h_0 + \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2}}{r} h = \frac{a}{\sqrt{2}r} \left(\frac{1}{i\epsilon} h_0 + h\right). \end{aligned}$$

Therefore, the problem is reduced to 3 equations:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{a^2}{r^2}\right) h_0 &= 0, \\ i\epsilon E_2 - \frac{a\sqrt{2}}{r} B_1 &= -\frac{d}{dr} \frac{1}{i\epsilon} h_0, \\ i\epsilon E_1 + B'_1 + \frac{B_1}{r} &= \frac{a}{\sqrt{2}r} \frac{1}{i\epsilon} h_0. \end{aligned}$$

For the last system, we can see 2 independent solutions:

$$\begin{aligned} I, \quad h_0 \neq 0, \quad & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{a^2}{r^2}\right) h_0 = 0, \\ & i\epsilon E_2 - \frac{a\sqrt{2}}{r} B_1 = -\frac{1}{i\epsilon} \frac{d}{dr} h_0, \quad i\epsilon E_1 + B'_1 + \frac{B_1}{r} = \frac{a}{\sqrt{2}r} \frac{1}{i\epsilon} h_0; \\ II, \quad h_0 = 0, \quad & i\epsilon E_2 - \frac{a\sqrt{2}}{r} B_1 = 0, \quad i\epsilon E_1 + B'_1 + \frac{B_1}{r} = 0. \end{aligned}$$

Thus, the system of 6 equations with the parity $P = (-1)^j$ has 2 independent solutions; the first one I includes both the gauge and the physical variables; the second one II is purely gauge. Recall that in the case of the parity $P = (-1)^{j+1}$ we had found 2 pure gauge solutions (see (1)).

Recall the initial substitution for field function [5]

$$\bar{H}_1 = e^{-i\epsilon t} \begin{bmatrix} h_0(r)D_0 \\ h_1(r)D_{-1} \\ h_2(r)D_0 \\ h_3(r)D_{+1} \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_2 = e^{-i\epsilon t} \begin{bmatrix} E_1(r)D_{-1} \\ E_2(r)D_0 \\ E_3(r)D_{+1} \\ B_1(r)D_{+1} \\ B_2(r)D_0 \\ B_3(r)D_{-1} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

From (5), for solutions with the parity $P = (-1)^{j+1}$, we get

$$h_0 = 0, h_2 = 0, h_3 = -h_1, E_3 = -E_1, E_2 = 0, B_3 = +B_1, \quad \bar{H}_1 = e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} 0 \\ h_1 D_{-1} \\ 0 \\ h_1 D_{+1} \end{vmatrix}, \bar{H}_2 = e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} E_1 D_{-1} \\ 0 \\ -E_1 D_{+1} \\ B_1 D_{+1} \\ B_2 D_0 \\ B_1 D_{-1} \end{vmatrix};$$

here we can see two independent purely gauge solutions

1. $h_1 = 0, \text{ any } B_1, B_2 = 0, E_1, i\epsilon E_1 = (\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})B_1;$
2. $h_1 = 0, B_1 = 0, \text{ any } B_2, E_1, i\epsilon E_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}}B_2;$

each of them is determined by an arbitrary function: by B_1 and B_2 .

From (5), for states with the parity $P = (-1)^j$ we obtain

$$h_3 = +h_1, B_3 = -B_1, B_2 = 0, E_3 = +E_1, \quad \bar{H}_1 = e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} h_0(r)D_0 \\ h_1 D_{-1} \\ h_2(r)D_0 \\ h_1 D_{+1} \end{vmatrix}, \quad \bar{H}_2 = e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} E_1 D_{-1} \\ E_2 D_0 \\ E_1 D_{+1} \\ B_1 D_{+1} \\ 0 \\ -B_1 D_{-1} \end{vmatrix};$$

here we can see two independent solutions, which are determined by relations below

$$\begin{aligned} \text{I,} \quad & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{a^2}{r^2} \right) h_0 = 0, \\ & i\epsilon \bar{E}_2 - \frac{a\sqrt{2}}{r} \bar{B}_1 = -\frac{1}{i\epsilon} \frac{d}{dr} h_0, \quad i\epsilon \bar{E}_1 + \bar{B}'_1 + \frac{\bar{B}_1}{r} = \frac{a}{\sqrt{2}r} \frac{1}{i\epsilon} h_0; \\ \text{II,} \quad & h_0 = 0, \quad i\epsilon E_2 - \frac{a\sqrt{2}}{r} B_1 = 0, \quad i\epsilon E_1 + B'_1 + \frac{B_1}{r} = 0. \end{aligned}$$

the first one I includes both the gauge and physical variables; the second one II is purely gauge.

Conclusions

The system of equations for Calb – Ramond particle has been studied in spherical coordinates. After separating the variables we have derived the system of 10 radial equations. We have constructed exact solutions of this system. It is shown that for the Calb – Ramond particle there exist only one physically observable state with spherical symmetry, and three states are gauge ones. This situation correlates with what we have for solutions with Cartesian and cylindrical symmetries. Recall that in Maxwell theory, there exist two physically observable states, and two pure gauge states, so the Calb – Ramond field substantially differs from the Maxwell theory.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Огиевецкий, В. И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В. И. Огиевецкий, И. В. Полубаринов // Ядерная физика. – 1966. – Т. 4, вып. 1. – С. 216–223.
2. Kalb, M. Classical direct interstring action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 9. – P. 2273–2284.
3. Berche, B. Classical Kalb – Ramond field theory in curved space-times / B. Berche, S. Fumeron, F. Moraes // Phys. Rev. D. – Vol. 105, nr 1. – Paper 105026.
4. Hell, A. On the duality of massive Kalb – Ramond and Proca fields / A. Hell // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2022. – Vol. 01. – Paper 056.
5. Stuckelberg particle in the Coulomb field, non-relativistic approximation, wave functions and spectra / E. M. Ovsyuk, O. A Semenyuk, A. V. Ivashkevich, M. Neagu // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2022. – Vol. 25, nr 4. – P. 387–404.
6. Stueckelberg, E. C. G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte / E. C. G. Stueckelberg // Helv. Phys. Acta. – 1938. – Vol. 11. – P. 299–328.
7. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altabal // Int. J. Mod. Phys. A. – 2004. – Vol. 119. – P. 3265–3348.

REFERENCES

1. Ogijevieckij, V. I. Notof i jego vozmozhnyje vzaimodiejstvija / V. I. Ogijevieckij, I. V. Polubarinov // Jadiernaja fizika. – 1966. – Т. 4, vyp. 1. – S. 216–223.
2. Kalb, M. Classical direct interstring action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 9. – P. 2273–2284.
3. Berche, B. Classical Kalb – Ramond field theory in curved space-times / B. Berche, S. Fumeron, F. Moraes // Phys. Rev. D. – Vol. 105, nr 1. – Paper 105026.
4. Hell, A. On the duality of massive Kalb – Ramond and Proca fields / A. Hell // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2022. – Vol. 01. – Paper 056.
5. Stuckelberg particle in the Coulomb field, non-relativistic approximation, wave functions and spectra / E. M. Ovsyuk, O. A Semenyuk, A. V. Ivashkevich, M. Neagu // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2022. – Vol. 25, nr 4. – P. 387–404.
6. Stueckelberg, E. C. G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte / E. C. G. Stueckelberg // Helv. Phys. Acta. – 1938. – Vol. 11. – P. 299–328.
7. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altabal // Int. J. Mod. Phys. A. – 2004. – Vol. 119. – P. 3265–3348.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.04.2025

Alina Ivashkevich*Junior Researcher of Fundamental Interaction and Astrophysics Center
of B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus***Алина Валентиновна Ивашкевич***мл. научн. сотрудник центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики Института
физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси**e-mail: ivashkevich.alina@yandex.by***Dirac – Kähler Particle in the Uniform Electric Field,
Solutions with Cylindrical Symmetry**

16-component system of equations describing the Dirac – Kähler particle in presence of the external electric field has been studied. This equation describes a multi-spin boson field equivalent to the scalar, pseudoscalar, vector, pseudovector, and anti-symmetric tensor. On the searched solutions, the operators of the energy and the third projection of the total angular momentum are diagonalized. After separating the variables in cylindrical coordinates, the system of sixteen first order equations in partial derivative with respect to coordinates (r, z) is derived. To resolve this system the method by Fedorov – Gronskey is applied. Correspondingly, the complete wave function is decomposed into the sum of three projective constituents. Dependence of 16 variables on the polar coordinate is determined only through three basic functions $F_i(r)$, at this there arise differential constraints which permit to derive the system of 16 differential equations in the coordinate z . The three basic variables are found in terms of Bessel functions. The system of equations in the variable z is solved exactly, as the result, four linearly independent solutions for the Dirac – Kähler particle in presence of the external uniform electric field are constructed.

Key words: Dirac – Kähler particle, external electric field, cylindrical symmetry, projective operators, differential equations in partial derivatives, exact solutions.

**ЧАСТИЦА ДИРАКА – КЭЛЕРА В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ,
РЕШЕНИЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ**

Исследуется 16-компонентная система уравнений, описывающая частицу Дирака – Кэлера в присутствии внешнего электрического поля. Эти уравнения описывают мультиспиновое бозонное поле, эквивалентное скаляру, псевдоскаляру, вектору, псевдовектору и антисимметричному тензору. На строящихся решениях диагонализуются операторы энергии и третьей проекции полного углового момента. После разделения переменных выведена система из 16-ти дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных по координатам (r, z) . Чтобы решить эту систему, используем метод Федорова – Гронского. Согласно этому методу, полная волновая функция раскладывается на сумму трех проективных составляющих. Зависимость 16 переменных от полярной координаты определяется только через три базисные функции $F_i(r)$. Накладываются дополнительные дифференциальные ограничения, которые позволяют преобразовать все уравнения в частных производных в систему обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной z . Три основные переменные найдены в терминах функций Бесселя. Система уравнений по переменной z решается точно, в результате построены четыре линейно независимых решения уравнения для частицы Дирака – Кэлера в однородном электрическом поле.

Ключевые слова: частица Дирака – Кэлера, внешнее электрическое поле, цилиндрическая симметрия, проективные операторы, уравнения в частных производных, точные решения.

Introduction

As the Dirac equation was proposed [1], there appeared papers in which they tried to reproduce Dirac's results within the tensor representations of the Lorentz group [2; 3]. Later, and equivalent approach within the other mathematical techniques was proposed by Kähler [4], now mostly used the term Dirac – Kähler field (also there are used other terms as well: Ivanenko – Landau field, or vector field of the general type). Scientific literature concerned with this field is enormous – see in [5–23].

Three most interesting points in connection of general covariant extension of the wave equation for this field are: in flat Minkowski space there exist tensor and spinor formulations of the theory; in the initial tensor form there are presented tensors with different intrinsic parities; there exist different views about physical interpretation of the object: whether it is a composite boson or a set of four fermions.

In Minkowski space and Cartesian coordinates, the Dirac – Kähler equation may be presented as a spinor equation for a 2-rank bispinor [7]:

$$[i \gamma^a \partial_a - m] U(x) = 0, \quad (1)$$

or as the set of tensor equations [7]:

$$\begin{aligned} \partial_l \Psi + m \Psi_l &= 0, & \partial_l \tilde{\Psi} + m \tilde{\Psi}_l &= 0, \\ \partial_l \Psi + \partial_a \Psi_{la} - m \Psi_l &= 0, \\ \partial_l \tilde{\Psi} - \frac{1}{2} \epsilon_l^{amn} \partial_a \Psi_{mn} - m \tilde{\Psi}_l &= 0, \\ \partial_m \Psi_n - \partial_n \Psi_m + \epsilon_{mn}^{ab} \partial_a \tilde{\Psi}_b - m \Psi_{mn} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

These two description are related in the following way [7]:

$$U(x) = \left[-i\Psi + \gamma^l \Psi_l + i\sigma^{mn} \Psi_{mn} + \gamma^5 \tilde{\Psi} + i\gamma^l \gamma^5 \tilde{\Psi}_l \right] E^{-1}, \quad (3)$$

the quantity E is a bispinor metrical matrix

$$E = \begin{vmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{vmatrix}; \quad (4)$$

the inverse transformation is

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{1}{4i} \text{Sp} [EU], & \tilde{\Psi} &= \frac{1}{4} \text{Sp} [E\gamma^5 U], \\ \Psi_l &= \frac{1}{4} \text{Sp} [E\gamma_l U], & \tilde{\Psi}_l &= \frac{1}{4i} \text{Sp} [E\gamma^5 \gamma_l U], & \Psi_{mn} &= -\frac{1}{2i} \text{Sp} [E\sigma_{mn} U]. \end{aligned} \quad (5)$$

In this paper we will examine the problem for this particle in the external uniform electric field. We specify the main equation in cylindrical coordinates and then separate the variables. As a result, derive the system of 16 first order differential equations in partial derivatives with respect to the coordinates r and z .

To resolve this system, we apply the generalized method by Fedorov – Groskiy [24], the last is based on the use of projective operators constructed with the use of generator J^{12} for the wave function with the properties of 2nd rank bispinor. Correspondingly, we present the complete wave function into the sum of three projective constituents. Dependence of each projective constituent on the polar coordinate is determined through one function. We introduce differential constraints which permit us to transform 16 equations in partial derivatives to ordinary differential equations in the variable z . We study the introduced differential constraints for basic $F_1(r), F_2(r), F_3(r)$. They lead to 2nd order equations for basic three functions, solutions for them may be found in terms of the Bessel functions. The system of equations in the variable z is solved exactly, as the result we have constructed four linearly independent solutions for the Dirac – Kähler particle in the uniform electric field.

1. Separating the variables, the method by Fedorov – Gronsliy

In the tetrad form, the above equation reads [7]

$$[i\gamma^\alpha(x)(D_\alpha + \Gamma_\alpha \otimes I + I \otimes \Gamma_\alpha(x) - M)U(x) = 0, \quad D_\alpha = \partial_\alpha + ieA_\alpha. \quad (6)$$

In presence of the external uniform electric field, $A_0 = Ez$, it takes the form

$$[i\gamma^0(\frac{\partial}{\partial t} + iEz) + i\gamma^1\partial_r + \frac{\gamma^2}{r}(i\partial_\phi + (\sigma^{12} \otimes I + I \otimes \sigma^{12})) + i\gamma^3\partial_z - M]U(x) = 0,$$

or differently (let $U(x) = \frac{\Phi(x)}{\sqrt{r}}$)

$$[i\gamma^0(\frac{\partial}{\partial t} + iEz) + i\gamma^1\partial_r + \frac{1}{r}\gamma^2 \otimes \sigma^{12} + \frac{\gamma^2}{r}i\partial_\phi + i\gamma^3\partial_z - M]\Phi(x) = 0. \quad (7)$$

Solutions are searched in the form [8]

$$V(t, r, \phi, z) = e^{-ict} e^{im\phi} F(r), \quad F(r) = \begin{vmatrix} f_{11}(r, z) & f_{12}(r, z) & f_{13}(r, z) & f_{14}(r, z) \\ f_{21}(r, z) & f_{22}(r, z) & f_{23}(r, z) & f_{24}(r, z) \\ f_{31}(r, z) & f_{32}(r, z) & f_{33}(r, z) & f_{34}(r, z) \\ f_{41}(r, z) & f_{42}(r, z) & f_{43}(r, z) & f_{44}(r, z) \end{vmatrix}, \quad (8)$$

then the equation reads

$$[(\epsilon - Ez)\gamma^0 + i\gamma^1\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\gamma^2 \otimes \sigma^{12} - \frac{m}{r}\gamma^2 + i\gamma^3\partial_z - M]F(x) = 0. \quad (9)$$

Recall expressions for the Dirac matrices in spinor basis [7]

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\gamma^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma^{12} = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{vmatrix}.$$

Below we will apply the method by Fedorov – Gronsliy [24]. To this end, we present the complete wave function as the 16-dimensional column

$$F = \begin{vmatrix} F_1(r, z) \\ F_2(r, z) \\ F_3(r, z) \\ F_4(r, z) \end{vmatrix}, \quad F_1 = \begin{vmatrix} f_{11}(r, z) \\ f_{21}(r, z) \\ f_{31}(r, z) \\ f_{41}(r, z) \end{vmatrix}, \quad F_2 = \begin{vmatrix} f_{12}(r, z) \\ f_{22}(r, z) \\ f_{32}(r, z) \\ f_{42}(r, z) \end{vmatrix}, \quad F_3 = \begin{vmatrix} f_{13}(r, z) \\ f_{23}(r, z) \\ f_{33}(r, z) \\ f_{43}(r, z) \end{vmatrix}, \quad F_4 = \begin{vmatrix} f_{14}(r, z) \\ f_{24}(r, z) \\ f_{34}(r, z) \\ f_{44}(r, z) \end{vmatrix}.$$

Correspondingly we should present the third projection of the spin $Y = S_3$ in 16-dimensional form.

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

We readily verify that the minimal equation for this matrix has the form $Y^3 - Y = 0$; correspondingly, there exist three projective operators

$$P_1 = \frac{1}{2}Y(Y+1), \quad P_2 = \frac{1}{2}Y(Y-1), \quad P_3 = 1 - Y^2, \quad (11)$$

dependence of each constituent on the variable r should be determined through one function:

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} f_{11}(z) \\ 0 \\ (f_{13}(z) + f_{31}(z))/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (f_{42}(z) - f_{24}(z))/2 \\ (f_{13}(z) + f_{31}(z))/2 \\ 0 \\ f_{33}(z) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(f_{42}(z) - f_{24}(z))/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} F_1(r), \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(f_{13}(z) - f_{31}(z))/2 \\ 0 \\ 0 \\ f_{22}(z) \\ 0 \\ 0 \\ (f_{42}(z) + f_{24}(z))/2 \\ (f_{13}(z) - f_{31}(z))/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (f_{42}(z) + f_{24}(z))/2 \\ 0 \\ f_{44}(z) \end{pmatrix} F_2(r), \quad \Psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{21}(z) \\ 0 \\ f_{41}(z) \\ f_{12}(z) \\ 0 \\ f_{32}(z) \\ 0 \\ 0 \\ f_{23}(z) \\ 0 \\ f_{43}(z) \\ f_{14}(z) \\ 0 \\ f_{34}(z) \\ 0 \end{pmatrix} F_3(r). \quad (12)$$

It is convenient to introduce the following notations

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_{13}(z) + f_{31}(z)) &= A(z), & \frac{1}{2}(f_{13}(z) - f_{31}(z)) &= B(z), \\ \frac{1}{2}(f_{42}(z) - f_{24}(z)) &= C(z), & \frac{1}{2}(f_{42}(z) + f_{24}(z)) &= D(z), \\ f_{13}(z) &= A(z) + B(z), & f_{31}(z) &= A(z) - B(z), \\ f_{42}(z) &= D(z) + C(z), & f_{24}(z) &= D(z) - C(z); \end{aligned} \quad (13)$$

then the three main constituents are presented as

$$\Psi_1 = \begin{vmatrix} f_{11}(z) \\ 0 \\ A(z) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C(z) \\ A(z) \\ 0 \\ f_{33}(z) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -C(z) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} F_1, \quad \Psi_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -B(z) \\ 0 \\ 0 \\ f_{22}(z) \\ 0 \\ D(z) \\ B(z) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D(z) \\ 0 \\ 0 \\ f_{44}(z) \end{vmatrix} F_2(r), \quad \Psi_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ f_{21}(z) \\ 0 \\ f_{41}(z) \\ f_{12}(z) \\ 0 \\ f_{32}(z) \\ 0 \\ 0 \\ f_{23}(z) \\ 0 \\ f_{43}(z) \\ f_{14}(z) \\ 0 \\ f_{34}(z) \\ 0 \end{vmatrix} F_3(r). \quad (14)$$

Further we derive the system of 1st order partial differential equations 4 with the shortening notations

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} + \frac{m+1/2}{r} &= a_{m+1/2}, & \frac{d}{dr} + \frac{m-1/2}{r} &= a_{m-1/2}, \\ \frac{d}{dr} - \frac{m+1/2}{r} &= b_{m+1/2}, & \frac{d}{dr} - \frac{m-1/2}{r} &= b_{m-1/2}, \end{aligned} \quad (15)$$

it reads

$$\begin{aligned}
& a_{m-1/2} f_{41}(r, z) - iMf_{11}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) + \partial_z) f_{31}(r, z) = 0, \\
& a_{m+1/2} f_{42}(r, z) - iMf_{12}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) + \partial_z) f_{32}(r, z) = 0, \\
& a_{m-1/2} f_{43}(r, z) - iMf_{13}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) + \partial_z) f_{33}(r, z) = 0, \\
& a_{m+1/2} f_{44}(r, z) - iMf_{14}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) + \partial_z) f_{34}(r, z) = 0, \\
& b_{m-1/2} f_{31}(r, z) - iMf_{21}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) - \partial_z) f_{41}(r, z) = 0, \\
& b_{m+1/2} f_{32}(r, z) - iMf_{22}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) - \partial_z) f_{42}(r, z) = 0, \\
& b_{m-1/2} f_{33}(r, z) - iMf_{23}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) - \partial_z) f_{43}(r, z) = 0, \\
& b_{m+1/2} f_{34}(r, z) - iMf_{24}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) - \partial_z) f_{44}(r, z) = 0, \\
& -a_{m-1/2} f_{21}(r, z) - iMf_{31}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) - \partial_z) f_{11}(r, z) = 0, \\
& -a_{m+1/2} f_{22}(r, z) - iMf_{32}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) - \partial_z) f_{12}(r, z) = 0, \\
& -a_{m-1/2} f_{23}(r, z) - iMf_{33}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) - \partial_z) f_{13}(r, z) = 0, \\
& -a_{m+1/2} f_{24}(r, z) - iMf_{34}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) - \partial_z) f_{14}(r, z) = 0, \\
& -b_{m-1/2} f_{11}(r, z) - iMf_{41}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) + \partial_z) f_{21}(r, z) = 0, \\
& -b_{m+1/2} f_{12}(r, z) - iMf_{42}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) + \partial_z) f_{22}(r, z) = 0, \\
& -b_{m-1/2} f_{13}(r, z) - iMf_{43}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) + \partial_z) f_{23}(r, z) = 0, \\
& -b_{m+1/2} f_{14}(r, z) - iMf_{44}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) + \partial_z) f_{24}(r, z) = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Let us transform these equations to other variables

$$\begin{aligned}
f_{13}(r, z) &= A(r, z) + B(r, z), & f_{31}(r, z) &= A(r, z) - B(r, z), \\
f_{42}(r, z) &= D(r, z) + C(r, z), & f_{24}(r, z) &= D(r, z) - C(r, z), \text{ and so on;}
\end{aligned} \tag{17}$$

then we get

$$\begin{aligned}
1 & a_{m-1/2} f_{41}(r, z) - iMf_{11}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) + \partial_z)(A(r, z) - B(r, z)) = 0, \\
2 & a_{m+1/2} (D(r, z) + C(r, z)) - iMf_{12}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) + \partial_z) f_{32}(r, z) = 0, \\
3 & a_{m-1/2} f_{43}(r, z) - iM(A(r, z) + B(r, z)) + (-i(\epsilon - Ez) + \partial_z) f_{33}(r, z) = 0, \\
4 & a_{m+1/2} f_{44}(r, z) - iMf_{14}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) + \partial_z) f_{34}(r, z) = 0, \\
5 & b_{m-1/2} (A(r, z) - B(r, z)) - iMf_{21}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) - \partial_z) f_{41}(r, z) = 0, \\
6 & b_{m+1/2} f_{32}(r, z) - iMf_{22}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) - \partial_z)(D(r, z) + C(r, z)) = 0, \\
7 & b_{m-1/2} f_{33}(r, z) - iMf_{23}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) - \partial_z) f_{43}(r, z) = 0, \\
8 & b_{m+1/2} f_{34}(r, z) - iM(D(r, z) - C(r, z)) + (-i(\epsilon - Ez) - \partial_z) f_{44}(r, z) = 0, \\
9 & -a_{m-1/2} f_{21}(r, z) - iM(A(r, z) - B(r, z)) + (-i(\epsilon - Ez) - \partial_z) f_{11}(r, z) = 0, \\
10 & -a_{m+1/2} f_{22}(r, z) - iMf_{32}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) - \partial_z) f_{12}(r, z) = 0, \\
11 & -a_{m-1/2} f_{23} - iMf_{33} + (-i(\epsilon - Ez) - \partial_z)(A + B) = 0, \\
12 & -a_{m+1/2} (D(r, z) - C(r, z)) - iMf_{34}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) - \partial_z) f_{14}(r, z) = 0, \\
13 & -b_{m-1/2} f_{11}(r, z) - iMf_{41}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) + \partial_z) f_{21}(r, z) = 0, \\
14 & -b_{m+1/2} f_{12}(r, z) - iM(D(r, z) + C(r, z)) + (-i(\epsilon - Ez) + \partial_z) f_{22}(r, z) = 0, \\
15 & -b_{m-1/2} (A(r, z) + B(r, z)) - iMf_{43}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) + \partial_z) f_{23}(r, z) = 0, \\
16 & -b_{m+1/2} f_{14}(r, z) - iMf_{44}(r, z) + (-i(\epsilon - Ez) + \partial_z)(D(r, z) - C(r, z)) = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

It is convenient to apply the shortening notations $a_{m-1/2} = a_1$, $a_{m+1/2} = a_2$, $b_{m-1/2} = b_1$, $b_{m+1/2} = b_2$; so we obtain (combining equations as shown below)

2)+12)

$$a_2(D(r, z) + C(r, z)) - iMf_{12}(r, z) + i(-(\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{32}(r, z) - a_2(D(r, z) - C(r, z)) - iMf_{34}(r, z) + i(-(\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{14}(r, z) = 0.$$

2)-12)

$$a_2(D(r, z) + C(r, z)) - iMf_{12}(r, z) + i(-(\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{32}(r, z) + a_2(D(r, z) - C(r, z)) + iMf_{34}(r, z) - i(-(\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{14}(r, z) = 0.$$

3)+9)

$$a_1f_{43}(r, z) + i(-(\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{33}(r, z) - a_1f_{21}(r, z) + i(-(\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{11}(r, z) - iM(A(r, z) + B(r, z)) - iM(A(r, z) - B(r, z)) = 0,$$

3)-9)

$$a_1f_{43}(r, z) + i(-(\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{33}(r, z) + a_1f_{21}(r, z) - i(-(\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{11}(r, z) - iM(A(r, z) + B(r, z)) + iM(A(r, z) - B(r, z)) = 0.$$

5)+15)

$$b_{m-1/2}(A(r, z) - B(r, z)) - iMf_{21}(r, z) + i(-(\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{41}(r, z) - b_{m-1/2}(A(r, z) + B(r, z)) - iMf_{43}(r, z) + i(-(\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{23}(r, z) = 0,$$

5)-15)

$$b_1(A(r, z) - B(r, z)) - iMf_{21}(r, z) + i(-(\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{41}(r, z) + b_1(A(r, z) + B(r, z)) + iMf_{43}(r, z) - i(-(\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{23}(r, z) = 0.$$

8)+14)

$$b_2f_{34}(r, z) + i(-(\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{44}(r, z) - b_2f_{12}(r, z) + i(-(\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{22}(r, z) - iM(D(r, z) - C(r, z)) - iM(D(r, z) + C(r, z)) = 0,$$

8)-14)

$$b_2f_{34}(r, z) + i(-(\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{44}(r, z) + b_2f_{12}(r, z) - i(-(\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{22}(r, z) - iM(D(r, z) - C(r, z)) + iM(D(r, z) + C(r, z)) = 0.$$

Equations 1) and 22):

$$1) \quad a_1f_{41}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)(A(r, z) - B(r, z)) - iMf_{11}(r, z) = 0,$$

$$11) \quad -a_1f_{23}(r, z) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)(A(r, z) + B(r, z)) - iMf_{33}(r, z) = 0;$$

let us use the notations

$$P = (\epsilon - Ez) + i\partial_z, \quad Q = (\epsilon - Ez) - i\partial_z, \quad P + Q = 2(\epsilon - Ez), \quad P - Q = 2i\partial_z,$$

then we have

$$a_1f_{41}(r, z) - iP(A(r, z) - B(r, z)) - iMf_{11}(r, z) = 0, \\ -a_1f_{23}(r, z) - iQ(A(r, z) + B(r, z)) - iMf_{33}(r, z) = 0;$$

we sum and subtract the last equations

$$\begin{aligned} a_1(f_{41}(r, z) - f_{23}(r, z)) - i(P + Q)A(r, z) + i(P - Q)B(r, z) - iM(f_{11}(r, z) + f_{33}(r, z)) &= 0, \\ a_1(f_{41}(r, z) + f_{23}(r, z)) - i(P - Q)A(r, z) + i(P + Q)A(r, z) - iM(f_{11}(r, z) - f_{33}(r, z)) &= 0, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} a_1(f_{41}(r, z) - f_{23}(r, z)) - 2i(\epsilon - Ez)A(r, z) - 2\partial_z B(r, z) - iM(f_{11}(r, z) + f_{33}(r, z)) &= 0, \\ a_1(f_{41}(r, z) + f_{23}(r, z)) + 2\partial_z A(r, z) + 2i(\epsilon - Ez)A(r, z) - iM(f_{11}(r, z) - f_{33}(r, z)) &= 0. \end{aligned}$$

Equations 6) and 16):

$$\begin{aligned} 6) \quad & b_2 f_{32}(r, z) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)(D(r, z) + C(r, z)) - iMf_{22}(r, z) = 0, \\ 16) \quad & -b_2 f_{14}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)(D(r, z) - C(r, z)) - iMf_{44}(r, z) = 0, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} b_2 f_{32}(r, z) - iQ(D(r, z) + C(r, z)) - iMf_{22}(r, z) &= 0, \\ -b_2 f_{14}(r, z) - iP(D(r, z) - C(r, z)) - iMf_{44}(r, z) &= 0; \end{aligned}$$

we sum and subtract these equations

$$\begin{aligned} b_2(f_{32}(r, z) - f_{14}(r, z)) - i(P + Q)D(r, z) + i(P - Q)C(r, z) - iM(f_{22}(r, z) + f_{44}(r, z)) &= 0, \\ b_2(f_{32}(r, z) + f_{14}(r, z)) + i(P - Q)D(r, z) - i(P + Q)C(r, z) - i(f_{22}(r, z) - f_{44}(r, z)) &= 0, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} b_2(f_{32}(r, z) - f_{14}(r, z)) - 2i(\epsilon - Ez)D(r, z) - 2\partial_z C(r, z) - iM(f_{22}(r, z) + f_{44}(r, z)) &= 0, \\ b_2(f_{32}(r, z) + f_{14}(r, z)) - 2\partial_z D(r, z) + 2i(\epsilon - Ez)C(r, z) - i(f_{22}(r, z) - f_{44}(r, z)) &= 0. \end{aligned}$$

So we have four equations:

$$\begin{aligned} a_1(f_{41}(r, z) - f_{23}(r, z)) - 2i(\epsilon - Ez)A(r, z) - 2\partial_z B(r, z) - iM(f_{11}(r, z) + f_{33}(r, z)) &= 0, \\ a_1(f_{41}(r, z) + f_{23}(r, z)) + 2\partial_z A(r, z) + 2i(\epsilon - Ez)A(r, z) - iM(f_{11}(r, z) - f_{33}(r, z)) &= 0, \\ b_2(f_{32}(r, z) - f_{14}(r, z)) - 2i(\epsilon - Ez)D(r, z) - 2\partial_z C(r, z) - iM(f_{22}(r, z) + f_{44}(r, z)) &= 0, \\ b_2(f_{32}(r, z) + f_{14}(r, z)) - 2\partial_z D(r, z) + 2i(\epsilon - Ez)C(r, z) - i(f_{22}(r, z) - f_{44}(r, z)) &= 0. \end{aligned}$$

The remaining (non-modified) equations are

$$\begin{aligned} 4) \quad & a_2 f_{44}(r, z) + i(-(\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{34}(r, z) - iMf_{14}(r, z) = 0, \\ 7) \quad & b_1 f_{33}(r, z) + i(-(\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{43}(r, z) - iMf_{23}(r, z) = 0, \\ 10) \quad & -a_2 f_{22}(r, z) + i(-(\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{12}(r, z) - iMf_{32}(r, z) = 0, \\ 13) \quad & -b_1 f_{11}(r, z) + i(-(\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{21}(r, z) - iMf_{41}(r, z) = 0. \end{aligned}$$

Recall dependence of 16 variables on the basic functions $F_i(r)$:

$$\begin{aligned} \Psi_1, f_{11}, f_{33}, A, C &\Rightarrow F_1(r); & \Psi_2, f_{22}, f_{44}, B, D &\Rightarrow F_2(r); \\ \Psi_3, f_{12}, f_{21}, f_{14}, f_{41}, f_{23}, f_{32}, f_{34}, f_{43} &\Rightarrow F_3(3). \end{aligned} \tag{19}$$

Thus, we arrive at the system

2)+12)

$$\begin{aligned} a_2(D(r, z) + C(r, z)) - iMf_{12}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{32}(r, z) - a_2(D(r, z) - C(r, z)) - \\ - iMf_{34}(r, z) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{14}(r, z) = 0, \end{aligned}$$

2)-12)

$$a_2(D(r, z) + C(r, z)) - iMf_{12}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{32}(r, z) + \\ + a_2(D(r, z) - C(r, z)) + iMf_{34}(r, z) + i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{14}(r, z) = 0,$$

3)+9)

$$a_1 f_{43}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{33}(r, z) - a_1 f_{21}(r, z) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{11}(r, z) - \\ - iM(A(r, z) + B(r, z)) - iM(A(r, z) - B(r, z)) = 0,$$

3)-9)

$$a_1 f_{43}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{33}(r, z) + a_1 f_{21}(r, z) + i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{11}(r, z) - \\ - iM(A(r, z) + B(r, z)) + iM(A(r, z) - B(r, z)) = 0.$$

5)+15)

$$b_{m-1/2}(A(r, z) - B(r, z)) - iMf_{21}(r, z) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{41}(r, z) - \\ - b_{m-1/2}(A(r, z) + B(r, z)) - iMf_{43}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{23}(r, z) = 0,$$

5)-15)

$$b_1(A(r, z) - B(r, z)) - iMf_{21}(r, z) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{41}(r, z) + \\ + b_1(A(r, z) + B(r, z)) + iMf_{43}(r, z) + i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{23}(r, z) = 0,$$

8)+14)

$$b_2 f_{34}(r, z) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{44}(r, z) - b_2 f_{12}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{22}(r, z) - \\ - iM(D(r, z) - C(r, z)) - iM(D(r, z) + C(r, z)) = 0,$$

8)-14)

$$b_2 f_{34}(r, z) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{44}(r, z) + b_2 f_{12}(r, z) + i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{22}(r, z) - \\ - iM(D(r, z) - C(r, z)) + iM(D(r, z) + C(r, z)) = 0,$$

$$4) \quad a_2 f_{44}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{34}(r, z) - iMf_{14}(r, z) = 0,$$

$$7) \quad b_1 f_{33}(r, z) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{43}(r, z) - iMf_{23}(r, z) = 0,$$

$$10) \quad -a_2 f_{22}(r, z) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{12}(r, z) - iMf_{32}(r, z) = 0,$$

$$13) \quad -b_1 f_{11}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{21}(r, z) - iMf_{41}(r, z) = 0.$$

$$a_1(f_{41}(r, z) - f_{23}(r, z)) - 2i(\epsilon - Ez)A(r, z) - 2\partial_z B(r, z) - iM(f_{11}(r, z) + f_{33}(r, z)) = 0.$$

$$a_1(f_{41}(r, z) + f_{23}(r, z)) + 2\partial_z A(r, z) + 2i(\epsilon - Ez)A(r, z) - iM(f_{11}(r, z) - f_{33}(r, z)) = 0,$$

$$b_2(f_{32}(r, z) - f_{14}(r, z)) - 2i(\epsilon - Ez)D(r, z) - 2\partial_z C(r, z) - iM(f_{22}(r, z) + f_{44}(r, z)) = 0,$$

$$b_2(f_{32}(r, z) + f_{14}(r, z)) - 2\partial_z D(r, z) + 2i(\epsilon - Ez)C(r, z) - i(f_{22}(r, z) - f_{44}(r, z)) = 0.$$

Remembering on definitions

$$a_{m-1/2} = a_1, \quad a_{m+1/2} = a_2, \quad b_{m-1/2} = b_1, \quad b_{m+1/2} = b_2;$$

we get

2)+12)

$$a_{m+1/2}D(r, z) + a_{m+1/2}C(r, z) - iMf_{12}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{32}(r, z) - a_{m+1/2}D(r, z) + a_{m+1/2}C(r, z) -$$

$$-iMf_{34}(r, z) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{14}(r, z) = 0,$$

2)-12)

$$a_{m+1/2}D(r, z) + a_{m+1/2}C(r, z) - iMf_{12}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{32}(r, z) + \\ + a_{m+1/2}D(r, z) - a_{m+1/2}C(r, z) + iMf_{34}(r, z) + i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{14}(r, z) = 0,$$

3)+9)

$$a_{m-1/2}f_{43}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{33}(r, z) - a_{m-1/2}f_{21}(r, z) - \\ - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{11}(r, z) - 2iMA(r, z) = 0,$$

3)-9)

$$a_{m-1/2}f_{43}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{33}(r, z) + a_{m-1/2}f_{21}(r, z) + \\ + i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{11}(r, z) - 2iMB(r, z) = 0.$$

5)+15)

$$b_{m-1/2}A(r, z) - b_{m-1/2}B(r, z) - iMf_{21}(r, z) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{41}(r, z) - \\ - b_{m-1/2}A(r, z) - b_{m-1/2}B(r, z) - iMf_{43}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{23}(r, z) = 0,$$

5)-15)

$$b_{m-1/2}A(r, z) - b_{m-1/2}B(r, z) - iMf_{21}(r, z) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{41}(r, z) + \\ + b_{m-1/2}A(r, z) + b_{m-1/2}B(r, z) + iMf_{43}(r, z) + i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{23}(r, z) = 0,$$

8)+14)

$$b_{m+1/2}f_{34}(r, z) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{44}(r, z) - b_{m+1/2}f_{12} - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{22}(r, z) - 2iMD(r, z) = 0,$$

8)-14)

$$b_{m+1/2}f_{34} - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{44} + b_{m+1/2}f_{12} + i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{22} + 2iMC(r, z) = 0,$$

$$4) \quad a_{m+1/2}f_{44}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{34}(r, z) - iMf_{14}(r, z) = 0,$$

$$7) \quad b_{m-1/2}f_{33}(r, z) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{43}(r, z) - iMf_{23}(r, z) = 0,$$

$$10) \quad -a_{m+1/2}f_{22}(r, z) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{12}(r, z) - iMf_{32}(r, z) = 0,$$

$$13) \quad -b_{m-1/2}f_{11}(r, z) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{21}(r, z) - iMf_{41}(r, z) = 0,$$

$$a_{m-1/2}(f_{41}(r, z) - f_{23}(r, z)) - 2i(\epsilon - Ez)A(r, z) - 2\partial_z B(r, z) - iM(f_{11}(r, z) + f_{33}(r, z)) = 0,$$

$$a_{m-1/2}(f_{41}(r, z) + f_{23}(r, z)) + 2\partial_z A(r, z) + 2i(\epsilon - Ez)A(r, z) - iM(f_{11}(r, z) - f_{33}(r, z)) = 0,$$

$$b_{m+1/2}(f_{32}(r, z) - f_{14}(r, z)) - 2i(\epsilon - Ez)D(r, z) - 2\partial_z C(r, z) - iM(f_{22}(r, z) + f_{44}(r, z)) = 0,$$

$$b_{m+1/2}(f_{32}(r, z) + f_{14}(r, z)) - 2\partial_z D(r, z) + 2i(\epsilon - Ez)C(r, z) - i(f_{22}(r, z) - f_{44}(r, z)) = 0,$$

Taking in mind dependence of 16 variables on the three basic functions: $F_i(r)$:

$$f_{11}, f_{33}, A, C \Rightarrow f_{11}(z)F_1(r), \quad f_{33}(z)F_1(r), \quad A(z)F_1(r), \quad C(z)F_1(r);$$

$$f_{22}, f_{44}, B, D \Rightarrow f_{22}(z)F_2(r), \quad f_{44}(z)F_2(r), \quad B(z)F_2(r), \quad D(z)F_2(r);$$

$$f_{12}, f_{21}, f_{14}, f_{41} \Rightarrow f_{12}(z)F_3(r), \quad f_{21}(z)F_3(r), \quad f_{14}(z)F_3(r), \quad f_{41}(z)F_3(r)$$

$$f_{23}, f_{32}, f_{34}, f_{43} \Rightarrow f_{23}(z)F_3(r), \quad f_{32}(z)F_3(r), \quad f_{34}(z)F_3(r), \quad f_{43}(z)F_3(r),$$

(20)

we transform the above equations to the form

2)+12)

$$\begin{aligned} & a_{m+1/2}D(z)F_2(r) + a_{m+1/2}C(z)F_1(r) - iMf_{12}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{32}(z)F_3(r) - \\ & - a_{m+1/2}D(z)F_2(r) + a_{m+1/2}C(z)F_1(r) - iMf_{34}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{14}(z)F_3(r) = 0, \\ & 2) - 12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_{m+1/2}D(z)F_2(r) + a_{m+1/2}C(z)F_1(r) - iMf_{12}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{32}(z)F_3(r) + \\ & + a_{m+1/2}D(z)F_2(r) - a_{m+1/2}C(z)F_1(r) + iMf_{34}(z)F_3(r) + i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{14}(z)F_3(r) = 0, \\ & 3) + 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_{m-1/2}f_{43}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{33}(z)F_1(r) - a_{m-1/2}f_{21}(z)F_3(r) - \\ & - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{11}(z)F_1(r) - 2iMA(z)F_1(r) = 0, \\ & 3) - 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_{m-1/2}f_{43}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{33}(z)F_1(r) + a_{m-1/2}f_{21}(z)F_3(r) + \\ & + i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{11}(z)F_1(r) - 2iMB(z)F_2(r) = 0, \\ & 5) + 15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b_{m-1/2}A(z)F_1(r) - b_{m-1/2}B(z)F_2(r) - iMf_{21}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{41}(z)F_3(r) - \\ & - b_{m-1/2}A(z)F_1(r) - b_{m-1/2}B(z)F_2(r) - iMf_{43}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{23}(z)F_3(r) = 0, \\ & 5) - 15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b_{m-1/2}A(z)F_1(r) - b_{m-1/2}B(z)F_2(r) - iMf_{21}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{41}(z)F_3(r) + \\ & + b_{m-1/2}A(z)F_1(r) + b_{m-1/2}B(z)F_2(r) + iMf_{43}(z)F_3(r) + i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{23}(z)F_3(r) = 0, \\ & 8) + 14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b_{m+1/2}f_{34}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{44}(z)F_2(r) - b_{m+1/2}f_{12}(z)F_3(r) - \\ & - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{22}(z)F_2(r) - 2iMD(z)F_2(r) = 0, \\ & 8) - 14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b_{m+1/2}f_{34}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{44}(z)F_2(r) + b_{m+1/2}f_{12}(z)F_3(r) + \\ & + i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{22}(z)F_2(r) + 2iMC(z)F_1(r) = 0, \end{aligned}$$

$$4) \quad a_{m+1/2}f_{44}(z)F_2(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{34}(z)F_3(r) - iMf_{14}(z)F_3(r) = 0,$$

$$7) \quad b_{m-1/2}f_{33}(z)F_1(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{43}(z)F_3(r) - iMf_{23}(z)F_3(r) = 0,$$

$$10) \quad -a_{m+1/2}f_{22}(z)F_2(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{12}(z)F_3(r) - iMf_{32}(z)F_3(r) = 0,$$

$$13) \quad -b_{m-1/2}f_{11}(z)F_1(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{21}(z)F_3(r) - iMf_{41}(z)F_3(r) = 0,$$

$$a_{m-1/2}(f_{41}(z) - f_{23}(z))F_3(r) - 2i(\epsilon - Ez)A(z)F_1(r) - 2\partial_z B(z)F_2(r) - iM(f_{11}(z) + f_{33}(z))F_1(r) = 0.$$

$$a_{m-1/2}(f_{41}(z) + f_{23}(z))F_3(r) + 2\partial_z A(z)F_1(r) + 2i(\epsilon - Ez)A(z)F_1(r) - iM(f_{11}(z) - f_{33}(z))F_1(r) = 0,$$

$$b_{m+1/2}(f_{32}(z) - f_{14}(z))F_3(r) - 2i(\epsilon - Ez)D(z)F_2(r) - 2\partial_z C(z)F_1(r) - iM(f_{22}(z) + f_{44}(z))F_2(r) = 0,$$

$$b_{m+1/2}(f_{32}(z) + f_{14}(z))F_3(r) - 2\partial_z D(z)F_2(r) + 2i(\epsilon - Ez)C(z)F_1(r) - i(f_{22}(z) - f_{44}(z))F_2(r) = 0.$$

It is convenient to collect equations into the three group (following the type of the basic function, below we should set $B(z) = 0, C(z) = 0$):

I

$$\begin{aligned}
& f_{43}(z)a_{m-1/2}F_3(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{33}(z)F_1(r) - f_{21}(z)a_{m-1/2}F_3(r) - \\
& - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{11}(z)F_1(r) - 2iMA(z)F_1(r) = 0, \\
& f_{43}(z)a_{m-1/2}F_3(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{33}(z)F_1(r) + f_{21}(z)a_{m-1/2}F_3(r) + \\
& + i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{11}(z)F_1(r) - 2iMB(z)F_2(r) = 0. \\
& (f_{41}(z) - f_{23}(z))a_{m-1/2}F_3(r) - 2i(\epsilon - Ez)A(z)F_1(r) - 2\partial_z B(z)F_2(r) - \\
& - iM(f_{11}(z) + f_{33}(z))F_1(r) = 0. \\
& (f_{41}(z) + f_{23}(z))a_{m-1/2}F_3(r) + 2\partial_z A(z)F_1(r) + 2i(\epsilon - Ez)A(z)F_1(r) - \\
& - iM(f_{11}(z) - f_{33}(z))F_1(r) = 0,
\end{aligned}$$

II

$$\begin{aligned}
& f_{34}(z)b_{m+1/2}F_3(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{44}(z)F_2(r) - f_{12}(z)b_{m+1/2}F_3(r) - \\
& - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{22}(z)F_2(r) - 2iMD(z)F_2(r) = 0, \\
& f_{34}(z)b_{m+1/2}F_3(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{44}(z)F_2(r) + f_{12}(z)b_{m+1/2}F_3(r) + \\
& + i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{22}(z)F_2(r) + 2iMC(z)F_1(r) = 0, \\
& (f_{32}(z) - f_{14}(z))b_{m+1/2}F_3(r) - 2i(\epsilon - Ez)D(z)F_2(r) - 2\partial_z C(z)F_1(r) - \\
& - iM(f_{22}(z) + f_{44}(z))F_2(r) = 0, \\
& (f_{32}(z) + f_{14}(z))b_{m+1/2}F_3(r) - 2\partial_z D(z)F_2(r) + 2i(\epsilon - Ez)C(z)F_1(r) - \\
& - i(f_{22}(z) - f_{44}(z))F_2(r) = 0,
\end{aligned}$$

III

$$\begin{aligned}
& D(z)a_{m+1/2}F_2(r) + C(z)a_{m+1/2}F_1(r) - iMf_{12}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{32}(z)F_3(r) - \\
& - D(z)a_{m+1/2}F_2(r) + C(z)a_{m+1/2}F_1(r) - iMf_{34}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{14}(z)F_3(r) = 0, \\
& D(z)a_{m+1/2}F_2(r) + C(z)a_{m+1/2}F_1(r) - iMf_{12}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{32}(z)F_3(r) + \\
& + D(z)a_{m+1/2}F_2(r) - C(z)a_{m+1/2}F_1(r) + iMf_{34}(z)F_3(r) + i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{14}(z)F_3(r) = 0, \\
& A(z)b_{m-1/2}F_1(r) - B(z)b_{m-1/2}F_2(r) - iMf_{21}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{41}(z)F_3(r) - \\
& - A(z)b_{m-1/2}F_1(r) - B(z)b_{m-1/2}F_2(r) - iMf_{43}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{23}(z)F_3(r) = 0, \\
& A(z)b_{m-1/2}F_1(r) - B(z)b_{m-1/2}F_2(r) - iMf_{21}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{41}(z)F_3(r) + \\
& + A(z)b_{m-1/2}F_1(r) + B(z)b_{m-1/2}F_2(r) + iMf_{43}(z)F_3(r) + i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{23}(z)F_3(r) = 0, \\
& f_{44}(z)a_{m+1/2}F_2(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{34}(z)F_3(r) - iMf_{14}(z)F_3(r) = 0, \\
& f_{33}(z)b_{m-1/2}F_1(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{43}(z)F_3(r) - iMf_{23}(z)F_3(r) = 0, \\
& - f_{22}(z)a_{m+1/2}F_2(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{12}(z)F_3(r) - iMf_{32}(z)F_3(r) = 0, \\
& - f_{11}(z)b_{m-1/2}F_1(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{21}(z)F_3(r) - iMf_{41}(z)F_3(r) = 0.
\end{aligned}$$

In accordance with the general method by Fedorov – Gronskiy, we should impose the relevant differential constraints which permit us to transform all equations to algebraic form

$$\begin{aligned}
& B(z) = 0, \quad C(z) = 0, \\
& a_{m-1/2}F_3(r) = C_1F_1(r), \quad b_{m+1/2}F_3(r) = C_2F_2(r), \\
& b_{m-1/2}F_1(r) = C_3F_3(r), \quad a_{m+1/2}F_2(r) = C_4F_3(r);
\end{aligned} \tag{21}$$

in this way we obtain

I

$$\begin{aligned}
 & f_{43}(z)C_1F_1(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{33}(z)F_1(r) - f_{21}(z)C_1F_1(r) - \\
 & - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{11}(z)F_1(r) - 2iMA(z)F_1(r) = 0, \\
 & f_{43}(z)C_1F_1(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{33}(z)F_1(r) + f_{21}(z)C_1F_1(r) + \\
 & + i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{11}(z)F_1(r) = 0, \\
 & (f_{41}(z) - f_{23}(z))C_1F_1(r) - 2i(\epsilon - Ez)A(z)F_1(r) - iM(f_{11}(z) + f_{33}(z))F_1(r) = 0, \\
 & (f_{41}(z) + f_{23}(z))C_1F_1(r) + 2\partial_z A(z)F_1(r) + 2i(\epsilon - Ez)A(z)F_1(r) - iM(f_{11}(z) - f_{33}(z))F_1(r) = 0,
 \end{aligned}$$

II

$$\begin{aligned}
 & f_{34}(z)C_2F_2(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{44}(z)F_2(r) - f_{12}(z)C_2F_2(r) - \\
 & - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{22}(z)F_2(r) - 2iMD(z)F_2(r) = 0, \\
 & f_{34}(z)C_2F_2(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{44}(z)F_2(r) + f_{12}(z)C_2F_2(r) + \\
 & + i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{22}(z)F_2(r) = 0, \\
 & (f_{32}(z) - f_{14}(z))C_2F_2(r) - 2i(\epsilon - Ez)D(z)F_2(r) - iM(f_{22}(z) + f_{44}(z))F_2(r) = 0, \\
 & (f_{32}(z) + f_{14}(z))C_2F_2(r) - 2\partial_z D(z)F_2(r) - i(f_{22}(z) - f_{44}(z))F_2(r) = 0,
 \end{aligned}$$

III

$$\begin{aligned}
 & D(z)C_4F_3(r) - iMf_{12}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{32}(z)F_3(r) - \\
 & - D(z)C_4F_3(r) - iMf_{34}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{14}(z)F_3(r) = 0, \\
 & D(z)C_4F_3(r) - iMf_{12}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{32}(z)F_3(r) + \\
 & + D(z)C_4F_3(r) + iMf_{34}(z)F_3(r) + i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{14}(z)F_3(r) = 0, \\
 & A(z)C_3F_3(r) - iMf_{21}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{41}(z)F_3(r) - \\
 & - A(z)C_3F_3(r) - iMf_{43}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{23}(z)F_3(r) = 0, \\
 & A(z)C_3F_3(r) - iMf_{21}(z)F_3(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{41}(z)F_3(r) + \\
 & + A(z)C_3F_3(r) + iMf_{43}(z)F_3(r) + i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{23}(z)F_3(r) = 0, \\
 & f_{44}(z)C_4F_3(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{34}(z)F_3(r) - iMf_{14}(z)F_3(r) = 0, \\
 & f_{33}(z)C_3F_3(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{43}(z)F_3(r) - iMf_{23}(z)F_3(r) = 0, \\
 & - f_{22}(z)C_4F_3(r) - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{12}(z)F_3(r) - iMf_{32}(z)F_3(r) = 0, \\
 & - f_{11}(z)C_3F_3(r) - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{21}(z)F_3(r) - iMf_{41}(z)F_3(r) = 0.
 \end{aligned}$$

Reducing the total multipliers, we derive the system of differentuial equations in the variable z :

I

$$\begin{aligned}
 & C_1f_{43} - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{33} - C_1f_{21} - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{11} - 2iMA = 0, \\
 & C_1f_{43} - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{33} + C_1f_{21} + i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{11} = 0, \\
 & C_1(f_{41} - f_{23}) - 2i(\epsilon - Ez)A - iM(f_{11} + f_{33}) = 0, \\
 & C_1(f_{41} + f_{23}) + 2\partial_z A + 2i(\epsilon - Ez)A - iM(f_{11} - f_{33}) = 0,
 \end{aligned}$$

II

$$\begin{aligned}
 & C_2f_{34} - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{44} - C_2f_{12} - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{22} - 2iMD = 0, \\
 & C_2f_{34} - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{44} + C_2f_{12} + i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{22} = 0, \\
 & C_2(f_{32} - f_{14}) - 2i(\epsilon - Ez)D - iM(f_{22} + f_{44}) = 0, \\
 & C_2(f_{32} + f_{14}) - 2\partial_z D - iM(f_{22} - f_{44}) = 0,
 \end{aligned}$$

III

$$C_4D - iMf_{12} - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z)f_{32} - C_4D - iMf_{34} - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z)f_{14} = 0,$$

$$\begin{aligned}
C_4 D - i M f_{12} - i((\epsilon - Ez) + i \partial_z) f_{32} + i M f_{34} + i((\epsilon - Ez) - i \partial_z) f_{14} &= 0, \\
C_3 A - i M f_{21} - i((\epsilon - Ez) - i \partial_z) f_{41} - C_3 A - i M f_{43} - i((\epsilon - Ez) + i \partial_z) f_{23} &= 0, \\
C_3 A - i M f_{21} - i((\epsilon - Ez) - i \partial_z) f_{41} + C_3 A + i M f_{43} + i((\epsilon - Ez) + i \partial_z) f_{23} &= 0, \\
C_4 f_{44} - i((\epsilon - Ez) + i \partial_z) f_{34} - i M f_{14} &= 0, \\
C_3 f_{33} - i((\epsilon - Ez) - i \partial_z) f_{43} - i M f_{23} &= 0, \\
-C_4 f_{22} - i((\epsilon - Ez) - i \partial_z) f_{12} - i M f_{32} &= 0, \\
-C_3 f_{11} - i((\epsilon - Ez) + i \partial_z) f_{21} - i M f_{41} &= 0.
\end{aligned}$$

2. Differential constraints

Let us study the above differential relations

$$\begin{aligned}
a_{m-1/2} F_3 &= C_1 F_1, \quad b_{m-1/2} F_1 = C_3 F_3, \text{ let } C_3 = C_1, \\
b_{m+1/2} F_3 &= C_2 F_2, \quad a_{m+1/2} F_2 = C_4 F_3, \text{ let } C_4 = C_2.
\end{aligned} \tag{22}$$

We readily derive the 2nd order equations

$$\begin{aligned}
(a_{m-1/2} b_{m-1/2} - C_1^2) F_1 &= 0, \quad (b_{m-1/2} a_{m-1/2} - C_1^2) F_3 = 0, \\
(b_{m+1/2} a_{m+1/2} - C_2^2) F_2 &= 0, \quad (a_{m+1/2} b_{m+1/2} - C_2^2) F_3 = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Taking in mind the definitions

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} + \frac{m+1/2}{r} &= a_{m+1/2}, \quad \frac{d}{dr} + \frac{m-1/2}{r} = a_{m-1/2}, \\
\frac{d}{dr} - \frac{m+1/2}{r} &= b_{m+1/2}, \quad \frac{d}{dr} - \frac{m-1/2}{r} = b_{m-1/2},
\end{aligned}$$

we arrive at four differential equations for 3 functions:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(4(m-2)m+3)}{4r^2} - C_1^2 \right) F_1 &= 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(1-4m^2)}{4r^2} - C_1^2 \right) F_3 = 0, \\
\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(4m(m+2)+3)}{4r^2} - C_2^2 \right) F_2 &= 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(1-4m^2)}{4r^2} - C_2^2 \right) F_3 = 0.
\end{aligned}$$

due to 2nd and 4th equations we have evident constraint $C_1^2 = C_2^2 = C^2$, so obtain

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(m-1)^2 - 1/4}{r^2} - C^2 \right) F_1 &= 0, \\
\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(m+1)^2 - 1/4}{r^2} - C^2 \right) F_2 &= 0, \\
\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m^2 - 1/4}{r^2} - C^2 \right) F_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

From the last equation, from the needed asymptotic at infinity $r \rightarrow +\infty$ we conclude that parameter C should be imaginary $C = iX$, so we obtain

$$e^{\pm Cr} \sim e^{\pm iXr}, e^{-iXr}.$$

Let us consider in detail the third equation. In the variable $x = Cr = iXr$, it reads

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{m^2 - 1/4}{x^2} - 1 \right) F_3 = 0.$$

Its solutions are searched in the form $F_3 = x^A e^{Bx} f_3(x)$; after simple calculation we derive an equation for function $f_3(x)$:

$$\frac{d^2}{dx^2} f_3 + \left[\frac{2A}{x} + 2B \right] \frac{d}{dx} f_3 + \left[\frac{A(A-1) - (m^2 - 1/4)}{x^2} + (B^2 - 1) + \frac{2AB}{x} \right] f_3 = 0.$$

Imposing the the evident constraints, we get

$$A(A-1) - (m^2 - 1/4) = 0 \Rightarrow A = \pm |m| + \frac{1}{2},$$

$$B = \pm 1, \quad F_3 = x^A e^{Bx} f_3(x) = (iXr)^{\pm|m|+1/2} e^{\pm iXr} f_3(x);$$

so we arrive at the simpler equation for $f_3(x)$:

$$x \frac{d^2}{dx^2} f_3 + (2A + 2Bx) \frac{d}{dx} f_3 + 2AB f_3 = 0.$$

In the variable $2Bx = -y$, it reads

$$2Bx = -y, \quad y \frac{d^2}{dy^2} f_3 + (2A - y) \frac{d}{dy} f_3 - A f_3 = 0,$$

which is identified with the confluent hypergeometric equation

$$(y \frac{d^2}{dy^2} + (c - y) \frac{d}{dy} - a) F(a, c; y) = 0;$$

its solutions may be related with Bessel functions. For definiteness, we set

$$B = -1, \quad y = 2iXr, \quad F(a, c; 2iXr), \quad a = A = \pm |m| + \frac{1}{2}, \quad c = 2A = 2(\pm |m| + \frac{1}{2}); \quad (25)$$

depending on the sign of the quantum number m , we have two different possibilities.

Two other cases differ only in formal changes

$$m^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow (m-1)^2 - \frac{1}{4}, \quad (m+1)^2 - \frac{1}{4}. \quad (26)$$

3. System of equations in z -variable

From studying the differential constraints, follow identities

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C;$$

then we have the system

I

$$\begin{aligned} cf_{43} - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{33} - cf_{21} - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{11} - 2iMA &= 0, \\ cf_{43} - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{33} + cf_{21} + i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{11} &= 0, \\ c(f_{41} - f_{23}) - 2i(\epsilon - Ez)A - iM(f_{11} + f_{33}) &= 0, \\ c(f_{41} + f_{23}) + 2\partial_z A + 2i(\epsilon - Ez)A - iM(f_{11} - f_{33}) &= 0, \end{aligned}$$

II

$$cf_{34} - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{44} - cf_{12} - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{22} - 2iMD = 0,$$

$$\begin{aligned}
cf_{34} - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{44} + cf_{12} + i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{22} &= 0, \\
c(f_{32} - f_{14}) - 2i(\epsilon - Ez)D - iM(f_{22} + f_{44}) &= 0, \\
c(f_{32} + f_{14}) - 2\partial_z D - iM(f_{22} - f_{44}) &= 0,
\end{aligned}$$

III

$$\begin{aligned}
cD - iMf_{12} - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{32} - cD - iMf_{34} - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{14} &= 0, \\
cD - iMf_{12} - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{32} + iMf_{34} + i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{14} &= 0, \\
cA - iMf_{21} - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{41} - cA - iMf_{43} - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{23} &= 0, \\
cA - iMf_{21} - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{41} + cA + iMf_{43} + i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{23} &= 0, \\
cf_{44} - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{34} - iMf_{14} &= 0, \\
cf_{33} - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{43} - iMf_{23} &= 0, \\
-cf_{22} - i((\epsilon - Ez) - i\partial_z) f_{12} - iMf_{32} &= 0, \\
-cf_{11} - i((\epsilon - Ez) + i\partial_z) f_{21} - iMf_{41} &= 0.
\end{aligned}$$

Solving the first 8 equations with respect to the variables $f_{12}, f_{21}, f_{23}, f_{32}, f_{14}, f_{41}, f_{34}, f_{43}$, we obtain

$$\begin{aligned}
f_{12} &= \frac{-iMD + if_{22}(Ez - \epsilon) + f_{22}'}{c}, & f_{21} &= \frac{i(-MA + f_{11}(Ez - \epsilon) + if_{11}')}{c}, \\
f_{23} &= \frac{i(iA' + 2A(Ez - \epsilon) - Mf_{33})}{c}, & f_{32} &= \frac{D' - iD(Ez - \epsilon) + iMf_{22}}{c}, \\
f_{14} &= \frac{D' + iD(Ez - \epsilon) - iMf_{44}}{c}, & f_{41} &= \frac{-A' + iMf_{11}}{c}, \\
f_{34} &= \frac{f_{44}' + i(MD + f_{44}(\epsilon - Ez))}{c}, & f_{43} &= \frac{i(MA + f_{33}(\epsilon - Ez) + if_{33}')}{c}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Substituting them into remaining 8 equations, we derive

$$\begin{aligned}
-\frac{2iED}{c} &= 0, \\
\frac{D(c^2 + 2(\epsilon - Ez)^2 - 2M^2) + 2D''}{c} &= 0, \\
-\frac{2A(E(Ez^2 - i) - 2Ez\epsilon + \epsilon^2)}{c} &= 0, \\
\frac{2(A'' - iA'(Ez - \epsilon) + A(c^2 + E(Ez^2 - i) - 2Ez\epsilon - M^2 + \epsilon^2))}{c} &= 0, \\
\frac{f_{44}'' + f_{44}(c^2 + E(Ez^2 - i) - 2Ez\epsilon - M^2 + \epsilon^2)}{c} &= 0, \\
\frac{MA(Ez - \epsilon) + f_{33}(c^2 + E(Ez^2 + i) - 2Ez\epsilon - M^2 + \epsilon^2) + f_{33}''}{c} &= 0, \\
-\frac{f_{22}'' + f_{22}(c^2 + E(Ez^2 + i) - 2Ez\epsilon - M^2 + \epsilon^2)}{c} &= 0,
\end{aligned}$$

$$-\frac{MA(\epsilon - Ez) + f_{11}(c^2 + E(Ez^2 - i) - 2Ez\epsilon - M^2 + \epsilon^2) + f_{11}''}{c} = 0,$$

whence it follows

$$\begin{aligned} D &= 0, \\ 2A(E(Ez^2 - i) - 2Ez\epsilon + \epsilon^2) &= 0 \Rightarrow A = 0, \\ 2(A'' - iA'(Ez - \epsilon) + A(c^2 + E(Ez^2 - i) - 2Ez\epsilon - M^2 + \epsilon^2)) &= 0 \Rightarrow 0 = 0, \\ f_{44}'' + f_{44}(c^2 + E(Ez^2 - i) - 2Ez\epsilon - M^2 + \epsilon^2) &= 0, \\ f_{33}(c^2 + E(Ez^2 + i) - 2Ez\epsilon - M^2 + \epsilon^2) + f_{33}'' &= 0, \\ f_{22}'' + f_{22}(c^2 + E(Ez^2 + i) - 2Ez\epsilon - M^2 + \epsilon^2) &= 0, \\ f_{11}(c^2 + E(Ez^2 - i) - 2Ez\epsilon - M^2 + \epsilon^2) + f_{11}'' &= 0. \end{aligned}$$

Thus, we arrive at equations

$$\begin{aligned} D(z) &= 0, \quad A(z) = 0, \\ \frac{d^2}{dz^2} f_{11} + f_{11}(E^2 z^2 - iE - 2Ez\epsilon + \epsilon^2 - M^2 + c^2) &= 0, \\ \frac{d^2}{dz^2} f_{22} + f_{22}(E^2 z^2 + iE - 2Ez\epsilon + \epsilon^2 - M^2 + c^2) &= 0, \\ \frac{d^2}{dz^2} f_{33} + f_{33}(E^2 z^2 + iE - 2Ez\epsilon + \epsilon^2 - M^2 + c^2) &= 0, \\ \frac{d^2}{dz^2} f_{44} + f_{44}(E^2 z^2 - iE - 2Ez\epsilon + \epsilon^2 - M^2 + c^2) &= 0, \end{aligned} \tag{28}$$

physical dimensions of involved parameters are
 $[z] = L, \quad [c] = [E] = \frac{1}{L^2}, \quad [Ez] = [\epsilon] = [M] = \frac{1}{L}.$

The last four equations may be re-written differently

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} f_{11} + ((\epsilon - Ez)^2 - iE - M^2 + c^2) f_{11} &= 0, \\ \frac{d^2}{dz^2} f_{44} + ((\epsilon - Ez)^2 - iE - M^2 + c^2) f_{44} &= 0, \\ \frac{d^2}{dz^2} f_{22} + ((\epsilon - Ez)^2 + iE - M^2 + c^2) f_{22} &= 0, \\ \frac{d^2}{dz^2} f_{33} + ((\epsilon - Ez)^2 + iE - M^2 + c^2) f_{33} &= 0, \end{aligned} \tag{29}$$

they may be solved in confluent hypergeometric functions So we have constructed four linearly independent solutions of the Dirac – Kähler particle. For each solution the corresponding remaining variables are

$$\begin{aligned}
& \underline{f_{11}}(z), \quad f_{12}(z) = 0, \quad f_{21} = -\frac{f_{11}' + i(\epsilon - Ez)f_{11}}{c}, \quad f_{23}(z) = 0, \quad f_{32} = 0, \\
& f_{14}(z) = 0, \quad f_{41} = \frac{+iMf_{11}}{c}, \quad f_{34}(z) = 0, \quad f_{43} = 0, \\
& \underline{f_{44}}(z), \quad f_{12}(z) = 0, \quad f_{21} = 0, \quad f_{23}(z) = 0, \quad f_{32} \\
& f_{14}(z) = \frac{-iMf_{44}}{c}, \quad f_{41} = 0, \quad f_{34}(z) = \frac{f_{44}' + i(\epsilon - Ez)f_{44}}{c}, \quad f_{43} = 0, \\
& \underline{f_{22}}(z), \quad f_{12}(z) = \frac{f_{22}' - i(\epsilon - Ez)f_2}{c}, \quad f_{21} = 0, \quad f_{23}(z) = 0, \quad f_{32} \\
& f_{14}(z) = 0, \quad f_{41} = 0, \quad f_{34}(z) = 0, \quad f_{43} = 0, \\
& \underline{f_{33}}(z), \quad f_{12}(z) = 0, \quad f_{21} = 0, \quad f_{23}(z) = 0, \quad f_{32} \\
& f_{14}(z) = 0, \quad f_{41} = 0, \quad f_{34}(z) = 0, \quad f_{43} = -\frac{f_{33}' - i(\epsilon - Ez)f_{33}}{c}.
\end{aligned}$$

Conclusions

The system of equations describing the Dirac – Kähler particle in presence of the external electric field has been studied. After separating the variables in cylindrical coordinates, we derive the system of sixteen first order equations in partial derivative with respect to coordinates (r, z) . To resolve this system, we apply the method by Fedorov – Gronskey and decompose the complete wave function into the sum of three projective constituents. Accordingly, dependence of 16 variables on the polar coordinate is determined only through three basic functions $F_i(r)$, at this there arise differential constraints which permit to derive the system of 16 differential equations in the coordinate z . The last is solved exactly, as the result we have constructed four linearly independent solutions for the Dirac – Kähler particle in presence of the external uniform electric field.

REFERENCES

1. Dirac, P. A. M. The quantum theory of the electron / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. A. – 1928. – Vol. 117. – P. 610–624; The quantum theory of the electron; Part II // Proc. Roy. Soc. A. – 1928. – Vol. 118. – P. 351–361.
2. Darwin, C. G. The electron as a vector wave / C. G. Darwin // Proc. Roy. Soc. Lond. A. – 1927. – Vol. 116. – P. 227–253; The wave equations of the electron // Proc. Roy. Soc. Lond. A. – 1928. – Vol. 118, nr 780. – P. 654–680.
3. Ivanenko, D. Zur theorie des magnetischen electrons / D. Ivanenko, L. Landau // Zeit. Phys. – 1928. – Vol. 48, nr 8. – P. 340–348.
4. Kähler, E. Der innere differentalkalkül / E. Kähler // Rendiconti di Mat. (Roma). – 1962. – Vol. 21, nr 3, 4. – P. 425–523.
5. Red'kov, V. M. On equations for the Dirac – Kähler field and bosons with different parities in the Riemannian space / V. M. Red'kov // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Ser. fiz.-mat. – 2000. – № 1. – P. 90–95.
6. Red'kov, V. M. Dirac – Kähler field, spinor technique, and 2-potential approach to electrodynamics with two charges / V. M. Red'kov // Nonlinear Dynamics and Applications. – 2008. – Vol. 15. – P. 147–163.
7. Red'kov, V. M. Field particles in Riemannian space and the Lorentz group / V. M. Red'kov. – Minsk : Belarussian Science, 2009. – 486 p.

8. Red'kov, V. M. Tetrad formalism, spherical symmetry and Schrödinger basis group / V. M. Red'kov. – Minsk : Belarussian Science, 2011. – 339 p.
9. Red'kov, V. M. Dirac – Kähler field and 2-potential approach to electrodynamics with two charges. Chapter I / V. M. Red'kov // Progress in Relativity, Gravitation, Cosmology ; ed.: V. V. Dvoeglazov, A. Molgado, Universidad de Zacatecas, Mexico. – New York : Nova Science Publishers Inc., 2012. – P. 23–37.
10. Ovsiyuk, E. M. Some Consequences from the Dirac-Kähler Theory: on Intrinsic Spinor Sub-structure of the Different Boson Wave Functions / E. Ovsiyuk, O. Veko, V. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2013. – Vol. 16, nr 1. – P. 13–23.
11. Ovsiyuk, E. M. Maxwell Electrodynamics and Boson Fields in Spaces of Constant Curvature / E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov. – New York : Nova Science Publishers Inc., 2014. – 486 p.
12. Veko, O. V. Lounesto classification and the theory of the Dirac-Kähler field: on intrinsic spinor sub-structure of the different boson wave functions / O. V. Veko, E. M. Ovsiyuk, V. M. Red'kov // Relativity, Gravitation, Cosmology: Foundations ; ed. V. V. Dvoeglazov. – New York : Nova Science Publishers Inc., 2015. – P. 75–88.
13. Dirac – Kähler particle in Riemann spherical space: boson interpretation / A. M. Ishkhanyan [et al.] // Canad. J. Phys. – 2015. – Vol. 93. – P. 1427–1433.
14. The Dirac – Kähler field in spherical Riemann space: boson interpretation, exact solutions / A. M. Ishkhanyan, O. Florea, E. M. Ovsiyuk, V. M. Red'kov // Vesnik of Brest University. Series 4, Physics. Mathematics. – 2015. – № 1. – P. 15–26.
15. Ovsiyuk, E. M. The Dirac – Kähler particle in Lobachevsky space, nonrelativistic approximation, exact solutions / E. M. Ovsiyuk, A. N. Red'ko, V. M. Red'kov // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Ser. fiz.-mat. – 2015. – Vol. 4. – P. 61–70.
16. Chichurin, A. V. Dirac – Kähler particle in Riemann spherical space: analytical and numerical study, visualization / A. V. Chichurin, E. M. Ovsiyuk, V. M. Red'kov // Studia i Materialy. – 2015. – Vol. 1, nr 9. – P. 41–54.
17. Nonrelativistic description of the Dirac – Kähler particle on the background of curved space-time / K. V. Kazmerchuk, V. V. Kisel, E. M. Ovsiyuk [et al.] // Relativity, Gravitation, Cosmology: Foundations. – New York : Nova Science Publishers Inc., 2015. – P. 59–74.
18. Veko, O. V. Lounesto classification and the theory of the Dirac – Kähler field on intrinsic spinor sub-structure of the different boson wave functions / O. V. Veko, E. M. Ovsiyuk, V. M. Red'kov // Relativity, Gravitation, Cosmology: Foundations. – New York : Nova Science Publishers Inc., 2015. – P. 75–88.
19. Pletukhov, V. A. Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom / V. A. Pletukhov, V. M. Red'kov, V. I. Strazhev. – Minsk : Belarussian Science, 2015. – 328 p.
20. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol I. General Theory / V. V. Kisel [et al.] – New York : Nova Science Publishers Inc., 2018. – 404 p.
21. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol II. Physical Problems / V. V. Kisel [et al.] – New York : Nova Science Publishers Inc., 2018. – 402 p.
22. Gronskiy, V. K. Magnetic properties of a particle with spin 3/2 / V. K. Gronskiy, F. I. Fedorov // Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. – 1960. – Vol. 4, № 7. – P. 278–283.

УДК 004.92, 004.925.5, 548.732

DOI 10.63874/2218-0303-2025-1-48-55

Ирина Николаевна Балухо¹, Юрий Иванович Дудчик², Николай Николаевич Кольчевский³¹аспирант 1-го года обучения каф. физической электроники и нанотехнологий
Белорусского государственного университета²канд. физ.-мат. наук, зам. директора по научной работе
Института прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко
Белорусского государственного университета³канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. физической электроники и нанотехнологий
Белорусского государственного университета**Iren Balukho¹, Yuri Dudchik², Nickolai Kolchevsky³**¹1-st Year Postgraduate Student of the Department of Physical Electronics and Nanotechnology
of Belarusian State University²Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Deputy Director for Scientific Work
of the A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of Belarusian State University³Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Physical Electronics and Nanotechnologies Department
of Belarusian State Universitye-mail: ¹iren.balukho@gmail.com; ²dudchik@bsu.by; ³kolchevsky@bsu.by

ШИРОКОПОЛОСНЫЙ ИСТОЧНИК РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ*

Проведен расчет спектра излучения широкополосного рентгеновского источника. Широкополосный рентгеновский источник состоит из нескольких источников рентгеновского излучения (рентгеновских трубок), которые одновременно или последовательно облучают заданный объект. Формирование спектра широкополосного источника заключается в выборе параметров отдельных источников излучения (материал анода, ток и рабочее напряжение трубки) таким образом, чтобы в результате суммирования был получен спектр, близкий к равномерному в заданном диапазоне длин волн. Получены основные соотношения и разработана программа «X-ray-multi-tube», позволяющие рассчитать тормозной спектр широкополосного рентгеновского источника, состоящего из N источников тормозного рентгеновского излучения в заданном диапазоне длин волн с учетом допуска на изменения интенсивности в спектре.

Ключевые слова: рентгеновское излучение, рентгеновская трубка, спектр тормозного рентгеновского излучения.

Broadband X-ray Source

Calculated the radiation spectrum of a broadband X-ray source. A broadband X-ray source consists of several X-ray sources (X-ray tubes) that simultaneously or sequentially irradiate a given object. Formation of the spectrum of a broadband source consists in choosing the parameters of individual radiation sources (anode material, current and operating voltage of the tube) in such a way that the summation results in a spectrum close to a regular spectrum in a given wavelength range. The basic relations are obtained and the program «X-ray-multi-tube» is developed, which allow to calculate the bremsstrahlung spectrum of a broadband source consisting of N X-ray sources in a specified wavelength range taking into account the intensity variation allowed in the spectrum.

Key words: X-ray radiation, X-ray tubes, bremsstrahlung X-ray spectrum.

Введение

В 2025 г. отмечается 130-летие с момента открытия рентгеновского излучения немецким физиком, первым Нобелевским лауреатом по физике профессором Вильгельмом Конрадом Рентгеном. Прогресс в области рентгеновских методов исследования неразрывно связан с развитием источников рентгеновского излучения [1–4].

*Работа частично поддержана Министерством образования Республики Беларусь в рамках задания 3.12 ГПНИ «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении», подпрограмма «Техническая диагностика».

Передовыми источниками рентгеновского излучения на сегодняшний день являются: синхротроны (Курчатовский источник синхротронного излучения «КИСИ-Курчатов» (Россия) [5]), синхротроны 3-го поколения (The European Synchrotron Radiation Facility «ESRF» (Франция) [7], Super Photon ring – 8 GeV «Spring-8» (Япония) [8], Source Optimisée de Lumière d'Énergie Intermédiaire du LURE «SOLEIL» (Франция) [9]), лазеры на свободных электронах (European x-ray free electron laser «E-XFEL» (Германия) [10]) и строящиеся источники синхротронного излучения 3-го поколения (Русский Источник Фотонов «РИФ» (Россия) [6]) и 4-го поколения (Сибирский кольцевой источник фотонов «СКИФ» (Россия) [11], ESRF-EBS (Extremely Brilliant Source) (Франция) [12]). В составе строящегося Сибирского кольцевого источника фотонов «СКИФ» (Россия) будет создана белорусская исследовательская станция. Применение синхротронных источников является уникальным ввиду малого числа синхротронов и высокой стоимости их использования.

Самыми распространенными лабораторными источниками для методов неразрушающего контроля, медицины, рентгеновских исследований, являются рентгеновские трубки. Наибольшее количество компаний, выпускающих рентгеновские трубки для медицинского, промышленного и научного применения находится в США, например, General Electric-GE, Varex Imaging, DEL MEDICAL, North American imaging (NAI). Современными производителями рентгеновских трубок являются: Siemens (Германия), выпускающая мощные, более 100 КВт, трубки с вращающимся анодом, IAE (Industria Applicazioni Elettroniche) (Италия), выпускающая трубки с вращающимся анодом с 1965 г., Excillum (Швеция), выпускающая мощные микрофокусные рентгеновские трубки MetalJet на основе жидкого анода и нанофокусные рентгеновские трубки с прострельным анодом на основе вольфрама и алмаза, обеспечивающие разрешение до 150 нм, Comet AG (Швейцария), выпускающая мощную рентгеновскую трубку на 600 КВ, Canon electron tubes & devices CO. – Toshiba (Япония), выпускающая рентгеновские трубки с 1915 года, Hamamatsu Photonics (Япония), выпускающая микрофокусные рентгеновские трубки с диаметром фокусного пятна 2–80 мкм, Oxford instruments x-ray technology (Великобритания) – в настоящее время продажи, обслуживание и поддержка приостановлены на территории Российской Федерации и Беларуси. Наиболее доступными оказываются производители Китая, например, KeyWay Electron Company Ltd (Китай); России: ЗАО ЭЛТЕХ-Мед (Россия), выпускающее рентгеновские микрофокусные трубки с диаметром фокусного пятна менее 20 мкм, АО Светлана-рентген (Россия), работающее с 1949 г. и выпускающее трубки для промышленного структурного и спектрального анализа, медицинского назначения с массивным и прострельным анодом, ООО Радиум (Россия), изготавливающее аналоги зарубежных рентгеновских излучателей [13]. В Республике Беларусь в индустриальном парке «Великий камень» зарегистрирована компания ООО «СиноБелМедика», которая планирует создать производство рентгеновских трубок.

Современное направление развития рентгеновских источников – разработка источников, отличающихся возможностью управлять характеристиками излучения используя, например, источники с несколькими анодами или катодами [14–17]. Источник с несколькими анодами будет характеризоваться уникальными спектральными характеристиками. В работе предложен новый тип рентгеновского источника, представляющего собой широкополосный рентгеновский источник со сложным анодом, который может быть реализован как многоэлементный источник, состоящий из нескольких анодов, одновременно или последовательно облучающих объект в эксперименте. Идея широкополосного рентгеновского источника заключается в формировании спектра, близкого к равномерному в заданном диапазоне длин волн. Создание таких широкополосных источников представляет собой задачу, вследствие решения которой могут быть со-

зданы конструктивно и принципиально новые источники для различного применения, например, для рентгеновской микроскопии, рентгенофлуоресцентных методов, цветовой рентгенографии.

Расчет спектра широкополосного рентгеновского источника

Рассмотрим задачу формирования широкополосного рентгеновского источника, представляющего собой источник со сложным анодом, состоящий из нескольких рентгеновских трубок, одновременно или последовательно облучающих объект в эксперименте [18]. Широкополосный рентгеновский источник должен характеризоваться равномерным спектром тормозного излучения в заданном диапазоне длин волн. Равномерный спектр может быть образован несколькими отдельными источниками тормозного рентгеновского излучения. Спектральная интенсивность (спектральная плотность потока энергий) широкополосного источника $I_\lambda(\lambda)$ в зависимости от длины волны будет представлять сумму n спектров тормозного излучения рентгеновских трубок $I_{\lambda i}(\lambda)$ без учета характеристического излучения. Для идеализированной рентгеновской трубки без учета эффектов самопоглощения тормозной спектр широкополосного рентгеновского источника может быть описан формулой [19]:

$$I_\lambda(\lambda) = \sum_{i=1}^n I_{\lambda i}(\lambda) = a \sum_{i=1}^n I_i Z_i \frac{\lambda - \lambda_{0i}}{\lambda_{0i} \cdot \lambda^3}, \quad (1)$$

где a – коэффициент пропорциональности, I_i – ток электронов на аноде отдельного источника, Z_i – атомный номер материала анода отдельного источника, λ_{0i} – минимальная или граничная длина волны отдельного источника, зависящая от ускоряющего напряжения на i -ой рентгеновской трубке U_i .

Формула (1) с математической точки зрения представляет собой сумму нелинейных функций, различающихся диапазонами длин волн $[\lambda_{0i}; \infty)$, что будет приводить к нелинейной зависимости $I_\lambda(\lambda)$, состоящей из максимумов и минимумов. Отношение минимальной I_{min} интенсивности к максимальной I_{max} , в заданном диапазоне спектра, определяет значение допуска на изменении интенсивности в спектре $\beta = I_{min} / I_{max}$, лежащего в диапазоне $(0;1)$. В соответствии со значением β определяется количество источников в заданном диапазоне спектра. Значение $\beta = 1$ соответствует идеальному случаю равномерной интенсивности широкополосного источника и бесконечному количеству источников. Отдельный источник с учетом допуска β на изменение интенсивности в спектре широкополосного источника характеризуется диапазоном длин волн от λ_{min} до λ_{max} , в которой интенсивность изменяется от βI_{max} до I_{max} , как показано на рисунке 1.

Тормозной спектр в области малых длин волн ($\lambda < \lambda_{min}$), представляет собой резко убывающую обратную кубическую функцию. Кривая на правой части рисунка 1 ($\lambda > \lambda_{max}$) представляет убывающую обратную квадратичную функцию. В первом приближении можно считать, что спектр широкополосного источника является объединением спектров отдельных источников $[\lambda_{min1}; \lambda_{max1}] \cup [\lambda_{min2}; \lambda_{max2}] \cup \dots \cup [\lambda_{minN}; \lambda_{maxN}]$.

Для определения ширины спектра отдельного источника необходимо задать допуск на изменение интенсивности β (закрашенная область, рисунок 1). Максимальная интенсивность тормозного спектра достигается при длине волны равной $3/2 \lambda_0$. Чтобы найти границы спектра λ_{min} и λ_{max} , формулу (1) необходимо приравнять к βI_{max} :

$$aIZ \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0 \cdot \lambda^3} = \beta \cdot I_\lambda \left(\frac{3}{2} \lambda_0 \right). \quad (2)$$

В результате алгебраических преобразований из уравнения (2) получим кубическое уравнение относительно переменной $y = \lambda/\lambda_0$ и величины допуска на изменение интенсивности β :

$$4\beta y^3 - 27y + 27 = 0, \quad (3)$$

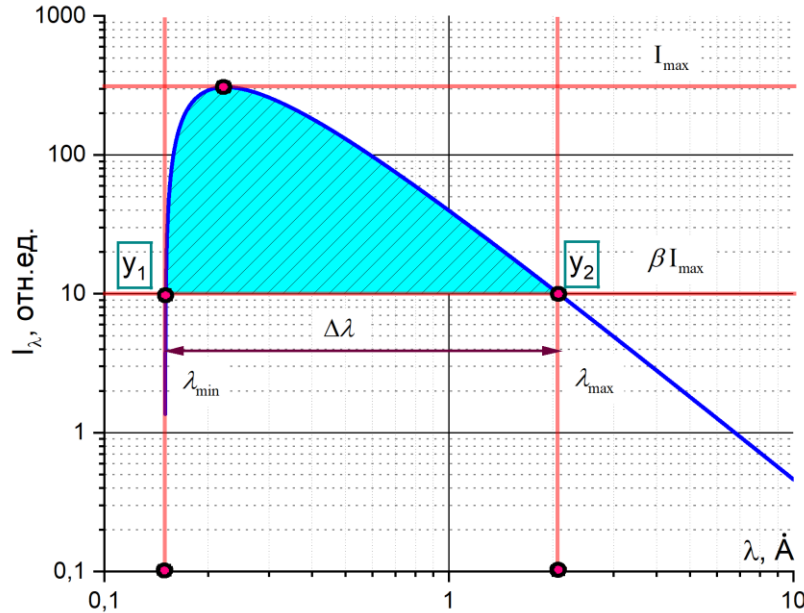


Рисунок 1 – Тормозной спектр рентгеновской трубки с медным анодом

Уравнение (3) имеет 3 действительных корня, один из которых отрицательный и не имеет физического смысла. Два положительных корня y_1 и y_2 соответствуют условию $y_2 > y_1$. Как показано на рисунке 1, y_1 определяет λ_{min} или левую границу спектра, y_2 определяет λ_{max} или правую границу спектра. Разность между λ_{min} и λ_{max} определяет ширину спектра отдельного источника $\Delta\lambda$ при заданном значении допуска на изменение интенсивности β и минимальной длине волны рентгеновского излучения λ_{min} . Множество решений уравнения (3) показаны на рисунке 2.

Полученные соотношения позволяют рассчитать широкополосный источник, состоящий из N отдельных источников, с заданным значением допуска на изменение интенсивности β в заданном диапазоне длин волн $\lambda_{min\Sigma}$ и $\lambda_{max\Sigma}$. Расчет спектра ведется от минимальной длины волны к максимальной. Алгоритм расчета содержит несколько итерационных этапов: на первом этапе определяется минимальная длина волны первого источника из соотношения $\lambda_{min1} = \lambda_{01} \cdot y_1$; на втором этапе определяется максимальное значение интенсивности первого источника из соотношения $I_{max} = I(3/2 \cdot \lambda_{01})$; на третьем этапе определяются максимальная длина волны первого источника из соотношения $\lambda_{max1} = \lambda_{01} \cdot y_2$. Данные этапы позволяют определить ширину спектра первого источника и максимальное значение интенсивности. Затем на следующей итерации минимальная длина волны второго источника рассчитывается с поправкой ξ на предыдущие итерации: $\lambda_{min2} = \lambda_{max1} + \xi$, – и процесс расчета по этапам 1–3 повторяется. Расчет ведется до достижения необходимой энергии $\lambda_{max\Sigma}$. Количество источников определяется диапазоном заданных длин волн $\lambda_{min\Sigma}$ и $\lambda_{max\Sigma}$ и допуском β , и может быть приближенно определено через корни уравнения (3) $y_1(\beta)$ и $y_2(\beta)$:

$$N = \frac{\Delta \ln \lambda}{\Delta \ln y(\beta)}. \quad (4)$$

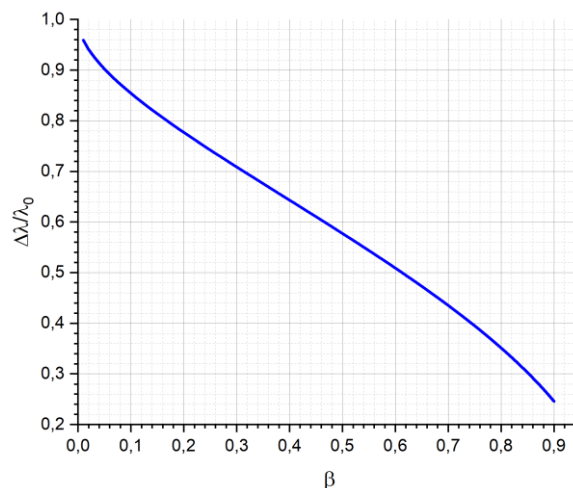


Рисунок 2 – График зависимости относительной ширины спектра от допустимого отклонения

Разработанная программа «X-ray-multi-tube» реализует вышеописанный алгоритм расчета спектра широкополосного источника [20–22]. Пример расчета спектра широкополосного источника показан на рисунке 3. Широкополосный источник состоит из трех источников ($\lambda_{01}=0,14 \text{ \AA}$, $\lambda_{02}=0,22 \text{ \AA}$, $\lambda_{03}=0,25 \text{ \AA}$). Каждый из источников представляет рентгеновскую трубку с медным анодом, работающих при различных напряжениях и токах $U_1=90 \text{ кВ}$, $I_1=2,9 \text{ мА}$, $U_2=57 \text{ кВ}$, $I_2=1,1 \text{ мА}$, $U_3=50 \text{ кВ}$, $I_3=2,2 \text{ мА}$. Ширина спектра широкополосного источника равна $\Delta\lambda = 0,1 \text{ \AA}$ при допуске $\beta = 0,98$.

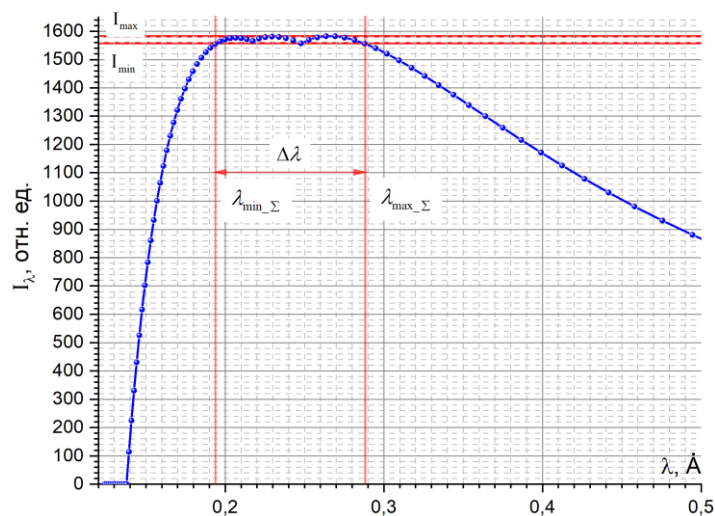


Рисунок 3 – Тормозной спектр широкополосного рентгеновского источника

Заклучение

Широкополосный рентгеновский источник состоит из нескольких источников рентгеновского излучения (рентгеновских трубок), которые одновременно или последовательно облучают заданный объект. Формирование спектра широкополосного источника заключается в выборе параметров отдельных источников излучения (материал анода, ток и рабочее напряжение трубки) таким образом, чтобы в результате суммирования был получен спектр, близкий к равномерному в заданном диапазоне длин волн. Получены основные соотношения для расчета спектра широкополосного источника, состоящего

из N отдельных источников. Метод расчета положен в основу разработанной программы «X-ray-multi-tube».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Attwood, D. Soft X-rays and extreme ultraviolet radiation: Principles and Applications / D. Attwood. – Cambridge : Cambridge University Press, 1999. – 470 p.
2. Мишетт, А. Оптика рентгеновского излучения / А. Мишетт. – М. : Мир, 1989. – 352 с.
3. Kumakhov, M. A. History of the evolution of the x-ray and neutron capillary optics / M. A. Kumakhov // Optics of Beams. – 1993. – Vol. 1. – P. 3–17.
4. Carolyn, A. MacDonald. An Introduction to X-ray Physics, Optics, and Applications / MacDonald Carolyn A. – United States : Princeton University Press, 2017. – 368 p.
5. Курчатовский специализированный источник синхротронного излучения «КИСИ-Курчатов» // НИЦ «Курчатовский институт». – URL: <http://kcsni.nrcki.ru/pages/main/sync/index.shtml> (дата обращения: 26.01.2025).
6. Синхротрон Русский Источник Фотонов («РИФ») // НИЦ «Курчатовский институт». – URL: <http://kcsni.nrcki.ru/pages/main/rsf/index.shtml> (дата обращения: 26.01.2025).
7. ESRF // European Synchrotron Radiation Facility. – Франция, 1990–2025. – URL: <https://esrf.fr/home.html> (дата обращения: 28.01.2025).
8. SPring-8 // Riken SPring-8 Center. – Япония, 1997–2025. – URL: <http://www.spring8.or.jp/en/> (дата обращения: 28.01.2025).
9. SOLEIL // Synchrotron SOLEIL. – Франция, 2006–2025. – URL: <https://www.synchrotron-soleil.fr/en> (дата обращения: 28.01.2025).
10. E-XFEL // European XFEL. – Германия, 2017–2025. – URL: <https://www.xfel.eu> (дата обращения: 30.01.2025).
11. Сибирский кольцевой источник фотонов «СКИФ» // ЦКП «СКИФ». – URL: [https://srf-skif.ru/index.php/ЦКП_«СКИФ»_\(поколение_4%2B,_энергия_3_ГэВ\)](https://srf-skif.ru/index.php/ЦКП_«СКИФ»_(поколение_4%2B,_энергия_3_ГэВ)) (дата обращения: 30.01.2025).
12. ESRF-EBS // European Synchrotron Radiation Facility. – URL: <https://esrf.fr/-cms/live/live/en/sites/www/home/about/upgrade.html> (дата обращения: 30.01.2025).
13. Маломощные рентгеновские трубки (современное состояние) / А. С. Бугаев, П. А. Ерошкин, В. А. Романько, Е. П. Шешин // УФН. – 2013. – Т. 183, № 7. – С. 727–740. – DOI: 10.3367/UFNr.0183.201307c.0727.
14. Patent US 2024/0062985 A1, H01J 35/147 (2019.05). X-ray tube with flexible intensity adjustment : № 20240062985A1 : filling date 10.08.2023 : publ. date 22.02.2024 / Paul Radcliffe, Christian Hoffmann, Kaan Atak, Carsten Michaelsen ; applicant incoat ec GmbH. – 18 p.
15. Patent US 11,116,462B2, A61B 6/03(2006.01), A61B 6/00(2006.01). X-ray system and method for generating x-ray image in color : № 11116462B2 : filling date 28.08.2018 : publ. date 14.09.2021 / Nabil Mohammed Maalej, Fahad Ahmad Abozaid ; applicant KING FAHD University of petroleum and minerals. – 24 p.
16. Патент RU 2645749C2, МПК H01J 35/00 (2006.01). Микрофокусная рентгеновская трубка : № 2645749C2 : заявлено 23.05.2016 : опубл. 28.02.2018 / Трубицын А. А., Грачев Е. Ю. ; заявитель Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. образования «Рязанский государственный радиотехнический университет». – 11 с.
17. Патент RU 2578675C1, МПК H01J 35/02 (2006.01). Многолучевая рентгеновская трубка : № 2578675C1 : заявлено 28.06.2013 : опубл. 27.03.2016 / Масленников О. Ю., Гузилов И. А. ; заявитель Демидова Е. В. – 25 с.

18. Balukho, I. N. Broadband X-ray source / I. N. Balukho ; scientific supervisor N. N. Kolchevsky // I Междунар. молодеж. науч.-культур. форум студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых : сб. материалов / М-во образования Респ. Беларусь ; Гомел. гос. техн. ун-т им. П. О. Сухого ; Таизский ун-т ; Науч. организация исследований и инноваций ; под общ. ред. А. А. Бойко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2024. – С. 36.

19. Иванов, С. А. Рентгеновские трубки технического назначения / С. А. Иванов, Г. А. Щукин. – Л. : Энергоатомиздат, 1989. – 200 с.

20. Кольчевская, И. Н. Моделирование рентгенооптических систем / И. Н. Кольчевская, П. В. Петров, Н. Н. Кольчевский // Компьютерные технологии и анализ данных (СТДА'2022) : материалы III Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 21–22 апр. 2022 г. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: В. В. Скакун (отв. ред.) [и др.]. – : РИВШ, 2022. – С. 217–219.

21. Кольчевская, И. Н. Метод цветовой визуализации рентгеновских спектров / И. Н. Кольчевская, Н. Н. Кольчевский // Прикладные проблемы оптики, информатики, радиофизики и физики конденсированного состояния : материалы VII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 120-летию со дня рождения акад. Антона Никифоровича Севченко, Минск, 18–19 мая 2023 г. / НИУ «Ин-т приклад. физ. проблем им. А. Н. Севченко» БГУ ; редкол.: Ю. И. Дудчик (гл. ред.), И. М. Цикман, И. Н. Кольчевская. – 2-я ред., доп. – Минск, 2023. – С. 35–36.

22. Balukho, I. N. Colour visualization method of x-ray spectra / I. N. Balukho, Yu. I. Dudchik, N. N. Kolchevsky // Приборостроение-2023 : материалы 16-й Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 16–17 нояб. 2023 г. / редкол.: О. К. Гусев (пред.) [и др.]. – Минск : БНТУ, 2023. – С. 187–189.

REFERENCES

1. Attwood, D. Soft X-rays and extreme ultraviolet radiation: Principles and Applications / D. Attwood. – Cambridge : Cambridge University Press, 1999. – 470 p.

2. Mishett, A. Optika rientgienovskogo izluchienija / A. Mishett. – M. : Mir, 1989. – 352 s.

3. Kumakhov, M. A. History of the evolution of the x-ray and neutron capillary optics / M. A. Kumakhov // Optics of Beams. – 1993. – Vol. 1. – P. 3–17.

4. Carolyn, A. MacDonald. An Introduction to X-ray Physics, Optics, and Applications / MacDonald Carolyn A. – United States : Princeton University Press, 2017. – 368 p.

5. Kurchatovskij spicializirovannyj istochnik sinkhrotronnogo izluchienija «KISI-Kurchatov» // NIC «Kurchatovskij institut». – URL: <http://kcsni.nrcki.ru/pages/main/sync/-index.shtml> (data obrashchienija: 26.01.2025).

6. Sinkhrotron Russkij Istochnik Fotonov («RIF») // NIC «Kurchatovskij institut». – URL: <http://kcsni.nrcki.ru/pages/main/rsf/index.shtml> (data obrashchienija: 26.01.2025).

7. ESRF // European Synchrotron Radiation Facility. – Francija, 1990–2025. – URL: <https://esrf.fr/home.html> (data obrashchienija: 28.01.2025).

8. SPring-8 // Riken SPring-8 Center. – Japonija, 1997–2025. – URL: <http://www.spring8.or.jp/en/> (data obrashchienija: 28.01.2025).

9. SOLEIL // Synchrotron SOLEIL. – Francija, 2006–2025. – URL: <https://www.synchrotron-soleil.fr/en> (data obrashchienija: 28.01.2025).

10. E-XFEL // European XFEL. – Giermanija, 2017–2025. – URL: <https://www.xfel.eu> (data obrashchienija: 30.01.2025).

11. Sibirskij kol'cievoj istochnik fotonov «SKIF» // СКР «SKIF». – URL: [https://srf-skif.ru/index.php/СКР_«SKIF»_\(pokolienije_4%2B,_enierhiya_3_HeV\)](https://srf-skif.ru/index.php/СКР_«SKIF»_(pokolienije_4%2B,_enierhiya_3_HeV)) (data obrashchienija: 30.01.2025).

12. ESRF-EBS // European Synchrotron Radiation Facility. – URL: <https://esrf.fr/-cms/live/live/en/sites/www/home/about/upgrade.html> (data obrashchienija: 30.01.2025).
13. Malomoshchnyje rientgienovskije trubki (sovriemiennoje sostojanije) / A. S. Bugajev, P. A. Jeroshkin, V. A. Roman'ko, Je. P. Sheshin // UFN. – 2013. – T. 183, № 7. – S. 727–740. – DOI: 10.3367/UFNr.0183.201307c.0727.
14. Patent US 2024/0062985 A1, H01J 35/147 (2019.05). X-ray tube with flexible intensity adjustment : № 20240062985A1 : filling date 10.08.2023 : publ. date 22.02.2024 / Paul Radcliffe, Christian Hoffmann, Kaan Atak, Carsten Michaelson ; applicant incoatec GmbH. – 18 p.
15. Patent US 11,116,462B2, A61B 6/03(2006.01), A61B 6/00(2006.01). X-ray system and method for generating x-ray image in color : № 11116462B2 : filling date 28.08.2018 : publ. date 14.09.2021 / Nabil Mohammed Maalej, Fahad Ahmad Abozaid ; applicant KING FAHD University of petroleum and minerals. – 24 p.
16. Patent RU 2645749S2, MPK H01J 35/00 (2006.01). Mikrofokusnaja rientgie-novskaja trubka : № 2645749S2 : zajavlieno 23.05.2016 : opubl. 28.02.2018 / Trubicyn A. A., Grachiov Je. Ju. ; zajavitel' Fiedier. gos. biudzh. obrazov. uchriezhdienije vyssh. obrazovanija «Riazanskij gosudarstviennyj radiotiekhnichieskij univiersitet». – 11 s.
17. Patent RU 2578675S1, MPK H01J 35/02 (2006.01). Mnogoluchievaja rientgienov-skaja trubka : № 2578675S1 : zajavlieno 28.06.2013 : opubl. 27.03.2016 / Masliennikov O. Ju., Guzilov I. A. ; zajavitel' Diemidova Je. V. – 25 s.
18. Balukho, I. N. Broadband X-ray source / I. N. Balukho ; scientific supervisor N. N. Kolchevsky // I Miezhhdunar. molodiozh. nauch.-kul'tur. forum studentov, magistrantov, aspirantov i molodykh uchionykh : sb. materialov / M-vo obrazovanija Riesz. Bielarus' ; Gomi. gos. tiekhn. un-t im. P. O. Sukhogo ; Taizskij un-t ; Nauch. organizacija issliedovaniy i innovacij ; pod obshch. ried. A. A. Bojko. – Gomi. : GGTU im. P. O. Sukhogo, 2024. – S. 36.
19. Ivanov, S. A. Rientgienovskije trubki tiekhnichieskogo naznachienija / S. A. Ivanov, G. A. Shchukin. – L. : Eniergoatomizdat, 1989. – 200 s.
20. Kol'chievskaja, I. N. Modelirovanije rientgienooptichieskikh sistiem / I. N. Kol'chievskaja, P. V. Pietrov, N. N. Kol'chievskij // Kompjuternyje tiekhnolofii i analiz dannyx (CTDA2022) : materialy III Miezhhdunar. nauch.-prakt. konf., Minsk, 21–22 apr. 2022 g. / Bielorus. gos. un-t ; riedkol. : V. V. Skakun (otv. ried.) [i dr.]. – Minsk : RIVSh, 2022. – S. 217–219.
21. Kol'chievskaja, I. N. Mietod cvietovoj vizualizacii rientgienovskikh spiektrov / I. N. Kol'chievskaja, N. N. Kol'chievskij // Prikladnyje problemi optiki, informatiki, radiofiziki i fiziki kondensirovannogo sostojanija : materialy VII Miezhhdunar. nauch.-prakt. konf., posviashch. 120-lietiju so dnia rozhdienija akad. Antona Nikiforovicha Sievchienko, Minsk, 18–19 maja 2023 g. / NIU «In-t priklad. fiz. problem im. A. N. Sievchienko» BGU ; riedkol.: Ju. I. Dudchik (gl. ried.), I. M. Cikman, I. N. Kol'chievskaja. – 2-ja ried., dop. – Minsk, 2023. – S. 35–36.
22. Balukho, I. N. Colour visualization method of x-ray spectra / I. N. Balukho, Yu. I. Dudchik, N. N. Kolchevsky // Priborostrojenije-2023 : materialy 16-j Miezhhdunar. nauch.-tiekhn. konf., Minsk, 16–17 nojab. 2023 g. / riedkol.: O. K. Gusiev (pried.) [i dr.]. – Minsk : BNTU, 2023. – S. 187–189.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 07.04.2025

Олег Викторович Матысик¹, Иван Владимирович Ковальчук²

¹канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²студент 3-го курса физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Oleg Matysik¹, Ivan Kovalchuk²

¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
of Brest State A. S. Pushkin University

²3-rd Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: 1matysikoleg@mail.ru

ТРЕХСЛОЙНАЯ ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для решения линейных операторных уравнений первого рода с положительным ограниченным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве предлагается явная трехслойная итерационная процедура. Исследована сходимость итерационного метода в случае априорного и апостериорного выбора параметра регуляризации при точной и приближенной правых частях операторного уравнения в исходной норме гильбертова пространства. Доказана сходимость метода итераций в полунорме гильбертова пространства. Предложенным методом решена численная модельная задача. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении линейных операторных уравнений, а также при решении прикладных некорректных задач.

Ключевые слова: некорректное уравнение первого рода, явная трехслойная итерационная процедура, гильбертово пространство, ограниченный и самосопряженный оператор, полунорма, правило останова по невязке.

Three-Layer Iterative Solution Procedure Ill-Posed Equations of the First Kind in a Hilbert Space

To solve linear operator equations of the first kind with a positive bounded self-adjoint operator in a Hilbert space an explicit three-layer iterative procedure is proposed. The convergence of the iterative method is studied in the case of a priori and a posteriori choice of the regularization parameter for the exact and approximate right-hand sides of the operator equation in the original norm of the Hilbert space. The convergence of the iteration method has been proven in the seminorm of a Hilbert space. The proposed method solves the numerical model problem. The results obtained can be used in theoretical research in solving linear operator equations, as well as in solving applied ill-posed problems.

Key words: ill-posed equation of the first kind, explicit three-layer iterative procedure, Hilbert space, bounded and self-adjoint operator, seminorm, the rule of stopping by discrepancy.

Введение

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач. Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике, экономике и управлении, может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \quad (1)$$

с заданным оператором $A: X \rightarrow Y$ и элементом y , X и Y – метрические пространства, а в особо оговариваемых случаях – банаховы или даже гильбертовы. Ж. Адамаром (J. Hadamard) [1] было введено следующее понятие корректности:

Определение. Задачу отыскания решения $x \in X$ уравнения (1) называют корректной (или корректно поставленной, или корректной по Адамару), если при любой фиксированной правой части $y = y_0 \in Y$ уравнения (1) его решение:

- а) существует в пространстве X ;
- б) определено в пространстве X однозначно;
- в) устойчиво в пространстве X , т. е. непрерывно зависит от правой части $y \in Y$. В случае нарушения любого из этих условий задачу называют некорректной (некорректно поставленной); более конкретно при нарушении условия в) ее принято называть неустойчивой.

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора A^{-1} на всем пространстве Y .

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались. Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения первого рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2 , обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии и т. д.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы, поскольку они легко реализуются на ПЭВМ. Различные итерационные схемы решения некорректно поставленных задач были предложены в работах [2–12].

В настоящей статье предлагается *явная трехслойная итерационная процедура* решения некорректных задач в гильбертовом пространстве и проведено исследование ее основных свойств. Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным *явным методом итераций Ландвебера* [2] $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$, $x_{0,\delta} = 0$ показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях.

Рассмотренный в статье трехслойный итерационный метод найдет практическое применение в прикладной математике: он может быть использован для решения задач, встречающихся в теории оптимального управления, математической экономике, геофизике, теории потенциала, диагностике плазмы, в наземной или воздушной геологоразведке, сейсмике, акустике, спектроскопии и медицине (компьютерной томографии).

1. Постановка задачи

В работе решается операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \quad (2)$$

с действующим в гильбертовом пространстве H ограниченным положительным самосопряженным оператором A , в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, однако не является его собственным значением.

При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (2) является некорректной. Если решение уравнения (2) все же существует, то для его отыскания естественно пытаться применить различные итерационные схемы.

В настоящей работе предлагается трехслойная итерационная процедура явного типа

$$x_n = 2(E - \alpha A)x_{n-1} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2} + \alpha^2 A y, \quad x_0 = x_1 = 0. \quad (3)$$

Здесь E – единичный оператор.

Обычно правая часть уравнения (2) известна с некоторой точностью δ , т. е. известен y_δ , для которого $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. Поэтому вместо схемы (3) приходится рассматривать приближения

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A)x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 A y_\delta, \quad x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \quad (4)$$

Ниже, как обычно, под сходимостью процедуры (4) понимается утверждение о том, что приближения (4) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (2) при подходящем выборе n и достаточно малых δ : $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$.

2. Сходимость метода с априорным выбором числа итераций

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора A и формулой (3), по индукции получим $x - x_n = \int_0^M \left[\lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^n + n\alpha(1 - \alpha\lambda)^{n-1} \right] dE_\lambda y$, где $M = \|A\|$, E_λ – спектральная функция оператора A . Так как при $0 < \alpha < 2/M$ имеем $|1 - \alpha\lambda| < 1$, то отсюда легко выводится сходимость процесса (3) при $n \rightarrow \infty$.

Итерационный процесс (4) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ . Справедлива

Теорема 1. Итерационный процесс (4) сходится при

$$\alpha \in \left(0, \frac{5}{4M} \right], \quad (5)$$

если выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из [5–6; 8]. При этом по индукции легко показывается оценка:

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n,\delta}\| &= \left\| A^{-1} \left(E - (E - \alpha A)^n - n\alpha A (E - \alpha A)^{n-1} \right) (y - y_\delta) \right\| = \\ &= \left\| \int_0^M \lambda^{-1} \left(1 - (1 - \alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda (1 - \alpha\lambda)^{n-1} \right) dE_\lambda (y - y_\delta) \right\| \leq \frac{5}{4} (n-1)\alpha\delta. \end{aligned}$$

Скорость сходимости приближений (4) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения (2), т. е. $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда $y = A^{s+1} z$, и, следовательно, получим

$$x - x_n = \int_0^M \lambda^s (1 - \alpha\lambda)^{n-1} dE_\lambda z + \int_0^M \lambda^{s+1} (1 - \alpha\lambda)^{n-1} (n-1)\alpha dE_\lambda z.$$

Для оценки нормы $\|x - x_n\|$ найдем максимумы модулей подынтегральных функций $f_1(\lambda) = \lambda^s (1 - \alpha\lambda)^{n-1}$ и $f_2(\lambda) = \lambda^{s+1} (1 - \alpha\lambda)^{n-1} (n-1)\alpha$.

В [6] показано, что при условии (5) $|f(\lambda)| = |\lambda^s (1 - \alpha\lambda)^{kn}| \leq s^s (kn\alpha e)^{-s}$. Поэтому $|f_1(\lambda)| \leq s^s [(n-1)\alpha e]^{-s}$, $|f_2(\lambda)| \leq (s+1)^{s+1} [(n-1)\alpha]^{-s} e^{-(s+1)}$. Отсюда получим $\|x - x_n\| \leq s^s (s+2) [(n-1)\alpha e]^{-s} \|z\|$. Таким образом, общая оценка погрешности итерационной процедуры (4) запишется в виде

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq s^s (s+2) [(n-1)\alpha e]^{-s} \|z\| + \frac{5}{4} (n-1)\alpha\delta.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим оценку $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq \left(\frac{5}{4}\right)^{s/(s+1)} (s+1)(s+2)^{1/(s+1)} e^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$ и априорный момент останова

$n_{\text{опт}} = 1 + \left(\frac{5}{4}\delta\right)^{-1/(s+1)} e^{-s/(s+1)} s(s+2)^{1/(s+1)} \alpha^{-1} \|z\|^{1/(s+1)}$. Существенно, что порядок оптимальной оценки есть $O(\delta^{s/(s+1)})$, и, как следует из [3], он оптимален в классе задач с истокорепредставимыми решениями. Очевидно, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α , но от него зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ и, значит, объема вычислительной работы, следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию (5), и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in \mathbb{Z}$.

Приведем погрешность итерационной схемы (4) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – значение, полученное по формуле (4), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом погрешностей вычисления γ_n , т. е. $z_n = 2(E - \alpha A)z_{n-1} - (E - \alpha A)^2 z_{n-2} + \alpha^2 A y_\delta + \alpha \gamma_n$, $z_0 = z_1 = 0$. Оценка погрешности итерационного метода (4) в этом случае имеет вид

$$\|x - z_n\| \leq s^s (s+2) [(n-1)\alpha e]^{-s} \|z\| + \frac{5}{4} (n-1)\alpha\delta + \frac{(n-1)n}{2} \alpha \gamma, \quad \gamma = \sup_i |\gamma_i|.$$

2. Сходимость метода в полунорме гильбертова пространства при точной и приближенной правой части уравнения

Изучим сходимость итерационного метода (4) в случае единственного решения в полунорме (энергетической норме) гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$ [5–6, 8, 12]. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ . Полагаем, что $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \quad (6)$$

Тогда запишем первое слагаемое из равенства (6) в виде

$$\begin{aligned} x - x_n &= A^{-1} \left[(E - \alpha A)^n + n\alpha A(E - \alpha A)^{n-1} \right] y = \\ &= A^{-1} (E - \alpha A)^n y + n\alpha (E - \alpha A)^{n-1} y = (E - \alpha A)^n x + n\alpha A(E - \alpha A)^{n-1} x = \\ &= (E - \alpha A)^{n-1} (E - \alpha A + n\alpha A) x = (E - \alpha A)^{n-1} [E + (n-1)\alpha A] x. \end{aligned}$$

Как было показано в разделе 1, $x - x_n$ бесконечно мало в норме пространства H при $n \rightarrow \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки необходима дополнительная информация на гладкость точного решения x – его истокообразная представимость. При использовании полунормы нам это дополнительное предположение не потребуется. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора A имеем

$$\begin{aligned} \|x - x_n\|_A^2 &= \left(A(E - \alpha A)^{n-1} [E + (n-1)\alpha A] x, (E - \alpha A)^{n-1} [E + (n-1)\alpha A] x \right) = \\ &= \left(A(E - \alpha A)^{2n-2} [E + (n-1)\alpha A]^2 x, x \right) = \int_0^M \lambda (1 - \alpha \lambda)^{2n-2} [1 + (n-1)\alpha \lambda]^2 d(E_\lambda x, x). \end{aligned}$$

Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции при $\lambda \in [0, M]$. Функция $\varphi(\lambda) = \lambda(1 - \alpha \lambda)^{2n-2} [1 + (n-1)\alpha \lambda]^2 = \left\{ \lambda(1 - \alpha \lambda)^{n-1} + (n-1)\alpha \lambda^2 (1 - \alpha \lambda)^{n-1} \right\} \left\{ (1 - \alpha \lambda)^{n-1} + (n-1)\alpha \lambda (1 - \alpha \lambda)^{n-1} \right\}$ представляет собой выражение, содержащее частные случаи при $s = 1$ и $s = 2$ функций, оцененных в [6]. Поэтому в нашем случае при условии (5) имеем

$$\begin{aligned} \max_{\lambda \in [0, M]} |\varphi(\lambda)| &\leq \left\{ [(n-1)\alpha e]^{-1} + 4(n-1)\alpha [(n-1)\alpha e]^{-2} \right\} \left\{ 1 + (n-1)\alpha [(n-1)\alpha e]^{-1} \right\} = \\ &= [(n-1)\alpha e]^{-1} (1 + 4e^{-1}) (1 + e^{-1}) = (e+1)(e+4)e^{-3} [(n-1)\alpha]^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, при выполнении условия (5) справедлива следующая оценка

$$\|x - x_n\|_A \leq (e+1)^{1/2} (e+4)^{1/2} e^{-3/2} [(n-1)\alpha]^{-1/2} \|x\|.$$

Оценим второе слагаемое в (6). Как показано в разделе 1, имеет место равенство $x_n - x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^n - n\alpha A(E - \alpha A)^{n-1} \right] (y - y_\delta)$. Тогда справедливо

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 &= \left(A(x_n - x_{n,\delta}), x_n - x_{n,\delta} \right) = \left(\left[E - (E - \alpha A)^n - n\alpha A(E - \alpha A)^{n-1} \right] (y - y_\delta), \right. \\ &\quad \left. A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^n - n\alpha A(E - \alpha A)^{n-1} \right] (y - y_\delta) \right) = \\ &= \left(A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^n - n\alpha A(E - \alpha A)^{n-1} \right]^2 (y - y_\delta), y - y_\delta \right) = \\ &= \int_0^M \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha \lambda)^n - n\alpha \lambda (1 - \alpha \lambda)^{n-1} \right]^2 d(E_\lambda (y - y_\delta), y - y_\delta). \end{aligned}$$

Обозначим через $\xi_n(\lambda)$ подынтегральную функцию и оценим ее сверху при условии (5). Сначала методом математической индукции докажем, что при (5) $|\omega_n(\lambda)| = \left| \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)^{n-1}] \right| \leq (n-1)\alpha$.

При $n = 1$ получим $\omega_1(\lambda) = 0 \leq 0$, т. е. при $n = 1$ рассматриваемое неравенство справедливо. Предположим, что доказываемое неравенство верно при $n = k$, т. е. выполняется $\omega_k(\lambda) = \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha\lambda)^k - k\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)^{k-1}] \leq (k-1)\alpha$, и докажем его справедливость при $n = k+1$. Итак, получим

$$\begin{aligned} \omega_{k+1}(\lambda) &= \omega_k(\lambda) + \omega_{k+1}(\lambda) - \omega_k(\lambda) \leq (k-1)\alpha + \omega_{k+1}(\lambda) - \omega_k(\lambda) = \\ &= (k-1)\alpha + \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha\lambda)^{k+1} - (k+1)\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)^k] - \\ &\quad - \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha\lambda)^k - k\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)^{k-1}] = (k-1)\alpha + \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^k [1 - (1 - \alpha\lambda)] - \\ &\quad - k\alpha(1 - \alpha\lambda)^k - \alpha(1 - \alpha\lambda)^k + k\alpha(1 - \alpha\lambda)^{k-1} = (k-1)\alpha + k\alpha(1 - \alpha\lambda)^{k-1} - k\alpha(1 - \alpha\lambda)^k = \\ &= (k-1)\alpha + k\alpha(1 - \alpha\lambda)^{k-1} [1 - (1 - \alpha\lambda)] = (k-1)\alpha + k\alpha^2\lambda(1 - \alpha\lambda)^{k-1}. \end{aligned}$$

Покажем, что $|\gamma(\lambda)| = |k\alpha^2\lambda(1 - \alpha\lambda)^{k-1}| < \alpha$. Обозначим $\alpha\lambda = t$, получим $\gamma(t) = kat(1-t)^{k-1}$.

Тогда имеем $\gamma'(t) = k\alpha(1-t)^{k-1} + kat(k-1)(-1)(1-t)^{k-2} = k\alpha(1-t)^{k-2} [1-t-t(k-1)] = k\alpha(1-t)^{k-2}(1-tk)$. Приравняем $\gamma'(t)$ нулю: $k\alpha(1-t)^{k-2}(1-tk) = 0$, $k\alpha \neq 0$ и $(1-t)^{k-2} \neq 0$, т. к. иначе $\gamma(t) = 0$, поэтому $1-tk = 0$, следовательно, $t^* = \frac{1}{k}$ — стационарная точка $\gamma(t)$. А так как $\gamma''(t^*) = -k^2\alpha(1-t^*)^{k-2} = -k^2\alpha\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-2} < 0$, то $t^* = \frac{1}{k}$ —

точка локального максимума функции $\gamma(t)$. Найдём этот максимум. Имеем $|\gamma(t^*)| = |kat^*(1-t^*)^{k-1}| = \alpha \left| \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} \right| < \alpha$, т. к. при $k > 1$ $\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} < 1$. Нетрудно

показать, что $\left| \gamma\left(\frac{5}{4}\right) \right| < \alpha$ ($5k < 4^k$, $k > 1$), и, следовательно, получим

$|\gamma(\lambda)| = |k\alpha^2\lambda(1 - \alpha\lambda)^{k-1}| < \alpha$. Поэтому по индукции справедливость рассматриваемого

неравенства доказана. Следовательно, при (5) выполняется $|\omega_n(\lambda)| \leq (n-1)\alpha$.

Вернемся к оценке положительной функции $\xi_n(\lambda)$, имеем

$$\begin{aligned} \xi_n(\lambda) &= \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)^{n-1}]^2 = \\ &= \left| \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)^{n-1}] \right| \left| 1 - (1 - \alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)^{n-1} \right| \leq \\ &\leq (n-1)\alpha \left(1 + \left| (1 - \alpha\lambda)^n \right| + \left| n\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)^{n-1} \right| \right) \leq 3(n-1)\alpha, \end{aligned}$$

т. к. при условии (5) справедливо $|1 - \alpha\lambda| < 1$. Итак, для любых $n \geq 1$ $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 \leq 3(n-1)\alpha\delta^2$, поэтому $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq 3^{1/2}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta$, $n \geq 1$.

Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + 3^{1/2}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta$, $n \geq 1$ и при $n \rightarrow \infty$ $\|x - x_n\|_A \rightarrow 0$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, достаточно, чтобы $\sqrt{n-1}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. Таким образом, если в процедуре (4) выбрать число итераций $n = n(\delta)$, зависящих от δ так, чтобы $\sqrt{n-1}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, то получим регуляризующий метод, обеспечивающий сходимость к точному решению уравнения (2) в полунорме гильбертова пространства. Итак, доказана

Теорема 2. Итерационная процедура (4) при условии (5) сходится в полунорме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать так, чтобы $\sqrt{n-1}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (4):

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq (e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}[(n-1)\alpha]^{-1/2}\|x\| + 3^{1/2}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta, \quad n \geq 1. \quad (7)$$

Оптимизируем полученную оценку (7) по n , т. е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций n , при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв к нулю производную по n от правой части равенства (7), получим $\alpha^{-1/2}(e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}\|x\| = 3^{1/2}\alpha^{1/2}\delta(n-1)$, отсюда

$$n_{\text{опт}} = 1 + 3^{-1/2}(\alpha\delta)^{-1}(e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}\|x\|. \quad (8)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (7), найдем ее оптимальное значение:

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2 \cdot 3^{1/4}(e+1)^{1/4}(e+4)^{1/4}e^{-3/4}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2}. \quad (9)$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. При условии (5) оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса (4) в полунорме гильбертова пространства имеет вид (9) и получается при $n_{\text{опт}}$ из (8).

Отметим тот факт, что для сходимости метода (4) в полунорме достаточно выбрать число итераций $n = n(\delta)$ так, чтобы $\sqrt{n-1}\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. Однако $n_{\text{опт}} = O(\delta^{-1})$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-1} , и такой порядок обеспечивает сходимость метода итераций (4).

Ответ на вопрос, когда из сходимости в полунорме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H , дает

$$\textbf{Теорема 4. Если выполнены условия: 1) } E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0, \text{ 2) } E_\varepsilon x = 0, \text{ где } E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda,$$

$0 < \varepsilon < \|A\|$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в полунорме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.

Доказательство.

Из 1) и 2) имеем $\int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) = 0$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \|x - x_{n,\delta}\|^2 &= \int_0^M d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), x - x_{n,\delta}) = \int_0^M \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) = \\ &= \int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) + \int_\varepsilon^M \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) = \\ &= \int_\varepsilon^M \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^M d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^M d(E_\lambda(x - x_{n,\delta}), A(x - x_{n,\delta})) = \frac{1}{\varepsilon} \|x - x_{n,\delta}\|_A^2. \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 1. Так как $x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^n - n\alpha A(E - \alpha A)^{n-1} \right] y_\delta$, то для того, чтобы $x_{n,\delta}$ удовлетворяло условию $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, достаточно потребовать, чтобы $E_\varepsilon y_\delta = 0$. Таким образом, если решение x и приближенная правая часть y_δ таковы, что $E_\varepsilon x = 0$ и $E_\varepsilon y_\delta = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в полунорме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства и, следовательно, для сходимости приближений (4) в норме пространства H не требуется предположения истого-представимости точного решения.

Приведем погрешность схемы (4) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (4), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом погрешностей вычисления β_n , т. е.

$$z_n = 2(E - \alpha A)z_{n-1} - (E - \alpha A)^2 z_{n-2} + \alpha^2 A y_\delta + \alpha \beta_n, \quad z_0 = z_1 = 0. \quad (10)$$

Если обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$, то вычитая из (10) равенство (4), получим

$$\varepsilon_n = 2(E - \alpha A)\varepsilon_{n-1} - (E - \alpha A)^2 \varepsilon_{n-2} + \alpha \beta_n, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0, \quad \beta_0 = \beta_1 = 0. \quad (11)$$

Нетрудно доказать, что $\varepsilon_n = \sum_{i=2}^n (n-i+1)(E - \alpha A)^{n-i} \alpha \beta_i$. Получим оценку по-

грешности метода (4) при счете с округлениями в полунорме гильбертова пространства. Имеем

$$\|\varepsilon_n\|_A^2 = (A\varepsilon_n, \varepsilon_n) = \left(A \sum_{i=2}^n (n-i+1)(E - \alpha A)^{n-i} \alpha \beta_i, \sum_{i=2}^n (n-i+1)(E - \alpha A)^{n-i} \alpha \beta_i \right) =$$

$$= \left(A \left[\sum_{i=2}^n (n-i+1)(E-\alpha A)^{n-i} \right]^2 \alpha^2 \beta_i, \beta_i \right) = \alpha \int_0^M \alpha \lambda \left[\sum_{i=2}^n (n-i+1)(1-\alpha \lambda)^{n-i} \right]^2 d(E_\lambda \beta_i, \beta_i).$$

Так как $\alpha \lambda \in (0, 5/4]$, то $\|\varepsilon_n\|_A^2 \leq \alpha \beta^2 \frac{5}{4} \left(\frac{(n-1)n}{2} \right)^2$, где $\beta = \sup_i |\beta_i|$. Отсюда имеем

$$\|\varepsilon_n\|_A = \|z_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \frac{(n-1)n}{4} (5\alpha)^{1/2} \beta.$$

Таким образом, с учетом вычислительных погрешностей получим оценку погрешности трехслойной итерационной процедуры (4) в полунорме гильбертова пространства

$$\begin{aligned} \|x - z_n\|_A &\leq \|x - x_{n,\delta}\|_A + \|x_{n,\delta} - z_n\|_A \leq \\ &\leq (e+1)^{1/2} (e+4)^{1/2} e^{-3/2} [(n-1)\alpha]^{-1/2} \|x\| + 3^{1/2} (n-1)^{1/2} \alpha^{1/2} \delta + \frac{(n-1)n}{4} (5\alpha)^{1/2} \beta, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

3. Сходимость метода с апостериорным выбором числа итераций

Априорный выбор числа итераций $n_{\text{опт}}$ в исходной норме гильбертова пространства получен в предположении, что точное решение x истокорепредставимо. Однако не всегда имеются сведения об элементе z и степени истокорепредставимости s . Тем не менее метод (4) становится вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке [3; 5; 6; 8]. Определим момент m останова итерационного процесса (4) условием

$$\left. \begin{aligned} \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| &> \varepsilon, \quad (n < m), \\ \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| &\leq \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \quad (12)$$

Покажем возможность применения правила останова (12) к итерационному методу (4). Ниже метод итераций (4) с остановом (12) является сходящимся, если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_m \|x - x_{m,\delta}\| \right) = 0. \quad \text{Рассмотрим семейство функций } g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - (1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1} \right]. \quad \text{Нетрудно показать, что для } g_n(\lambda) \text{ выполняются условия:}$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \frac{5}{4} (n-1)\alpha, \quad n \geq 1, \quad M = \|A\|, \quad 0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}, \quad (13)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq 2, \quad 0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}, \quad (14)$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \lambda \in (0, M], \quad 0 < \alpha < 2/M, \quad (15)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq (s+2) \left(\frac{s}{\alpha e} \right)^s (n-1)^{-s}, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq s < \infty, \quad 0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}. \quad (16)$$

Аналогично [5; 6; 8] доказываются следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. Тогда для любого $w \in H$ $(E - Ag_n(A))w \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Лемма 2. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. Тогда для любого $v \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение $(n-1)^s \|A^s (E - Ag_n(A))v\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $0 \leq s < \infty$.

Лемма 3. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. Если для некоторой подпоследовательности $n_k < \bar{n} = \text{const}$ и $v_0 \in \overline{R(A)}$ при $k \rightarrow \infty$ имеем $\omega_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$, то $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$.

Используем эти леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 5. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (4) выбирается по правилу (12), тогда $x_{m,\delta} \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство.

По индукции нетрудно показать, что $x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^n - n\alpha A(E - \alpha A)^{n-1} \right] y_\delta$. Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \quad (17)$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A[E - Ag_n(A)]x - (E - Ag_n(A))(y_\delta - y). \quad (18)$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (19)$$

$$\sigma_n = (n-1)\|A(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Кроме того, из (13) и (14) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta, \quad (21)$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \leq 2. \quad (22)$$

Применим правило останова (12). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b\delta$, $b > 1$ и из (18) и (22) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \leq (b+2)\delta. \quad (23)$$

Для любых $n < m$ справедливы неравенства $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Поэтому $\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \geq (b-2)\delta$. Итак, для любых $n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq (b-2)\delta. \quad (24)$$

Из (20) и (24) при $n = m-1$ получаем $\frac{\sigma_{m-1}}{m-2} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \geq (b-2)\delta$ или, что то же самое, $(m-2)\delta \leq \frac{\sigma_{m-1}}{b-2} \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ (так как из (20) $\sigma_m \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$). Если при этом $m \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$, то, используя равенство (17), получим

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \\ + \frac{5}{4}\alpha(m-1)\delta \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \delta \rightarrow 0,$$

т. к. из (19) вытекает $\|(E - Ag_m(A))x\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$.

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \rightarrow x, \delta_n \rightarrow 0$.

Действительно, из (23) имеем $\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \leq (b+2)\delta_n \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$.

Следовательно, $A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$, и по лемме 3 получаем, что $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$. Отсюда имеем $\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\| \leq \|(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| + \\ + \frac{5}{4}\alpha(m(\delta_n)-1)\delta_n \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$. Теорема 5 доказана. Имеет место

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 5 и пусть $x = A^s z, s > 0$. Тогда справедливы оценки $m(\delta) \leq 2 + \frac{s+1}{\alpha e} \left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta} \right]^{1/(s+1)}$,

$$\|x_{m(\delta),\delta} - x\| \leq 2^{1/(s+1)} [(b+2)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{5}{4}\alpha \left\{ 1 + \frac{s+1}{\alpha e} \left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta} \right]^{1/(s+1)} \right\} \delta. \quad (25)$$

Доказательство.

$$\text{Имеем } \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| = \left\| \int_0^M \lambda^{s+1} (1 - \lambda g_{m-1}(\lambda)) dE_\lambda z \right\| \leq (s+3)(s+1)^{s+1} [(m-2)\alpha e]^{-(s+1)} \|z\|.$$

Тогда, воспользовавшись (24), получим $(b-2)\delta \leq (s+3)(s+1)^{s+1} [(m-2)\alpha e]^{-(s+1)} \|z\|$,

откуда имеем $m \leq 2 + \frac{s+1}{\alpha e} \left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta} \right]^{1/(s+1)}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\|(E - Ag_m(A))x\| = \|A^s (E - Ag_m(A))z\| \leq \\ \leq \|A^{s+1} (E - Ag_m(A))z\|^{s/(s+1)} \|(E - Ag_m(A))z\|^{1/(s+1)} \leq 2^{1/(s+1)} \|A(E - Ag_m(A))x\|^{s/(s+1)} \times \\ \times \|z\|^{1/(s+1)} \leq 2^{1/(s+1)} [(b+2)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \quad (\text{см. (23)}).$$

Теперь, поскольку соотношение (17) справедливо для любых n , то

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \\ \leq 2^{1/(s+1)} [(b+2)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{5}{4}\alpha(m-1)\delta \leq$$

$$\leq 2^{1/(s+1)} [(b+2)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{5}{4} \alpha \left\{ 1 + \frac{s+1}{\alpha e} \left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta} \right]^{1/(s+1)} \right\} \delta.$$

Теорема 6 доказана.

Замечание 2. Порядок оценки (25) есть $O(\delta^{s/(s+1)})$, и, как следует из [3], он оптимален в классе решений $x = A^s z$, $s > 0$.

Замечание 3. В формулировке теоремы 6 предполагается, что точное решение истокорпредставимо, но знание истокорпредставимости не потребуется на практике, т. к. при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку решения.

4. Численная модельная задача

Рассмотрим в пространстве $L_2(0,1)$ задачу в виде уравнения

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (26)$$

с симметричным положительным ядром $K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & t \leq s, \\ s(1-t), & t > s, \end{cases}$ точной правой частью

$y(t) = \frac{(t-1)(t^2-t-1)}{12}$. В качестве точного решения сформулированной задачи выберем функцию $x(t) = t(1-t)$.

Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ , и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение.

Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения $\tilde{y}_i$, $i = \overline{1, m}$, полученные следующим образом $\tilde{y}_i = [y(t_i) \cdot 10^k + 0,5] / 10^k$, квадратные скобки означают целую часть числа и $k = 4$.

При $k = 4$ величина погрешности $\delta = 10^{-4}$. Действительно, $\int_0^1 [y(t) - \tilde{y}(t)]^2 dt \approx \sum_{i=1}^m [y(t_i) - \tilde{y}_i]^2 h \leq mh(10^{-k})^2 = 10^{-2k}$.

Заменим интеграл в уравнении (26) квадратурной суммой, например, по формуле правых прямоугольников с узлами $s_j = jh$, $j = \overline{1, m}$, $h = 1/m$, т. е. $\int_0^1 K(t,s)x(s)ds \approx$

$$\sum_{j=1}^m K(t, s_j) h x_j.$$

Тогда получим равенство $\sum_{j=1}^m K(t, s_j) h x_j + \rho_m(t) = y(t)$, где $\rho_m(t)$ – остаток квадратурной замены.

Записав последнее равенство в точках $t_i, i = \overline{1, m}$, получим уравнения

$$\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h x_j + \rho_m(t_i) = y(t_i), i = \overline{1, m}.$$

Точные значения $y(t_i)$ мы не знаем, а знаем лишь приближения $\tilde{y}_i$ и, отбросив теперь остаточный член, получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно приближенного решения

$$\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h x_j = \tilde{y}_i, i = \overline{1, m}. \quad (27)$$

Выберем для определенности $m = 32$ и будем решать систему (27) методом итераций (4), который в дискретной форме запишется:

$$x_i^{(n)} = 2x_i^{(n-1)} - 2\alpha \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h x_j^{(n-1)} - x_i^{(n-2)} + 2\alpha \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h x_j^{(n-2)} - \\ - \alpha^2 \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h \left(\sum_{l=1}^m K(t_j, s_l) h x_l^{(n-2)} \right) + \alpha^2 \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) \tilde{y}_j, \quad x_i^{(0)} = x_i^{(1)} = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Затем система (27) решалась методом Ландвебера [2], который в данном случае запишется: $x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha \left[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h x_j^{(n)} \right]$, $x_i^{(0)} = 0$, $i = \overline{1, m}$. При счете выби-

ралось $\alpha = 0,8$. Задача была решена при $\delta = 10^{-4}$. При решении задачи итерационными методами (4) и [2] на каждом шаге итерации вычислялись: $\|Ax^{(n)} - \tilde{y}\|_m =$

$$\left\{ \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h x_j^{(n)} - \tilde{y}_i \right]^2 h \right\}^{1/2} - \text{дискретная норма невязки}, \quad \|x^{(n)}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m [x_i^{(n)}]^2 h \right\}^{1/2} -$$

норма приближенного решения и дискретная норма разности между точным и прибли-

$$\text{женным решениями: } \|x - x^{(n)}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m [x(t_i) - x_i^{(n)}]^2 h \right\}^{1/2}.$$

Таблица – Результаты счета итераций разными методами

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближенные решения	
			Метод [2] $\delta = 10^{-4}$	Метод (4) $\delta = 10^{-4}$
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,03125	0,00260	0,03027	0,02652	0,02700
0,06250	0,00517	0,05859	0,05399	0,05437
0,09375	0,00768	0,08496	0,07869	0,07999
0,12500	0,01011	0,10938	0,10152	0,10421
0,15625	0,01243	0,13184	0,12330	0,12737
0,18750	0,01463	0,15234	0,14487	0,14982
0,21875	0,01668	0,17090	0,16698	0,17186
0,25000	0,01855	0,18750	0,18575	0,19128
0,28125	0,02025	0,20215	0,20184	0,20836

0,31250	0,02175	0,21484	0,21586	0,22335
0,34375	0,02304	0,22559	0,22364	0,23392
0,37500	0,02411	0,23438	0,23490	0,24530
0,40625	0,02495	0,24121	0,24067	0,25258
0,43750	0,02555	0,24609	0,25057	0,26093
0,46875	0,02592	0,24902	0,25886	0,26289
0,50000	0,02604	0,25000	0,26012	0,26354
$\ Ax^{(n)} - \tilde{y}\ _m$			0,00013	0,00009
$\ x^{(n)}\ _m$			0,18116	0,18276
$\ x - x^{(n)}\ _m$			0,00454	0,00542
Количество итераций			26	24

В обоих случаях для решения задачи сведений об истокорпредставимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке (12), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1,5\delta$. Итак, при $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-4}$ для достижения оптимальной точности при счете методом итераций (4) потребовалось 24 итераций, при счете методом Ландвебера [2] – 26 итераций. Результаты счета приведены в таблице.

Графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (4) при $\delta = 10^{-4}$, приведены на рисунке.

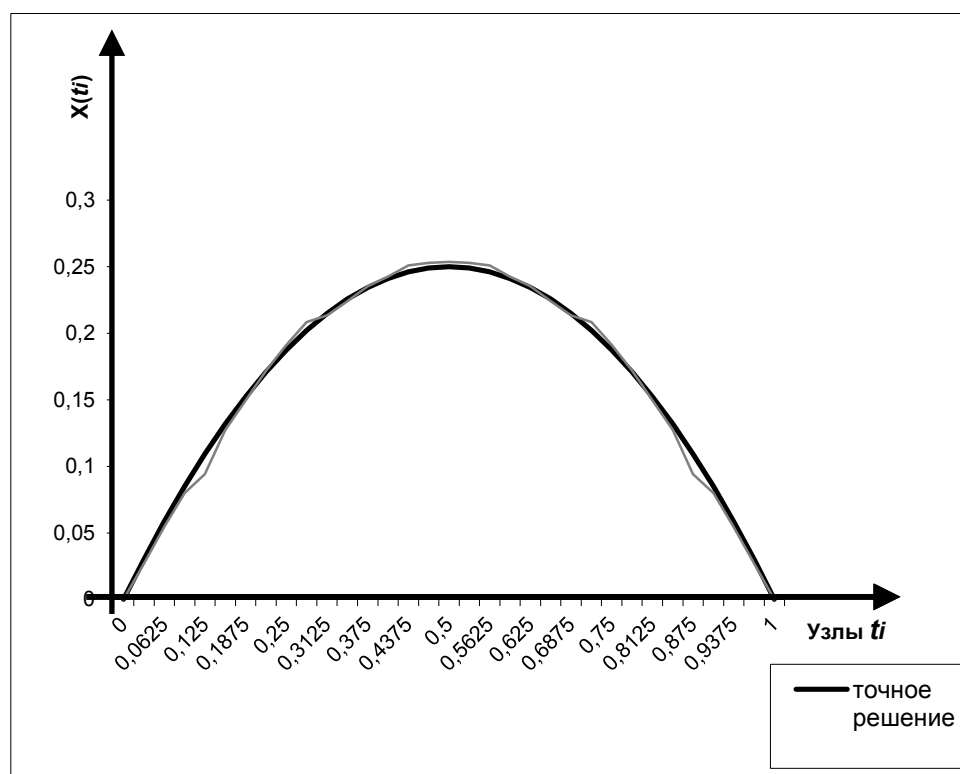


Рисунок – Графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (4) при $\delta = 10^{-4}$

Листинг фрагмента кода программы

```

import java.awt.geom.RectangularShape;
import java.io.BufferedReader;
import java.io.File;
import java.io.FileNotFoundException;
import java.io.FileWriter;
import java.io.IOException;
import java.io.PrintWriter;
import java.util.Scanner

static void metod{//Метод итерации явного типа трехслойный
    int it=0;
    for(int i = 0; i < m; i++){
        x[i][0] = 0;
        x[i][1] = 0;
    }
    while(true){
        it++;
        for(int i = 0; i < m; i++){
            double c1 = 0, c2 = 0, c3 = 0;
            for(int j = 0; j < m; j++){
                c1 += A(t[i],s[j]) * h * (x[j][1]-x[j][0]);
                c2 += A(t[i], s[j]) * h * y[j];
                double temp = 0;
                for(int k = 0; k < m; k++){
                    temp += A(t[j], s[k]) * h * x[k][0];
                }
                c3 += A(t[i], s[j]) * h * temp;
            }
            x[i][2] = 2*x[i][1] - x[i][0] - 2 * alpha * c1 + alpha * alpha * c2 - alpha * alpha * c3;
            c3 = 0;
            for(int j = 0; j < m; j++){
                c3 += A(t[i],s[j]) * h * x[j][2];
            }
            nev1+=norma(c3,y[i]);          // Норма невязки
            prib1+=norma(x[i][2],0.0);      // Норма приближенного решения
            disc1+=norma(X(t[i]),x[i][2]); //Погрешность
        }
        for(int i = 0; i < m; i++){
            x[i][0] = x[i][1];
            x[i][1] = x[i][2].

```

Заклучение

В настоящей статье изучены некоторые свойства предложенной явной схемы итераций решения некорректных задач:

1) доказана сходимость приближений с априорным и апостериорным выбором параметра регуляризации (останов по невязке) в исходной норме гильбертова пространства в случае ограниченного самосопряженного оператора, получены оценки погрешностей и оценки для моментов останова;

2) исследована сходимость метода в полунорме гильбертова пространства;

3) решена численная некорректная модельная задача.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.
2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // *Am. J. Math.* – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
3. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
4. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
5. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2008. – 196 с.
6. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.
7. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // *J. Comp. Appl. Math.* – 2014. – Nr 2 (116). – P. 89–95.
8. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.
9. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // *Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter)*. – 2015. – Vol. 15, nr 3. – P. 373–389.
10. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // *J. Comp. Appl. Math.* – 2015. – Nr 2 (119). – P. 33–41.
11. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // *J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier)*. – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.
12. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // *J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier)*. – 2022. – Nr 416. – P. 1–12.

REFERENCES

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.
2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // *Am. J. Math.* – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
3. Vajnikko, G. M. Iteracionnyje procedury v niekorriektnykh zadachakh / G. M. Vajnikko, A. Ju. Vierietiennikov. – M. : Nauka, 1986. – 178 s.
4. Samarskij, A. A. Chisliennyye mietody reshenija obratnykh zadach matiematichieskoj fiziki / A. A. Samarskij, P. N. Vabishchievich. – M. : Editorial URSS, 2004. – 480 s.
5. Savchuk, V. F. Riegiularizacija opieratornykh uravnienij v gilbiertovom prostranstvie / V. F. Savchuk, O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2008. – 196 s.
6. Matysik, O. V. Javnyje i niejavnyje iteracionnyje procedury reshenija niekorriektno postavliennykh zadach / O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2014. – 213 s.

7. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2014. – Nr 2 (116). – P. 89–95.
8. Matysik, O. V. Iteracionnaja riieularizacija niekorriektnykh zadach / O. V. Matysik. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 s.
9. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr 3. – P. 373–389.
10. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – Nr 2 (119). – P. 33–41.
11. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.
12. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr 416. – P. 1–12.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.04.2025

УДК 512.542

DOI 10.63874/2218-0303-2025-1-73-84

Полина Александровна Павлушко¹, Александр Александрович Трофимук²¹студент 4-го курса физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²д-р физ.-мат. наук, доц., зав. каф. фундаментальной математики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Polina Pavlushko¹, Alexander Trofimuk²¹4-th Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

Head of the Department of Fundamental Mathematics of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: ¹polinapavlushko@gmail.com; ²alexander.trofimuk@gmail.com**КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАНЫМИ СИСТЕМАМИ tcc_n -ПОДГРУПП***

Подгруппы A и B группы G называются cc -перестановочными в G , если A перестановочна с B^g для некоторого элемента $g \in \langle A, B \rangle$. Подгруппа A группы G называется tcc_n -подгруппой в G , если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и каждая нормальная подгруппа из A cc -перестановочна с каждой подгруппой из T . В работе доказана сверхразрешимость группы G , факторизуемой сверхразрешимыми tcc_n -подгруппой A и B . Кроме того, установлена сверхразрешимость группы, у которой максимальные, силовские, максимальные из силовских, минимальные, 2-максимальные подгруппы являются tcc_n -подгруппами.

Ключевые слова: tcc_n -подгруппа, максимальная подгруппа, силовская подгруппа, минимальная подгруппа, факторизуемая группа, сверхразрешимая группа.

Finite Groups with Given Systems of tcc_n -Subgroups

The subgroups A and B are said to be cc -permutable, if A permutes with B^g for some $g \in \langle A, B \rangle$. A subgroup A of a finite group G is called tcc_n -subgroup of G , if there exists a subgroup T of G such that $G = AT$ and every normal subgroup of A is cc -permutable with all subgroups of T . In this paper we proved the supersolubility of the group G factorized by supersoluble tcc_n -subgroups A and B . In addition, we obtained the supersolubility of a group whose maximal, Sylow, maximal of Sylow, minimal, 2-maximal subgroups are tcc_n -subgroups.

Key words: tcc_n -subgroup, maximal subgroup, Sylow subgroup, minimal subgroup, factorizable group, supersoluble group.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует в [1; 2]. Запись $H \leq G$ означает, что H – подгруппа группы G . Если $H \leq G$ и $H \neq G$, то пишем $H < G$. Запись $H \trianglelefteq G$ означает, что H – нормальная подгруппа группы G .

Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Заметим, что равенство $AB = BA$ равносильно тому, что $AB \leq G$. Подгруппы A и B группы G называются *cc -перестановочными в G (условно перестановочными)* [3], если A перестановочна с B^g для некоторого элемента $g \in \langle A, B \rangle$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», номера государственной регистрации 20211467).

В последнее десятилетие активно развивается направление, связанное с изучением строения групп с заданными системами условно перестановочных подгрупп. Очевидно, что если в группе подгруппа перестановочна со всеми подгруппами группы, то она перестановочна и со всеми подгруппами из добавления к ней. Так, в работе [4] введено понятие тсс-подгруппы (подгруппа A группы G называется тсс-подгруппой в группе G , если в G существует подгруппа Y такая, что $G = AY$ и каждая подгруппа из A сс-перестановочна с каждой подгруппой из Y . В [4] также получен целый ряд признаков сверхразрешимости группы с заданными системами тсс-подгрупп.

Сузив множество перестановочных подгрупп из подгруппы и добавления к ней, введем следующее

Определение. Подгруппа A группы G называется тсс _{n} -подгруппой в G , если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$;
- 2) каждая нормальная подгруппа из A сс-перестановочна с каждой подгруппой из T .

Подгруппа T в определении будем называть тсс _{n} -добавлением к A в G . Очевидно, что каждая тсс-подгруппа группы G является тсс _{n} -подгруппой группы G , но обратное не всегда выполняется. Например, в симметрической группе S_4 знакопеременная подгруппа A_4 является тсс _{n} -подгруппой в G , но не является тсс-подгруппой.

Доказана следующая теорема.

Теорема 1.

1. Пусть A и B – тсс _{n} -подгруппы группы G и $G = AB$. Если A и B сверхразрешимы, то G сверхразрешима.
2. Пусть $G = AB$ – произведение подгрупп A и B . Если все силовские подгруппы из A и из B являются тсс _{n} -подгруппами в G , то G сверхразрешима.

Следствие 1.1.

Пусть A и B – тсс _{n} -подгруппы группы G и $G = AB$. Если A и B p -сверхразрешимы, то G p -сверхразрешима.

Из теоремы 1 и следствия 1.1 вытекают результаты работ [3–6], представленных в следствии 1.2.

Следствие 1.2.

1. Пусть $G = AB$ – тотально перестановочное произведение сверхразрешимых подгрупп A и B . Тогда G сверхразрешима [5, теорема 3.1].
2. Пусть $G = AB$ – тсс-перестановочное произведение сверхразрешимых подгрупп A и B . Тогда G сверхразрешима [3, теорема А].
3. Пусть $G = AB$ – произведение сверхразрешимых тсс-подгрупп A и B . Тогда G сверхразрешима [4, теорема 4.1].
4. Пусть $G = AB$ – тотально перестановочное произведение p -сверхразрешимых подгрупп A и B . Тогда G p -сверхразрешима [6, лемма *].
5. Пусть $G = AB$ – тсс-перестановочное произведение p -сверхразрешимых подгрупп A и B . Тогда G p -сверхразрешима [5, теорема 4.1].
6. Пусть $G = AB$ – произведение p -сверхразрешимых тсс-подгрупп A и B . Тогда G p -сверхразрешима [4, теорема 4.1].

7. Если все силовские подгруппы из A и из B являются тсс-подгруппами в $G = AB$, то G сверхразрешима [4, теорема 4.2].

Группы, у которых 2-максимальные подгруппы, максимальные подгруппы из силовских подгрупп, минимальные подгруппы удовлетворяют некоторому типу перестановочности, исследовались многими авторами (например, список литературы в [7; 8]).

В теореме 2 изучено строение конечной группы, у которой 2-максимальные подгруппы, максимальные подгруппы из силовских подгрупп или все минимальные подгруппы являются тсс_n-подгруппами.

Теорема 2.

1. Если каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из G является тсс_n-подгруппой в G , то группа G сверхразрешима.

2. Если каждая 2-максимальная подгруппа из G является тсс_n-подгруппой в G , то группа G сверхразрешима.

3. Если каждая максимальная подгруппа из каждой нециклической силовской подгруппы разрешимой группы G является тсс_n-подгруппой в G , то группа G сверхразрешима.

Следствие 2.1.

1. Если каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из G является тсс-подгруппой в G , то группа G сверхразрешима [4, теорема 5.2].

2. Если каждая 2-максимальная подгруппа из G является тсс-подгруппой в G , то группа G сверхразрешима [4, теорема 5.3].

3. Если каждая максимальная подгруппа из каждой нециклической силовской подгруппы разрешимой группы G является тсс-подгруппой в G , то группа G сверхразрешима [4, теорема 5.1].

4. Если каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из G является тсс-перестановочной в G , то группа G сверхразрешима [3, теорема 3.10].

5. Если каждая 2-максимальная подгруппа из G является тсс-перестановочной в G , то группа G сверхразрешима [3, теорема 3.10].

Вспомогательные результаты

Приведем известные результаты, которые неоднократно будут использоваться в доказательствах.

Через G' , $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в G p - и p' -подгруппы соответственно; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G . Элементарная абелева группа порядка p^t и циклическая группа порядка m обозначаются E_{p^t} и Z_m соответственно, а $[A]B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B .

Для доказательства теорем 1 и 2 нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 2.1 ([9, лемма 6]). *Предположим, что разрешимая группа G несверхразрешима, но фактор-группа G/K сверхразрешима для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K . Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N , $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$ для некоторого $p \in \pi(G)$;

(2) $Z(G) = O_p(G) = \Phi(G) = 1$;

(3) G – примитивная группа; $G = [N]M$, где M – максимальная подгруппа в группе G с единичным ядром;

(4) N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n , $n > 1$;

(5) если подгруппа M абелева, то M циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$.

Лемма 2.2 ([10, лемма 3.5]). Если в разрешимой группе G существует подгруппа H простого индекса, то G/H_G сверхразрешима.

Напомним, что подгруппа A называется полунормальной в группе G , если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AX – подгруппа для каждой подгруппы X из B .

Лемма 2.3 ([11, лемма 10]). Если A – полунормальная 2-нильпотентная подгруппа группы G , то подгруппа A^G разрешима.

Лемма 2.4 ([13, теорема]). Пусть G – группа и H – подгруппа в G . Предположим, что для каждого простого p , делящего порядок группы G , существует силовская p -подгруппа G_p группы G такая, что H субнормальна в $\langle H, G_p \rangle$. Тогда H субнормальна в G .

Лемма 2.5 ([14, теорема 2]). Пусть G – группа, $p \in \pi(G)$, $p \neq 3$. Если существует $\{p, r\}$ -холлова подгруппа для каждого $r \in \pi(G)$, то G p -разрешима.

Лемма 2.6

(1) A – tcc_n -подгруппа в H для каждой подгруппы H группы G такой, что $A \leq H$;

(2) AN/N – tcc_n -подгруппа в G/N для каждой $N \trianglelefteq G$;

(3) для каждой $A_i \trianglelefteq A$ и $X \leq Y$ существует $y \in Y$ такой, что $A_i X^y \leq G$. В частности, $A_i M \leq G$ для некоторой максимальной подгруппы M группы Y и $A_i H \leq G$ для некоторой π -холловой подгруппы H разрешимой группы Y и любого $\pi \subseteq \pi(G)$;

(4) $A_i K \leq G$ для каждой субнормальной подгруппы K в Y и для каждой $A_i \trianglelefteq A$;

(5) для каждого $i = 1, \dots, s$ и каждой субнормальной подгруппы K из Y имеем $A_i K^g \leq G$ для любого $g \in G$;

(6) если Y разрешима и A r -замкнута, то силовская r -подгруппа A_r из A субнормальна в G , где r – наибольшее простое число в $\pi(G)$;

(7) если A 2-нильпотентна, то A' субнормальна в G .

Доказательство.

1. Так как Y – tcc_n -добавление к A в G , то $G = AY$. По тождеству Дедекинда

$$H = H \cap AY = A(H \cap Y).$$

Так как $H \cap Y \leq Y$, то для любых $X \trianglelefteq A$ и $Z \leq H \cap Y$ существует элемент $u \in \langle X, Z \rangle$ такой, что $XZ^u \leq G$. Поэтому A – tcc_n -подгруппа в H .

2. Так как $G = AY$, то

$$G/N = (AN/N)(YN/N).$$

Пусть B/N – произвольная нормальная подгруппа из AN/N и X/N – произвольная подгруппа в YN/N . Так как $N \leq B \leq AN$, то по тождеству Дедекинда

$$B = B \cap AN = (B \cap A)N.$$

Аналогично,

$$X = X \cap YN = (X \cap Y)N.$$

Так как $B \cap A \trianglelefteq A$ и $X \cap Y \leq Y$, то

$$(B \cap A)(X \cap Y)^u \leq G$$

для некоторого $u \in \langle B \cap A, X \cap Y \rangle$. Поэтому

$$(B/N)(X/N)^{uN} = (B \cap A)(X \cap Y)^u N/N \leq G/N$$

для

$$uN \in \langle B \cap A, X \cap Y \rangle N/N \subseteq \langle B, X \rangle N/N = \langle B/N, X/N \rangle.$$

Значит, AN/N – тсс_n-подгруппа в G/N .

3. Так как A – тсс_n-подгруппа группы G , то по определению для каждой $A_1 \trianglelefteq A$ и $X \leq Y$ существует $u \in \langle A_1 X \rangle$ такой, что $A_1 X^u \leq G$. Так как

$$u \in G = AY = YA,$$

то $u = ya$ для некоторых $y \in Y$ и $a \in A$. Тогда

$$A_1 X^u = A_1 X^{ya} = A_1 (X^y)^a = A_1^a (X^y)^a = (A_1 X^y)^a \leq G.$$

Поэтому существует подгруппа $A_1 X^y$ в группе G для некоторого $y \in Y$. Очевидно, что если X – π -холлова подгруппа группы Y , то $H = X^y$ – π -холлова подгруппа группы Y . Поэтому $A_1 H \leq G$. Аналогично и в случае, когда X – максимальная подгруппа группы Y . Тогда $M = X^y$ – максимальная подгруппа группы Y и $A_1 M \leq G$.

4. Поскольку K субнормальная подгруппа в Y , то существует цепь подгрупп

$$Y = K_0 \geq K_1 \geq \dots \geq K_{n-1} \geq K_n = K,$$

в которой подгруппа K_{i+1} нормальна в K_i для всех i . Применим индукцию по n . По п. (3) существует $y \in Y$ такой, что

$$A_1 K_1^y = A_1 K_1 \leq G.$$

Поэтому утверждение справедливо для $n=0$ и $n=1$. Значит, $n \geq 2$. Согласно п. (1), A – тсс-подгруппа в AK_1 и K_1 – тсс-добавление к A в AK_1 . Так как длина субнормальной цепи между K и K_1 меньше, чем n , то по индукции в группе AK_1 существует подгруппа $A_1 K$, а следовательно, $A_1 K \leq G$.

5. Так как $g \in G = AY = YA$, то $g = ya$ для некоторых $y \in Y$ и $a \in A$. Тогда

$$A_1 K^g = A_1 K^{ya} = A_1 (K^y)^a = (A_1 K^y)^a.$$

Так как K субнормальна в Y , то K^y субнормальна в Y . Из (4) следует, что $A_1 K^y \leq G$. Поэтому $AK^g \leq G$.

6. Применим индукцию по $|G|$. Из (3) следует, что $AY_1 \leq G$ для некоторой r' -холловой подгруппы Y_1 из Y . Если $AY_1 < G$, то из (1) следует, что A – tss_n -подгруппа в AY_1 и по индукции A_r субнормальна в AY_1 . Кроме того, A_r субнормальна в некоторой силовой r -подгруппе G_r из G . Пусть $Y_r \leq R$, где R – силовая r -подгруппа из G и $R^g = G_r$ для некоторого $g \in G$. По [12, теорема 1], A_r субнормальна в $G = AY = AY_1Y_r = (AY_1)Y_r^g = (AY_1)G_r$.

Далее считаем, что $G = AY_1$. Из (3) следует, что $AQ \leq G$ для некоторой силовой q -подгруппы Q из Y_1 . Если $AQ < G$, то A – tss_n -подгруппа в AQ и по индукции A_r субнормальна в AQ . Следовательно, A_r нормальна в AQ и $Q \leq N_G(A_r)$. Поскольку это верно для любого $q \in \pi(Y_1)$, то A_r нормальна в $G = AY_1$.

Следовательно, $G = AQ$. Согласно (4), Q – минимальное tss_n -добавление к A в G . Из (3) следует, что $AM < G$ для некоторой максимальной подгруппы M из Q . Поскольку A – tss_n -подгруппа в AM , то по индукции A_r субнормальна в AM и, следовательно, A_r нормальна в AM . Поскольку $|G:AM| = q$, то $G/(AM)_G$ изоморфна подгруппе симметрической группы S_q . Следовательно, $G_r \leq (AM)_G \leq AM$ и $A_r = G_r$ субнормальна в G .

7. Применим индукцию по $|G|$. Из (3) следует, что для каждого $p \in \pi(Y)$ существует силовая p -подгруппа Y_p из Y такая, что $AY_p \leq G$. Предположим, что $AY_p < G$ для каждого $p \in \pi(Y)$. Тогда из (1) следует, что A является tss_n -подгруппой в AY_p и по индукции A' субнормальна в AY_p . Ясно, что для каждого $p \in \pi(G)$ существует силовая p -подгруппа R из G такая, что $R \leq AY_p$. Так как $A' \leq \langle A', R \rangle \leq AY_p$, то A' субнормальна в $\langle A', R \rangle$. По лемме 2.4, A' субнормальна в G .

Следовательно, $G = AY_q$ для некоторого $q \in \pi(Y)$. Из (4) следует, что A полунормальна в G . Так как A 2-нильпотентна, то, по лемме, 2.3 A^G разрешима. Следовательно, $G = AY_q = A^G Y_q$ разрешима. Из (4) следует, что Y_q является минимальным tss_n -добавлением к A в G и $AT < G$ для некоторой максимальной подгруппы T группы Y_q . Поскольку A является tss_n -подгруппой в AT , то по индукции A' субнормальна в AT . Поскольку $|G:AT| = q$, то по лемме 2.2 $G/(AT)_G$ сверхразрешима, и, следовательно,

$$(G/(AT)_G)' = G'(AT)_G / (AT)_G$$

нильпотентна. Так как $A' \leq G'$, то

$$A'(AT)_G / (AT)_G \leq G'(AT)_G / (AT)_G$$

и, следовательно, $A'(AT)_G$ субнормальна в G . Ясно, что $A' \leq A'(AT)_G \leq AT$. Так как A' субнормальна в AT , то A' субнормальна в $A'(AT)_G$ и A' субнормальна в G .

Лемма 2.7 *Группа G сверхразрешима, если каждая максимальная (силовая) подгруппа из G является tss_n -подгруппой в G .*

Доказательство.

1. Пусть M – произвольная максимальная подгруппа в G . По лемме 2.6 (3) следует, что $MY_p \leq G$ для некоторой силовой p -подгруппы Y_p группы Y . Так как M – максимальная подгруппа в группе G , то или $MY_p = M$, или $MY_p = G$. Если $MY_p = M$ для всех $p \in \pi(Y)$, то $Y \leq M$ и $G = MY = M$ – противоречие. Поэтому существует $q \in \pi(Y)$ такое, что $MY_q = G$ и Y_q – тсс_n-добавление к подгруппе M в группе G . По лемме 2.6 (4) можно считать, что Y_q – минимальное тсс_n-добавление к подгруппе M в группе G . По лемме 2.6 (3) $MS < G$ и $|G:MS| = q$ для некоторой максимальной подгруппы S подгруппы Y_q . Так как M максимальная подгруппа в G , то $|G:M| = |G:MS| = q$ и G сверхразрешима.

2. Покажем, что G разрешима. Пусть R силовая r -подгруппа группы G . Тогда R – тсс_n-подгруппа в G . Пусть T – тсс_n-добавление к R в G . По лемме 2.6 (3) $RQ \leq G$ для некоторой силовой q -подгруппы Q из T и для каждого $q \in \pi(T) \setminus \{p\}$. Подгруппа RQ $\{r, q\}$ -холлова подгруппа группы G . Тогда G r -разрешима для $r \neq 3$. Пусть t – наименьшее простое число из $\pi(G)$. Если $t > 2$, то G разрешима. Если $t = 2$, то по доказанному выше G t -разрешима и, следовательно, G разрешима.

Теперь покажем, что G сверхразрешима. Предположим, что заключение теоремы ложное, и пусть G – контрпример наименьшего порядка. Пусть N – нормальная неединичная подгруппа группы G и RN/N – силовая r -подгруппа фактор-группы G/N . По лемме 2.6 (2) RN/N – тсс_n-подгруппа фактор-группы G/N . Тогда G/N сверхразрешима по выбору группы G .

Пусть P – силовая p -подгруппа группы G , где p – наибольшее простое число из $\pi(G)$. По лемме 2.6 (6) P субнормальна в G и поэтому P нормальна в G . Следовательно, G имеет единственную нормальную подгруппу N такую, что $N = C_G(N) = O_p(G) = F(G) = P$ и N – элементарная абелева подгруппа порядка $p^n, n > 1$.

Пусть T – тсс_n-добавление к подгруппе P в G . Пусть P_1 – минимальная нормальная подгруппа в P . Ясно, что $|P_1| = p$. По лемме 2.6 (3) следует, что для каждого $r \in \pi(T)$ существует силовая r подгруппа R из T такая, что $P_1R \leq G$. Если $p \neq r$, то $P \cap P_1R = P_1(P \cap R) = P_1$ нормальная подгруппа в P_1R и $R \leq N_G(P_1)$. Так как данное включение выполняется для любого $r \in \pi(T) \setminus \{p\}$, то $T_1 \leq N_G(P_1)$ для некоторой p' -холловой подгруппы T_1 из T . Поэтому P_1 нормальна в $G = PT = PT_pT_1 = PT_1$ – противоречие.

Доказательство теоремы 1

Покажем, что в двух случаях группа G разрешима. По лемме 2.6 (7) A' и B' субнормальны в G . Если A и B абелевы, то, по теореме Ито, G разрешима. Следовательно, будем считать, что либо $A' \neq 1$, либо $B' \neq 1$. Предположим, что $A' \neq 1$. По лемме 2.7 (2) подгруппа A сверхразрешима. Поэтому в каждом из случаев подгруппа A сверхразрешима и $(A')^G$ нильпотентна. Если $(A')^G = G$, то G разрешима. Если $(A')^G < G$, то $G/(A')^G$ сверхразрешима. Следовательно, G разрешима.

1. Предположим, что теорема неверна, и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть N – неединичная нормальная подгруппа группы G . Подгруппы $AN/N \simeq A/A \cap N$ и $BN/N \simeq B/B \cap N$ являются tss_n -подгруппами в G/N по лемме 2.6 (2), $AN/N \simeq A/A \cap N$ и $BN/N \simeq B/B \cap N$ сверхразрешимы. Следовательно, $G/N = (AN/N)(BN/N)$ сверхразрешима по индукции.

Так как по условию A и B являются сверхразрешимыми tss_n -подгруппами разрешимой группы G , по лемме 2.6 (6) A_p и B_p субнормальны в G для наибольшего простого числа $p \in \pi(G)$.

Поскольку $P = A_p B_p$ является силовой p -подгруппой G , то G является p -замкнутой. По лемме 2.1 G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N такую, что $N = C_G(N) = O_p(G) = F(G) = P$ и N является элементарной абелевой подгруппой порядка p^n , $n > 1$.

Без ограничения общности будем считать, что $A_p \neq 1$. Поскольку A p -замкнута, то $|A_1| = p$, где A_1 – минимальная нормальная подгруппа в A . По лемме 2.6 (3) $A_1 Y_1 \leq G$ для некоторой p' -холловой подгруппы Y_1 из Y . Тогда

$$A_1 = P \cap A_1 Y_1 = A_1 (P \cap Y_1)$$

является нормальной в $A_1 Y_1$. Следовательно, $Y_1 \leq N_G(A_1)$. Так как P абелева, то силовая p -подгруппа Y_p из Y централизует A_1 и A_1 нормальна в $G = AY_p Y_1$ – противоречие.

2. Пусть N – неединичная нормальная в G подгруппа. Тогда фактор-группа

$$G/N = (AN/N)(BN/N).$$

Пусть S/N – силовая s -подгруппа в AN/N и T – силовая s -подгруппа в $S \cap A$. Тогда TN/N силовая s -подгруппа в

$$(S \cap A)N/N = S/N.$$

Поэтому $TN/N = S/N$. Так как $T \leq A$, то $T \leq A_s$, где A_s – некоторая s -подгруппа группы A . Тогда $TN/N \leq A_s N/N$ и $A_s N/N$ – силовая s -подгруппа группы AN/N . Поэтому

$$S/N = TN/N = A_s N/N.$$

По условию A_s – tss_n -подгруппа в G . По лемме 2.6 (2) S/N – tss_n -подгруппа в G/N . Аналогично, если K/N – силовая подгруппа из BN/N , то K/N – tss -подгруппа в G/N . Таким образом, условие теоремы наследуют все фактор-группы и по индукции G/N сверхразрешима.

Так как G разрешима, то по лемме 2.6 (6) силовые подгруппы A_p и B_p подгрупп A и B субнормальны в G для наибольшего простого числа p из $\pi(G)$. Тогда силовая p -подгруппа P группы G нормальна в группе G . По индукции G/P сверхразрешима, поэтому группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.

Предположим, что G – контрпример минимального порядка. По лемме 2.1 G – примитивная группа, и для G сохраним обозначения, выписанные в этой лемме. В частности, $N = P$ и $G = [N]M$.

Пусть Q – силовская q -подгруппа из M , $q \in \pi(M)$. Так как $M = G_p$, то $Q = A_q B_q$ для некоторых силовских q -подгрупп A_q и B_q из A и B соответственно.

Пусть U – тсс-добавление к A_q в G . Так как N – p -подгруппа группы G , то $N \leq U$. Пусть N_1 – минимальная нормальная подгруппа в N . По лемме 2.6 (4) $A_q N_1 \leq G$ и $A_q \leq N_G(N_1)$, так как N_1 субнормальна в U и G p -замкнута. Аналогично, $B_q \leq N_G(N_1)$. Следовательно, $Q \leq N_G(N_1)$. Так как данное включение справедливо для любого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, то $M \leq N_G(N_1)$. Поэтому N_1 нормальна в $G = NM$ – противоречие. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2

1. Предположим, что теорема неверна, и пусть G – минимальный контрпример. Пусть K – собственная подгруппа группы G . По лемме 2.6 (1) каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 группы K является тсс _{n} -подгруппой в K . Тогда по индукции K сверхразрешима, и, следовательно, G – минимальная несверхразрешимая группа. По [15] G разрешима, G имеет единственную нормальную силовскую p -подгруппу P и $P = G^u$, $\bar{P} = P / \Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой в $\bar{G} = G / \Phi(P)$ и $|P / \Phi(P)| > p$. Кроме того, P имеет экспоненту p , если $p \neq 2$, и экспоненту не более 4, если $p = 2$.

Предположим, что $p = 2$. Пусть $x \in P$ и $P_1 = \langle x \rangle$. Тогда $|P_1| = 2$ или $|P_1| = 4$. По условию, P_1 является тсс _{n} -подгруппой в G . По лемме 2.6 (3) G имеет 2'-холлову подгруппу S такую, что $P_1 S \leq G$. По [2, IV.2.8] $P_1 \leq N_G(S)$ и, следовательно, $P \leq N_G(S)$ и S нормальна в G – противоречие.

Предположим, что $p > 2$. Пусть $\bar{K} = K / \Phi(P)$ – подгруппа порядка p в $\bar{P}$. Тогда

$$\bar{K} = \langle x\Phi(P) \rangle = \langle x \rangle \Phi(P) / \Phi(P).$$

Так как $x \in P$, то $|\langle x \rangle| = p$ и, следовательно, по лемме 2.6 (2) $\bar{K}$ является тсс _{n} -подгруппой в $\bar{G}$ и $\bar{T} = T / \Phi(P)$ является тсс _{n} -добавлением к $\bar{K}$ в $\bar{G}$. Следовательно, по лемме 2.6 (3) для любого $r \in \pi(\bar{T})$, $r \neq p$ существует силовская r -подгруппа $\bar{R}$ группы $\bar{T}$ такая, что $\bar{K}\bar{R} \leq \bar{G}$. Ясно, что $\bar{R}$ является силовской r -подгруппой в $\bar{G}$. Имеем, что

$$\bar{P} \cap \bar{K}\bar{R} = \bar{K}(\bar{P} \cap \bar{R}) = \bar{K}$$

нормальна в $\bar{K}\bar{R}$ и $\bar{R} \leq N_{\bar{G}}(\bar{K})$. Так как $\bar{P}$ абелева, то $\bar{K}$ нормальна в $\bar{G}$. Следовательно, $\bar{K} = \bar{P}$ – противоречие.

2. Предположим, что утверждение ложно, и пусть G – минимальный контрпример. По лемме 2.6 (1) и по (1.1) каждая максимальная подгруппа M из G сверхразрешима. Следовательно, G – минимальная несверхразрешимая группа. Тогда по [15] G разрешима, $|\pi(G)| \leq 3$ и G имеет единственную нормальную подгруппу

$P = G^U$. Ясно, что $\Phi(G) = 1$. Следовательно, P – минимальная нормальная подгруппа порядка p^n , $n > 1$ и $G = [P]M$ для некоторой максимальной подгруппы M группы G .

Если $|\pi(G)| = 3$, то G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа и $M = T \rtimes R$, где $|T| = t$, $|R| = r$ и $t, r \in \pi(G)$. Подгруппы T и R являются 2-максимальными подгруппами группы G . Тогда по условию $TY_1 = G = RY_2$, где Y_1 и Y_2 являются tss_n -добавлениями в G . Кроме того, $P \leq Y_1$ и $P \leq Y_2$. Пусть P_1 – минимальная нормальная подгруппа группы P . Тогда по лемме 2.6 (4) $TP_1 \leq G$ и $RP_1 \leq G$, и следовательно, $T \leq N_G(P_1)$ и $R \leq N_G(P_1)$, поскольку G p -замкнута. Тогда P_1 нормальна в $G = PM = PTR$ – противоречие.

Итак, $|\pi(G)| = 2$. Тогда M является q -подгруппой. Если $|M| > q$, то M имеет максимальную подгруппу M_1 такую, что $M_1 \neq 1$. Ясно, что $H = P \rtimes M_1$ – максимальная подгруппа в G . Поскольку H сверхразрешима, то H имеет максимальную подгруппу H_1 такую, что $M_1 \leq H_1$ и $|H : H_1| = p$. По условию, H_1 является tss_n -подгруппой в G . Тогда $H_1V = G$, где V – tss_n -добавление к H_1 в G . Пусть K_1 – минимальная нормальная подгруппа в H_1 . Поскольку H_1 сверхразрешима, то $|K_1| = p$.

По лемме 2.6 (3) V имеет силовскую q -подгруппу V_q такую, что $K_1V_q \leq G$. Следовательно, $V_q \leq N_G(K_1)$ и K_1 нормальна в $G = H_1V = H_1PV_q$ – противоречие.

Таким образом, $|M| = q$ и P – максимальная подгруппа в G . Пусть P_1 – максимальная подгруппа в P . Тогда по условию $P_1K = G$, где K – tss_n -добавление к P_1 в G . По лемме 2.6 (3) K имеет силовскую q -подгруппу K_1 такую, что $P_1K_1 \leq G$ и $K_1 \leq N_G(P_1)$. Следовательно, P_1 нормальна в $G = P_1K = PK_1$. Поэтому $|P| = p$ – противоречие.

3. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G . Если P циклическая, то G p -сверхразрешима. Пусть P нециклическая. Тогда по лемме 2.6 (3) для любой максимальной подгруппы P_i группы P и каждого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ существует силовская q -подгруппа Q группы G такая, что $P_iQ \leq G$. По [16, Теорема 3.4] G p -сверхразрешима. Поскольку это верно для любого $p \in \pi(G)$, то G сверхразрешима.

Теорема доказана.

Заключение

В настоящей работе было рассмотрено понятие tss_n -подгруппы, которое наряду с NS-добавляемой подгруппой из [16] является еще одним обобщением понятия tss -подгруппы из [4]. В ходе исследования был получен целый ряд признаков сверхразрешимости группы с заданными системами tss_n -подгрупп, которые естественным образом развивают результаты работы [4]. В перспективе результаты работы могут стать методическим подспорьем для исследования конечных групп с условно перестановочными субнормальными подгруппами из сомножителей и добавлений к ним.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – С. 207.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin : Springer-Verlag, 1967.
3. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Southeast Asian Bull. Math. – 2005. – Vol. 29. – P. 493–510.
4. Trofimuk, A. A. On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups / A. A. Trofimuk // Journal of Algebra and Its Applications. – 2021. – 2150020 (18 p.).
5. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
6. Carocca, A. p -supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Math. J. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.
7. Monakhov, V. S. Finite groups with subnormal non-cyclic subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Journal of Group Theory. – 2014. – Vol. 17, nr 5. – P. 889–895.
8. Guo, W. Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups σ -permutably embedded / W. Guo, A. N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20. – P. 169–183.
9. Монахов, В. С. О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп / В. С. Монахов, И. К. Чирик // Сибирский математический журнал. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 353–364.
10. Monakhov, V. S. On the supersolubility of a group with semisubnormal factors / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // J. Group Theory. – 2020. – Vol. 23, nr 5. – P. 893–911.
11. Княгина, В. Н. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.
12. Wielandt, H. Subnormalität in faktorisierten endlichen Gruppen / H. Wielandt // J. Algebra. – 1981. – Vol. 69. – P. 305–311.
13. Casolo, C. A criterion for subnormality and Wielandt complexes in finite groups / C. Casolo // J. Algebra. – 1994. – Vol. 169. – P. 605–624.
14. Tyutyaynov, V. N. Finite groups with biprimary Hall subgroups / V. N. Tyutyaynov, V. N. Kniahina // J. Algebra. – 2015. – Vol. 443. – P. 430–440.
15. Doerk, K. Minimal nicht auflösbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.
16. Monakhov, V. S. On the supersolubility of a finite group with NS-supplemented subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Acta Math. Hung. – 2020. – Vol. 160, nr 1. – P. 161–167.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedeniye v teoriyu koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk., 2006. – S. 207.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin : Springer-Verlag, 1967.
3. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Southeast Asian Bull. Math. – 2005. – Vol. 29. – P. 493–510.
4. Trofimuk, A. A. On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups / A. A. Trofimuk // Journal of Algebra and Its Applications. – 2021. – 2150020 (18 p.).

5. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
6. Carocca, A. p -supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Math. J. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.
7. Monakhov, V. S. Finite groups with subnormal non-cyclic subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Journal of Group Theory. – 2014. – Vol. 17, nr 5. – P. 889–895.
8. Guo, W. Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups σ -permutably embedded / W. Guo, A. N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20. – P. 169–183.
9. Monakhov, V. S. O svierkhrazrieshimom koradikalie proizvodienija subnormal'nykh svierkhrazrieshimykh podgrupp / V. S. Monakhov, I. K. Chirik // Sibirskij matematicheskij zhurnal. – 2017. – T. 58, № 2. – S. 353–364.
10. Monakhov, V. S. On the supersolubility of a group with semisubnormal factors / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // J. Group Theory. – 2020. – Vol. 23, nr 5. – P. 893–911.
11. Kniagina, V. N. Koniechnyje grupy s polunormal'nymi podgruppami Shmidta / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // Algiebra i logika. – 2007. – T. 46, № 4. – S. 448–458.
12. Wielandt, H. Subnormalität in faktoriisierten endlichen Gruppen / H. Wielandt // J. Algebra. – 1981. – Vol. 69. – P. 305–311.
13. Casolo, C. A criterion for subnormality and Wielandt complexes in finite groups / C. Casolo // J. Algebra. – 1994. – Vol. 169. – P. 605–624.
14. Tyutyaynov, V. N. Finite groups with biprimary Hall subgroups / V. N. Tyutyaynov, V. N. Kniahina // J. Algebra. – 2015. – Vol. 443. – P. 430–440.
15. Doerk, K. Minimal nicht uberauflösbare, endliche gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.
16. Monakhov, V. S. On the supersolubility of a finite group with NS-supplemented subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Acta Math. Hung. – 2020. – Vol. 160, nr 1. – P. 161–167.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.04.2025

УДК 512.542

DOI 10.63874/2218-0303-2025-1-85-89

Александр Андреевич Юдов¹, Анастасия Александровна Давыдчик²¹канд. физ.-мат. наук, доц.²учитель математики средней школы № 8 г. Бреста имени героя Беларуси В. Н. Карвата**Alexander Yudov¹, Anastasiya Davydchik²**¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor²Mathematics Teacher of the Secondary School nr8 in Brest named after Hero of Belarus V. Karvate-mail: ¹yudov.aleks@yandex.ru, ²nastya3425@mail.ru**Φ-ПРОСТРАНСТВА СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ S_4 И ИХ СИММЕТРИИ**

Изучаются конечные группы, находятся φ -пространства группы S_4 , вычисляются группы их симметрий, строится интерпретация φ -пространств в виде плоского графа на кубе или на пирамиде.

Ключевые слова: группа, подгруппа, автоморфизм, симметрия, граф.

 Φ -Spaces of the Symmetric Group S_4 and Their Symmetries

In this work finite groups are studied, φ -spaces of a group S_4 are found, their symmetry groups are calculated, an interpretation of spaces in the form of a flat graph on a cube or on a pyramid is constructed.

Key words: group, subgroup, automorphism, symmetry, graph.

Введение

В данной работе продолжают исследования, начатые в [1; 2], где для конечной группы было введено понятие симметрии и вычислены группы симметрий подгрупп симметрической группы S_4 четвертой степени. Используемая терминология соответствует [3], при этом симметрия группы X относительно элемента g определяется по правилу $X \rightarrow gX^{-1}g$.

В работе расширены вычисления групп симметрий подгрупп группы S_4 , а также продолжено изучение φ -пространств, построенных на основе группы S_4 в соответствии с подходом, предложенным в [1].

Основная часть

1. Рассмотрим $H_1 = \{\varepsilon, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\}$ – подгруппу восьмого порядка группы S_4 [2].

Вычислим группу симметрий подгруппы H_1 . Рассмотрим симметрию единичного элемента S_ε .

$$S_\varepsilon: \varepsilon \rightarrow \varepsilon \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon, (12) \rightarrow \varepsilon \cdot (12)^{-1} \cdot \varepsilon = \varepsilon(12)\varepsilon = (12), \\ (34) \rightarrow \varepsilon(34)\varepsilon = (34), (12)(34) \rightarrow \varepsilon(12)(34)\varepsilon = (12)(34),$$

аналогично

$$(13)(24) \rightarrow (13)(24), (14)(23) \rightarrow (14)(23), (1324) \rightarrow (1423), (1423) \rightarrow (1324).$$

Обозначим элементы группы H_1 в соответствии с порядком следования номерами: 1,2,3,4,5,6,7,8.

Тогда симметрия S_ε запишется в виде постановки

$$S_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

которую запишем в виде цикла $S_\varepsilon = (78)$.

Аналогично, рассматривая остальные симметрии, получим:

$$S_{(12)} = (56), S_{(34)} = (56), S_{(12)(34)} = (78), S_{(13)(24)} = (23), \\ S_{(14)(23)} = (23), S_{(1324)} = (14), S_{(1423)} = (14).$$

Таким образом, база симметрий группы H_1 есть множество

$$B_{H_1}^S = \{(14), (23), (56), (78)\}.$$

Найдем первую симметрическую производную для этой базы [1]:

	(14)	(23)	(56)	(78)
(14)	ε	(14)(23)	(14)(56)	(14)(78)
(23)	(23)(14)	ε	(23)(56)	(23)(78)
(56)	(56)(14)	(56)(23)	ε	(56)(78)
(78)	(78)(14)	(78)(23)	(78)(56)	ε

Таким образом, первая симметрическая производная вместе с базой есть множество

$$S_{H_1}^{/S} = \{\varepsilon, (14), (23), (56), (78), (14)(23), (14)(56), (14)(78), (23)(56), (23)(78), (56)(78)\}.$$

Найдем вторую симметрическую производную.

	ε	(14)	(23)	(56)	(78)
ε	ε	(14)	(23)	(56)	(78)
(14)	(14)	ε	(14)(23)	(14)(56)	(14)(78)
(23)	(23)	(23)(14)	ε	(23)(56)	(23)(78)
(56)	(56)	(56)(14)	(56)(23)	ε	(56)(78)
(78)	(78)	(78)(14)	(78)(23)	(78)(56)	ε
(14)(23)	(14)(23)	(23)	(14)	(14)(23)(56)	(14)(23)(78)
(14)(56)	(14)(56)	(56)	(14)(56)(23)	(14)	(14)(56)(78)
(14)(78)	(14)(78)	(78)	(14)(23)(78)	(14)(56)(78)	(14)
(23)(56)	(23)(56)	(23)(56)(14)	(56)	(23)	(23)(56)(78)
(23)(78)	(23)(78)	(14)(23)(78)	(78)	(23)(56)(78)	(23)
(56)(78)	(56)(78)	(56)(78)(14)	(56)(78)(23)	(78)	(56)

	(14)(23)	(14)(56)	(14)(78)
ε	(14)(23)	(14)(56)	(14)(78)
(14)	(23)	(56)	(78)
(23)	(14)	(23)(14)(56)	(23)(14)(56)
(56)	(56)(14)(23)	(14)	(56)(14)(78)
(78)	(78)(14)(23)	(78)(14)(56)	(14)
(14)(23)	ε	(23)(56)	(23)(78)
(14)(56)	(56)(23)	ε	(56)(78)
(14)(78)	(78)(23)	(78)(56)	ε
(23)(56)	(14)(56)	(23)(14)	(14)(23)(56)(78)
(23)(78)	(78)(14)	(14)(23)(56)(78)	(14)(23)
(56)(78)	(14)(23)(56)(78)	(78)(14)	(14)(56)

	(23)(56)	(23)(78)	(56)(78)
ε	(23)(56)	(23)(78)	(56)(78)
(14)	(14)(23)(56)	(14)(23)(78)	(14)(56)(78)
(23)	(56)	(78)	(23)(56)(78)
(56)	(23)	(56)(23)(78)	(78)
(78)	(78)(23)(56)	(23)	(56)
(14)(23)	(14)(56)	(14)(78)	(14)(23)(56)(78)
(14)(56)	(14)(23)	(14)(23)(56)(78)	(14)(78)
(14)(78)	(14)(23)(56)(78)	(14)(23)	(14)(56)
(23)(56)	ε	(56)(78)	(23)(78)
(23)(78)	(78)(56)	ε	(23)(56)
(56)(78)	(78)(23)	(56)(23)	ε

Таким образом, вторая симметрическая производная представляет собой множество, состоящее из единицы элементов базы и всевозможных совокупностей произведений двух, трех, четырех элементов базы, т. е. множество

$$S_{H_1}^{//S} = \{\varepsilon, (14), (23), (56), (78), (14)(23), (14)(56), (14)(78), (23)(56), (23)(78), (56)(78), (14)(23)(56), (14)(23)(78), (14)(56)(78), (23)(56)(78), (14)(23)(56)(78)\}.$$

Третья симметрическая производная это множество оставляет без изменения. Таким образом, множество $S_{H_1}^{//S}$ образует группу – группу симметрий подгруппы H_1 . Эта группа симметрий представляет собой подгруппу 16-го порядка симметрической группы S_8 , которая содержит 40 320 элементов и при делении на 16 дает 2520.

2. В работе [1] для конечной группы и ее автоморфизма φ вводится определение -пространства.

Доказывается, что если автоморфизм инволютивный, то такое -пространство инвариантно относительно всех своих элементов. Такие -пространства называются симметрическими пространствами.

Доказано в [1], что в группе S_4 существует только 10 симметрических пространств, соответствующих инволютивным автоморфизмам

$$\begin{aligned} A_{(12)}: X &\rightarrow (12)X(12), A_{(13)}: X \rightarrow (13)X(13), A_{(14)}: X \rightarrow (14)X(14), \\ A_{(23)}: X &\rightarrow (23)X(23), A_{(24)}: X \rightarrow (24)X(24), A_{(34)}: X \rightarrow (34)X(34), \\ A_{(12)(34)}: X &\rightarrow (12)(34)X(12)(34), A_{(13)(24)}: X \rightarrow (13)(24)X(13)(24), \\ A_{(14)(23)}: X &\rightarrow (14)(23)X(14)(23), A_\varepsilon: X \rightarrow \varepsilon X \varepsilon. \end{aligned}$$

Эти 10 φ -пространств записываются в виде

$$\begin{aligned} X_{(12)} &= \{\varepsilon, (132), (123), (142), (124), (12)(34)\} \\ X_{(13)} &= \{\varepsilon, (132), (123), (143), (134), (13)(24)\} \\ X_{(14)} &= \{\varepsilon, (143), (142), (134), (124), (14)(23)\} \\ X_{(23)} &= \{\varepsilon, (123), (132), (234), (243), (23)(14)\} \\ X_{(24)} &= \{\varepsilon, (124), (142), (234), (243), (13)(24)\} \\ X_{(34)} &= \{\varepsilon, (134), (143), (234), (243), (12)(34)\} \\ X_{(12)(34)} &= \{\varepsilon, (13)(24), (14)(23)\} \\ X_{(13)(24)} &= \{\varepsilon, (12)(34), (14)(23)\} \\ X_{(14)(23)} &= \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24)\} \\ X_\varepsilon &= \{\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Φ -пространства $X_{(12)}, X_{(13)}, X_{(14)}, X_{(23)}, X_{(24)}, X_{(34)}$ имеют общий элемент ε , причем каждые два из них имеют пару общих элементов, являющихся между собой взаимно обратными в группе S_4 .

Эти -пространства можно изобразить в виде обобщенных графов на кубе, центр которого есть ε , шесть φ -пространств задаются вершинами прямоугольников, лежащих в плоскостях симметрии куба (рисунок 1), а еще одна вершина задается парой точек, являющихся центрами противоположных граней куба, такую вершину будем называть *особой*, а одноточечные вершины – *обычными* или *не особыми*.

При таком задании -пространства, имеющие общую особую вершину, будут иметь две общих точки, а φ -пространства, имеющие разные особые вершины, – три общих точки. При этом получим следующие задания -пространств графами:

$$\begin{aligned} X_{(12)} &= \{\varepsilon, A', A, B', B, P\}, X_{(13)} = \{\varepsilon, A', A, D', D, R\}, X_{(14)} = \{\varepsilon, D', B', D, B, Q\}, \\ X_{(23)} &= \{\varepsilon, A, A', C', C, Q\}, X_{(24)} = \{\varepsilon, B, B', C', C, R\}, X_{(34)} = \{\varepsilon, D', D, C', C, P\}. \end{aligned}$$

Три оставшихся -пространства будут изображаться графами, соответствующими боковыми гранями треугольной пирамиды с вершиной ε (рисунок 2).

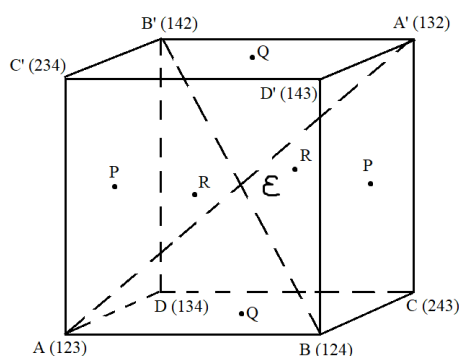


Рисунок 1

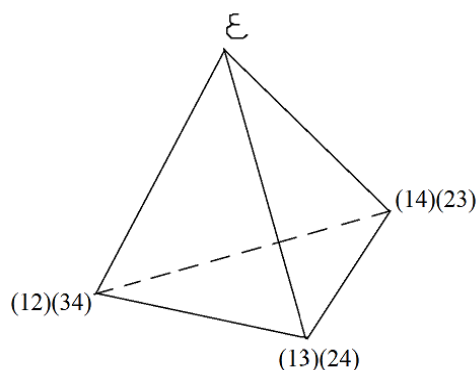


Рисунок 2

Будем находить группы симметрий данных -пространств.

Рассмотрим -пространство $X_{(12)} = \{\varepsilon, (132), (123), (142), (124), (12)(34)\}$. Найдем базу симметрий для этого φ -пространства. В соответствии с работой [1] найдем симметрии этого -пространства относительно всех шести элементов. Получим множество перестановок

$$B_{X_{(12)}}^S = \{(23)(45), (13)(46), (14)(36), (15)(26), (12)(56), (24)(35)\}.$$

Находим первую симметрическую производную множеств этой базы:

	(12)(56)	(13)(46)	(14)(36)	(15)(26)	(23)(45)	(24)(35)
(12)(56)	ε	(132)(456)	(142)(356)	(16)(25)	(123)(465)	(124)(365)
(13)(46)	(123)(465)	ε	(16)(34)	(153)(246)	(132)(456)	(135)(264)
(14)(36)	(124)(365)	(16)(34)	ε	(154)(236)	(145)(263)	(142)(356)
(15)(26)	(16)(25)	(135)(264)	(145)(263)	ε	(154)(236)	(153)(246)
(23)(45)	(132)(456)	(123)(465)	(154)(236)	(145)(263)	ε	(25)(34)
(24)(35)	(142)(356)	(153)(246)	(124)(365)	(135)(264)	(25)(34)	ε

В результате взятия первой симметрической производной в группу симметрий пространства $X_{(12)}$ добавятся следующие элементы:

$$S_{X_{(12)}}^S = \{\varepsilon, (16)(25), (16)(34), (25)(34), (123)(465), (124)(365), (132)(456), (135)(264), (145)(263), (142)(356), (153)(246), (154)(236)\}.$$

Возьмем вторую симметрическую производную. В результате взятия второй симметрической производной в группу симметрий добавятся шесть элементов:

$$S_{X_{(12)}}^{//S} = \{(1562)(34), (1265)(34), (1364)(25), (1463)(25), (2453)(16), (2354)(16)\}.$$

Взятие третьей симметрической производной новых элементов не дает, следовательно, совокупность элементов базы, первой и второй производной образует группу симметрий -пространства $X_{(12)}$, и эта группа симметрий состоит из 24 элементов:

$$S_{X_{(12)}} = \{\varepsilon, (23)(45), (13)(46), (14)(36), (15)(26), (12)(56), (24)(35), (16)(25), (16)(34), (25)(34), (123)(465), (124)(365), (132)(456), (135)(264), (145)(263), (142)(356), (153)(246), (154)(236), (1562)(34), (1265)(34), (1364)(25), (1463)(25), (2453)(16), (2354)(16)\}. \quad (1)$$

По следствию из теоремы 4 [1], симметрия элементов сохраняется при всех автоморфизмах групп, следовательно, изоморфные группы и -пространства будут иметь одинаковые группы симметрий.

Φ -пространство $X_{(13)}$ при помощи автоморфизма $X \rightarrow a^{-1}Xa$, где $a = (23)$ переводится в φ -пространство $X_{(12)}$. Аналогично, φ -пространства $X_{(14)}, X_{(23)}, X_{(24)}, X_{(34)}$ переводятся соответствующими автоморфизмами в φ -пространства $X_{(12)}$, значит, все эти φ -пространства имеют одну и ту же группу симметрий (1).

При помощи автоморфизма $X \rightarrow a^{-1}Xa$, где $a = (23)$, φ -пространство $X_{(12)(34)}$ переходит в φ -пространство $X_{(13)(24)}$, а при помощи автоморфизма с элементом $a = (34)$ φ -пространство $X_{(13)(24)}$ переходит в φ -пространство $X_{(14)(23)}$, поэтому все φ -пространства $X_{(12)(34)}, X_{(13)(24)}, X_{(14)(23)}$ имеют одну и ту же группу симметрии. Вычисляя базу симметрии пространства $X_{(12)(34)}$, получим один элемент ε . Следовательно, группа симметрии каждого из пространств $X_{(12)(34)}, X_{(13)(24)}, X_{(14)(23)}$ является тривиальной. Тривиальной является и группа симметрий φ -пространства $X_\varepsilon = \{\varepsilon\}$. Получаем следующую теорему.

Теорема. Все шесть φ -пространств $X_{(12)}, X_{(13)}, X_{(14)}, X_{(23)}, X_{(24)}, X_{(34)}$ имеют одинаковую группу симметрий – группу

$$S_{X_{(12)}} = \{\varepsilon, (23)(45), (13)(46), (14)(36), (15)(26), (12)(56), (24)(35), (16)(25), (16)(34), (25)(34), (123)(465), (124)(365), (132)(456), (135)(264), (145)(263), (142)(356), (153)(246), (154)(236), (1562)(34), (1265)(34), (1364)(25), (1463)(25), (2453)(16), (2354)(16)\}.$$

Группа симметрий каждого из φ -пространств $X_{(12)(34)}, X_{(13)(24)}, X_{(14)(23)}, X_\varepsilon$ является тривиальной.

Заключение

Рассмотренные в работе φ -пространства симметрической группы S_4 и их симметрии позволяют получить новые характеристики для конечных групп, что, в свою очередь, позволяет провести классификацию подгрупп по свойствам групп симметрии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Юдов, А. А. Симметрия в конечной группе и ее свойства / А. А. Юдов, Е. В. Кисилук, А. М. Кузьмич // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2023. – №1. – С. 93–104.

2. Юдов, А. А. Группы симметрии подгрупп группы S_4 / А. А. Юдов, Е. В. Арабчик, Д. С. Арабчик, Е. В. Кисилук // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2024. – № 1. – С. 119–122.

3. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.

REFERENCES

1. Judov, A. A. Symmetrija v koniechnoj gruppie i jejo svojstva / A. A. Judov, Je. V. Kisiliuk, A. M. Kuz'mich // Viesnik Bresckaha univiersit'ta. Sieryja 4, Fizika. Matematika. – 2023. – № 1. – S. 93–104.

2. Judov, A. A. Guppy simmetrii podgrupp gruppy S_4 / A. A. Judov, Je. V. Arabchik, D. S. Arabchik, Je. V. Kisiliuk // Viesnik Bresckaha univiersit'ta. Sieryja 4, Fizika. Matematika. – 2024. – № 1. – S. 119–122.

3. Monachov, V. S. Vviedienije v tieoriju koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk., 2006. – 207 s.

УДК 517.954

DOI 10.63874/2218-0303-2025-1-90-97

**Александр Иванович Басик¹, Денис Александрович Басик²,
Руслан Николаевич Козинец³**

¹канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. фундаментальной математики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

^{2,3}студент 3-го курса физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Aliaxandr Basik¹, Denis Basik², Ruslan Kozinets³

¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University

^{2,3}3-d Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: ¹alex-basik@yandex.ru; ²2018asada@gmail.com; ³ruslankozinets.rk@gmail.com

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТЫРЕХ УРАВНЕНИЙ БИГАРМОНИЧЕСКОГО ТИПА В $\mathbf{R}^3$ *

Приводится пример эллиптической системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка бигармонического типа в $\mathbf{R}^3$. Для этой системы изучается вопрос регуляризуемости канонической краевой задачи Римана – Гильберта в произвольной ограниченной односвязной области с гладкой границей. Доказывается, что в той точке границы области, в которой внутренняя нормаль параллельна оси Ox_1 , нарушается условие регуляризуемости рассматриваемой краевой задачи. Также показывается, что нарушение условия Я. Б. Лопатинского вызвано тем, что соответствующая предельная задача не является однозначно разрешимой в пространстве устойчивых решений.

Ключевые слова: эллиптическая система, краевая задача Римана – Гильберта, условие Лопатинского.

About Riemann – Hilbert Boundary Value Problem for One System of four Equations of Biharmonic Type in $\mathbf{R}^3$

The paper gives an example of elliptic system of four first order biharmonic type differential equations in $\mathbf{R}^3$. We study the regularizability of the canonical Riemann – Hilbert boundary value problem for this system in an arbitrary bounded simply connected domain with smooth boundary. It is proved that the regularizability condition of the boundary value problem under consideration is not satisfied at the point of the boundary of the domain in which the internal normal is parallel to the Ox_1 axis. It is also shown that the violation of the Lopatinski condition is because the corresponding limit problem is not uniquely solvable in the space of stable solutions.

Key words: elliptic system, Riemann – Hilbert boundary value problem, Lopatinski condition.

Введение

Рассмотрим в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ эллиптическую систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \quad (1)$$

где $U = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x))^T$ – искомая четырехкомпонентная вектор-функция; $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$; T означает транспонирование; A_1, A_2, A_3 – постоянные квадратные действительные матрицы четвертого порядка.

*Работа подготовлена в рамках выполнения НИР «Краевая задача Римана – Гильберта для одной эллиптической системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка в трехмерном пространстве» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (номер государственной регистрации 20240574 от 17.04.2024).

Известным представителем систем вида (1) является система Моисила – Теодореску, которая является α -налогом системы Коши – Римана в трехмерном пространстве и связана со статическими пространственными уравнениями Ламе [1; 2].

А. Т. Уссом [3] был введен класс многомерных аналогов системы Коши – Римана. Применительно к рассматриваемому случаю система (1) называется трехмерным аналогом системы Коши – Римана (ТКР-системой), если каждая компонента произвольного непрерывно дифференцируемого ее решения удовлетворяет уравнению Лапласа в $\mathbf{R}^3$. Необходимым и достаточным условием принадлежности системы (1) ТКР-типу является невырожденность матриц A_j ($j = 1, 2, 3$) и выполнение матричных равенств

$$A_k^{-1}A_j + A_j^{-1}A_k = 0, \quad (k, j = 1, 2, 3, k \neq j). \quad (2)$$

Отметим также, что при исследовании характера разрешимости краевой задачи Гильберта в работах [4, 5] изучались свойства решений нормальных эллиптических систем в $\mathbf{R}^n$. Гомотопическая классификация эллиптических псевдосимметрических систем в $\mathbf{R}^3$ проведена в [6]. Ранее также рассматривались эллиптические системы кососимметрического [7] и ортогонального [8] типов в $\mathbf{R}^3$.

Определение 1. Если каждая компонента $u_k(x)$ ($k = \overline{1,4}$) произвольного непрерывно дифференцируемого решения U системы (1) удовлетворяет бигармоническому уравнению $\Delta^2 u = 0$, то система (1) называется системой бигармонического типа в $\mathbf{R}^3$ ($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – оператор Лапласа в $\mathbf{R}^3$).

Очевидно, что каждая гармоническая функция является бигармонической. Поэтому закономерен вопрос существования систем (1) бигармонического типа в $\mathbf{R}^3$, не принадлежащих классу ТКР. В настоящей статье дается положительный ответ на этот вопрос.

Пример системы (1) бигармонического типа в $\mathbf{R}^3$

Рассмотрим систему (1) со следующими матричными коэффициентами: $A_1 = E$ – единичная матрица четвертого порядка:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Характеристическая матрица системы (1) с коэффициентами (3) имеет вид

$$A(\xi) = A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3 = \begin{pmatrix} \xi_1 & -\xi_2 & 2\xi_2 - \xi_3 & 0 \\ \xi_2 - \xi_3 & \xi_1 & 0 & -\xi_2 - \xi_3 \\ \xi_3 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & \xi_3 & -\xi_2 - 2\xi_3 & \xi_1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\det A(\xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^2,$$

и, следовательно, при каждом ненулевом векторе $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^3$ характеристическая матрица $A(\xi)$ системы (1) с коэффициентами (3) является невырожденной. Последнее означает, что рассматриваемая система является эллиптической.

Поскольку

$$A_3^{-1}A_1 + A_1^{-1}A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

то рассматриваемая система не является ТКР-системой.

Теорема 2. Система (1) с коэффициентами (3) является системой бигармонического типа в $\mathbf{R}^3$.

Доказательство.

Поскольку система (1) с постоянными коэффициентами является эллиптической, то каждое непрерывно дифференцируемое решение этой системы является бесконечно дифференцируемым [9, с. 141]. Пусть вектор-функция $U \in C^1(\Omega)$ является в некоторой области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ решением системы (1). Применяя к обеим частям тождества

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} \equiv 0$$

дифференциальный оператор

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3},$$

получим

$$\begin{cases} \Delta u_1 + 3(u_3)_{x_1 x_2} \equiv 0, \\ \Delta u_2 - 3(u_1)_{x_1 x_3} - 3(u_4)_{x_1 x_2} \equiv 0, \\ \Delta u_3 \equiv 0, \\ \Delta u_4 - 3(u_3)_{x_1 x_3} \equiv 0 \end{cases} \quad (x \in \Omega). \quad (4)$$

Тогда:

а) из третьего равенства формулы (4) получим, что

$$\Delta^2 u_3 = \Delta(\Delta u_3) = 0;$$

б) из первого равенства (4) с учетом третьего получим, что

$$\Delta^2 u_1 = -3(\Delta u_3)_{x_1 x_2} = 0;$$

с) из четвертого равенства (4) с учетом третьего получим, что

$$\Delta^2 u_4 = 3(\Delta u_3)_{x_1 x_3} = 0;$$

д) из второго равенства (4) с учетом первого и четвертого равенств, а также теоремы о независимости смешанной производной гладкой функции от порядка дифференцирования получим, что

$$\Delta^2 u_2 = 3(\Delta u_1)_{x_1 x_3} + 3(\Delta u_4)_{x_1 x_2} = -9(u_3)_{x_1 x_3 x_1 x_2} + 9(u_3)_{x_1 x_3 x_1 x_2} = 0.$$

Таким образом, каждая компонента вектор-функции U является бигармонической функцией в области Ω . Согласно определению 1, рассматриваемая система является системой бигармонического типа в $\mathbf{R}^3$. Теорема доказана.

Пример системы бигармонического типа в $\mathbf{R}^4$ приведен в [10].

Задача Римана – Гильберта

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ – ограниченная, гомеоморфная шару область, границей $\partial\Omega$ которой является гладкая поверхность Ляпунова. Задача Римана – Гильберта для системы (1) состоит в нахождении ее решения класса $C^{1,\alpha}(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ ($\alpha \in (0;1]$), удовлетворяющего граничным условиям:

$$\begin{aligned} (u_1 m_1 + u_2 m_2 + u_3 m_3 + u_4 m_4)|_{\partial\Omega} &= f_1(y), \\ (u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3 + u_4 n_4)|_{\partial\Omega} &= f_2(y) \end{aligned} \quad (y \in \partial\Omega).$$

Здесь $f_1, f_2, m_k, n_k : \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру с показателем α функции ($k=1,4$).

В теории аналитических функций задача Римана – Гильберта состоит в нахождении в ограниченной односвязной области голоморфной функции по известной на границе этой области линейной комбинации ее действительной и мнимой части.

Эта задача известна также как задача Гильберта и достаточно подробно изучена (см. [11, с. 217] и имеющуюся там библиографию).

В многомерном случае первые результаты в исследовании задачи Римана – Гильберта были получены В. И. Шевченко для системы Моисила – Теодореску [12]. Им было выведено условие, обеспечивающее регуляризуемость (краевая задача называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я. Б. Лопатинского [13]) краевой задачи в произвольной односвязной области, проведена гомотопическая классификация регуляризуемых задач и вычислен индекс регуляризуемой задачи. В частности, задача Римана – Гильберта для системы Моисила – Теодореску с граничным условием

$$u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \quad (u_2 v_1 + u_3 v_2 + u_4 v_3)|_{\partial\Omega} = f_2(y). \quad (5)$$

является регуляризуемой, где $v : \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ – единичное поле внутренних нормалей на поверхности $\partial\Omega$.

Для эллиптических систем ортогонального типа, рассмотренных в [8], задача с граничными условиями вида (5) также является регуляризуемой. Действительно, векторные поля L и P ([8, формула (4)]) в этом случае задаются равенствами

$$L(y) = v(y), \quad P(y) = v(y) + [v(y); a] + a \cdot \langle v(y); a \rangle,$$

и, следовательно, в каждой точке $y \in \partial\Omega$ имеем

$$\langle v(y); P(y) \rangle = 1 + \langle v(y); a \rangle^2 > 0.$$

Согласно теореме 1 [8], задача Римана – Гильберта для систем, рассмотренных в статье [8], и граничным условием (5), является регуляризуемой. В связи с вышесказанным будем называть граничные условия вида (5) каноническими.

Теорема 3. *Задача Римана – Гильберта для системы (1) с коэффициентами (3) и граничными условиями (5) не является регуляризуемой.*

Доказательство.

Напомним, что регуляризуемость краевой задачи для эллиптической системы (1) и граничных условий (5) означает, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом ненулевом

векторе τ касательном к границе $\partial\Omega$ в точке y ранг матрицы Я. Б. Лопатинского краевой задачи (1), (5)

$$L(y, \tau) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1(y) & \nu_2(y) & \nu_3(y) \end{pmatrix} \cdot \int_{\gamma} A^{-1}(\lambda \nu(y) + \tau(y)) d\lambda \quad (6)$$

является максимальным [13]. В формуле (6) через $\nu = \nu(y) = (\nu_1(y), \nu_2(y), \nu_3(y))$ обозначен единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке y , $A(\xi)$ – характеристическая матрица системы (1), и интегрирование ведется по простому замкнутому контуру γ , лежащему в верхней комплексной λ -полуплоскости и охватывающему находящийся там λ -корень уравнения

$$\det A(\lambda \nu(y) + \tau(y)) = 0.$$

Вычислим матрицу Лопатинского задачи (1), (2) в той точке $\tilde{y}$ границы $\partial\Omega$, в которой внутренняя нормаль есть вектор $\nu(\tilde{y}) = (1, 0, 0)$. Пусть τ – любой ненулевой касательный к $\partial\Omega$ в точке $\tilde{y}$ вектор (т. е. $\tau \in T_{\tilde{y}}\partial\Omega \setminus \{0\}$) и контур γ охватывает точку $i|\tau|$. Применяя основную теорему о вычетах, получим

$$L(\tilde{y}, \tau) = \frac{\pi i}{2|\tau|^3} \begin{pmatrix} 2|\tau|^3 - i\tau_1(2|\tau|^2 + 3\tau_2\tau_3) & -2i|\tau|^2\tau_2 \\ i((\tau_2 - \tau_3)(|\tau|^2 + \tau_1^2) + (\tau_2 + 2\tau_3)(\tau_2^2 + \tau_3^2)) & 2|\tau|^3 - 2i|\tau|^2\tau_1 \\ i((2\tau_2 - \tau_3)(|\tau|^2 + \tau_1^2) - (\tau_2 + \tau_3)(\tau_2^2 + \tau_3^2)) & -3i\tau_1\tau_2^2 \\ -3i\tau_1(\tau_2^2 + \tau_3^2) & -i((\tau_2 + \tau_3)(|\tau|^2 + \tau_1^2) - (2\tau_2 - \tau_3)(\tau_2^2 + \tau_3^2)) \end{pmatrix},$$

где $|\tau|^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2$.

Заметим, что вектор $\tilde{\tau} = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \in T_{\tilde{y}}\partial\Omega \setminus \{0\}$,

$$L(\tilde{y}, \tilde{\tau}) = 2\pi i \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\ \frac{i\sqrt{5}}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, все миноры второго порядка матрицы $L(\tilde{y}, \tilde{\tau})$ равны нулю.

Таким образом, ранг матрицы Я. Б. Лопатинского (6) рассматриваемой краевой задачи (1), (3), (5) не является максимальным в точке $\tilde{y}$ на векторе $\tilde{\tau}$, что и доказывает ее нерегуляризуемость.

Предельная задача задачи (1), (3), (5) в точке $\tilde{y}$

Не ограничивая общности, будем считать, что точка $\tilde{y}$, в которой нарушается условие регуляризуемости задачи (1), (2), совпадает с началом координат.

На луче $\mathbf{R}_+ = \{t \in \mathbf{R} | t > 0\}$ рассмотрим задачу нахождения четырехкомпонентной вектор-функции $V = (v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t))$, удовлетворяющей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dV}{dt} = -i \left(\xi_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right) V \quad (t > 0), \quad (7)$$

и условиям

$$v_1|_{t=0} = h_1, \quad v_2|_{t=0} = h_2. \quad (8)$$

Условие Шапиро – Лопатинского для задачи (1), (3), (5) в точке $\tilde{y}$ состоит в том, что при любых h_1, h_2 и $(\xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ задача (7), (8) однозначно разрешима в пространстве устойчивых решений системы (7) (т. е. при $t \rightarrow +\infty$ стремящихся к нулю). Эквивалентная формулировка условия однозначной разрешимости заключается в том, что при $h_1 = h_2 = 0$ единственным решением (7), (8) является тождественный нуль [13].

Отметим, что задача (7), (8) получается из задачи (1), (3), (5) замораживанием коэффициентов в точке $\tilde{y}$ и формальным преобразованием Фурье по касательным переменным x_2 и x_3 [13; 14].

Построим общее устойчивое решение (7) при $\xi_2 = 2/\sqrt{5}$, $\xi_3 = 1/\sqrt{5}$. Отметим, что в рассматриваемом случае (7) является линейной однородной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с матрицей

$$B = \frac{-i}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что матрица B имеет два двукратных собственных значения $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1$.

Устойчивые решения (7) строим по собственному значению $\lambda_1 = -1$. Из линейной однородной алгебраической системы уравнений $(B + E)h = 0$ находим собственный вектор, соответствующий λ_1 :

$$h_1 = (-2, -i\sqrt{5}, 0, 1)^T.$$

Из системы $(B + E)h = h_1$ находим присоединенный вектор h_2 к вектору h_1 :

$$h_2 = \left(0, 0, -\frac{2i\sqrt{5}}{3}, -\frac{5}{3} \right)^T.$$

Следовательно, искомое общее устойчивое решение системы (7) имеет вид

$$V(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ -i\sqrt{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \left(t \begin{pmatrix} -2 \\ -i\sqrt{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2i\sqrt{5}/3 \\ -5/3 \end{pmatrix} \right), \quad (9)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Из формулы (9) следует, что при $C_1 = 0$ и произвольной постоянной C_2 вектор-функция $V(t)$ является устойчивым решением однородной задачи (7), (8).

Следовательно, задача (7), (8) не является однозначно разрешимой при всех $(\xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, что еще раз доказывает нерегуляризуемость задачи (1), (3), (5).

Заключение

Из теоремы 3 следует, что оператор, отвечающий краевой задаче Римана – Гильберта для системы (1) с коэффициентами (3) и граничными условиями (5) и действующий в определенных банаховых пространствах [13], не является нётеровым. Это означает, что указанный оператор имеет бесконечномерное ядро или коядро.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Moisil, G. G. Fonctions holomorphes dans l'espace / G. G. Moisil, N. Theodorescu // *Mathematica*. – 1931. – Vol. 5. – P. 141–153.
2. Бицадзе, А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А. В. Бицадзе. – М. : Наука, 1966. – 202 с.
3. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация трех- и четырехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // *Дифференциальные уравнения*. – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 1118–1125.
4. Шевченко, В. И. О задаче Гильберта для голоморфного вектора в многомерном пространстве / В. И. Шевченко // *Дифференциальные и интегральные уравнения. Краевые задачи*. – Тбилиси, 1979. – С. 279–291.
5. Балабаев, В. Е. Нормальные эллиптические системы первого порядка / В. Е. Балабаев // *Дифференциальные уравнения*. – 1995. – Т. 31, № 1. – С. 71–83.
6. Басик, А. И. Гомотопическая классификация краевых задач Римана – Гильберта для некоторых классов эллиптических систем дифференциальных уравнений в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, А. Т. Усс // *Труды Института математики НАН Беларуси*. – 2004. – Т. 12, № 2. – С. 33–37.
7. Басик, А. И. Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук // *Математика. Інформаційні технології : зб. ст.* – Луцьк, 2019. – № 6. – С. 12–18.
8. Басик, А. И. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. А. Грицук // *Вісці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16.
9. Хермандер, Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер. – М. : Мир, 1965. – 379 с.
10. Басик, А. И. Нерегуляризуемость задачи Дирихле для одной бигармонической системы в $\mathbf{R}^4$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Д. В. Галуц // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2024. – № 4 (61). – С. – 40–44.
11. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1977. – 640 с.
12. Шевченко В. И. Гомотопическая классификация задач Римана – Гильберта для голоморфного вектора // *Математическая физика : респ. межвед. сб.* – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.
13. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // *Успехи математических наук*. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

14. Гельфанд, И. М. Об эллиптических уравнениях / И. М. Гельфанд // Успехи математических наук. – 1960. – Т. 15, вып. 3. – С. 121–132.

REFERENCES

1. Moisil, G. G. Fonctions holomorphes dans l'espace / G. G. Moisil, N. Theodorescu // *Mathematica*. – 1931. – Vol. 5. – P. 141–153.

2. Bicadze, A. V. Krajevyje zadachi dla elliptichieskikh uravnenij vtorogo poriadka / A. V. Bicadze. – M. : Nauka, 1966. – 202 s.

3. Uss, A. T. Gomotopichieskaja klassifikacija triokh- i chetyriokhmiernykh analogov sistemy Koshi – Rimana / A. T. Uss // *Diffierencial'nyje uravnenija*. – 2004. – Т. 40, № 8. – S. 1118–1125.

4. Shevchienko, V. I. O zadachie Gil'berta dla golomorfnoho vektora v mnogomier-nom prostranstvie / V. I. Shevchienko // *Diffierencial'nyje i integral'nyje uravnenija*. Krajevyje zadachi. – Tbilisi, 1979. – S. 279–291.

5. Balabajev, V. Je. Normal'nyje elliptichieskije sistemy piervogo poriadka / V. Je. Balabajev // *Diffierencial'nyje uravnenija*. – 1995. – Т. 31, № 1. – S. 71–83.

6. Basik A. I. Gomotopichieskaja klassifikacija krajevykh zadach Rimana – Gil'berta dla niekatorykh klassov elliptichieskikh system diffierencialnykh uravnenij v $\mathbf{R}^3$ / A. I. Basik, A. T. Uss // *Trudy Instituta matematiki NAN Bielarusi*. – 2004. – Т. 12, № 2. – S. 33–37.

7. Basik, A. I. Gomotopichieskaja klassifikacija riegularizuiemykh krajevykh zadach Rimana – Gil'berta dla odnogo klassa elliptichieskikh sistem v $\mathbf{R}^3$ / A. I. Basik, Je. V. Gricuk // *Matematyka. Informacijni tekhnolohiji* : zb. st. – Luc'k, 2019. – № 6. – S. 12–18.

8. Basik, A. I. Zadacha Rimana – Gil'berta dla elliptichieskikh system ortogonal'-nogo tipa v $\mathbf{R}^3$ / A. I. Basik, Je. V. Gricuk, T. A. Gricuk // *Viesci Nacyjanal'naj akademii navuk Bielarusi. Sieryja fizika-matematychnykh navuk*. – 2020. – Т. 56, № 1. – S. 7–16.

9. Hermander, L. Liniejnyje diffierencial'nyje operatory s chastnymi proizvodnymi / L. Hermander. – M. : Mir, 1965. – 379 s.

10. Basik, A. I. Nieriegularizujemost' zadachi Dirikhlie dla odnoj bigarmonichieskoj sistemy v $\mathbf{R}^4$ / A. I. Basik, Je. V. Gricuk, D. V. Galuc // *Probliemy fiziki, matematiki i tiekh-niki*. – 2024. – № 4 (61). – S. 40–44.

11. Gakhov, F. D. Krajevyje zadachi / F. D. Gakhov. – 3-je izd., pierierab. i dop. – M. : Nauka, 1977. – 640 s.

12. Shevchienko, V. I. Gomotopichieskaja klassifikacija zadach Rimana – Gil'berta dla golomorfnoho vektora / V. I. Shevchienko // *Matematikichieskaja fizika* : riesp. miezhvied. sb. – Kijev, 1975. – Vyp. 17. – S. 184–186.

13. Agranovich, M. S. Elliptichieskije singuliarnyje integro-diffierencial'nyje operatory / M. S. Agranovich // *Uspiekh i matematichieskikh nauk*. – 1965. – Т. 20, vyp. 5. – S. 3–120.

14. Giel'fand, I. M. Ob elliptichieskikh uravnenijakh / I. M. Giel'fand // *Uspiekh i matematichieskikh nauk*. – 1960. – Т. 15, vyp. 3. – S. 121–132.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 30.05.2025

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай, рускай ці англійскай мове ў адным экзэмпляры аб'ёмам да 0,5 друкаванага аркуша (да 20 000 знакаў), у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc, *.docx ці *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармату А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарыны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Усе малюнкi і фотаздымкі павінны быць толькі ў чорна-белым выкананні. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 (у рэдакцыі загада ад 01.10.2024 № 230). Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках ([1–4], [1; 3], [1, с. 32], [2, с. 52–54], [3, л. 5], [4, л. 60б.]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносак.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў (аўтараў не больш за 5) на мове артыкула;
- звесткі пра аўтара/аўтараў (навуковая ступень, званне, пасада, месца працы/вучобы) на мове артыкула;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- звесткі пра аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- e-mail аўтара/аўтараў;
- назва артыкула на мове артыкула;
- анатацыя ў аб'ёме 100–150 слоў і ключавыя словы на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- назва артыкула на англійскай мове;
- анатацыя і ключавыя словы на англійскай мове.

Звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы ўнізе.

Асноўны тэкст структуравецца ў адпаведнасці з патрабаваннямі Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў:

- Уводзіны (пастапоўка мэты і задач даследавання).
- Асноўная частка (матэрыялы і метады даследавання; вынікі і іх абмеркаванне).
- Заклучэнне (фармулююцца асноўныя вынікі даследавання, указваецца іх навізна, магчымасці выкарыстання).
- Спіс выкарыстанай літаратуры; спіс літаратуры павінен уключаць не больш за 20–22 крыніцы і абавязкова ўтрымліваць публікацыі, у тым ліку замежныя, па тэме даследавання за апошнія 10 гадоў.

➤ References – спіс выкарыстанай літаратуры, які прадубліраваны лацінскім алфавітам (колькасць крыніц, прыведзеных у спісе і ў References, павінна супадаць).

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе (вучыцца) аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў);
- вынікі правэркі тэксту на прадмет арыгінальнасці пры дапамозе інструмента «Антыплагіят».

Усе артыкулы абавязкова праходзяць «сляпое» рэцэнзаванне. Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегія не разглядае і не вяртае. Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Рукапіс артыкула і дакументы дасылаць на адрас: 224016, г. Брэст, бульвар Касманаўтаў, 21, рэдакцыя часопіса «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта», электронны варыянт артыкула накіроўваць на e-mail: vesnik@brsu.by.

Карэктары *А. А. Іванюк, Л. М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *А. В. Кізун*

Падпісана ў друку 12.07.2025. Фармат 60×84/8. Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Рызаграфія.

Ум. друк. арк. 11,39. Ул.-выд. арк. 7,64. Тыраж 50 экз. Заказ № 271.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,

распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.