



**ВЕСНИК**  
БРЭСЦКАГА ЎНІВЕРСИТЭТА

*Рэдакцыйная калегія*

*галоўны рэдактар*  
Ю. П. Голубеў

*намеснік галоўнага рэдактара*  
У. А. Плещохоў

*адказны рэдактар*  
А. А. Трафімук

А. Б. Антаневіч (Беларусь)  
А. І. Басік (Беларусь)  
А. Я. Будзько (Беларусь)  
М. А. Громаў (Расія)  
А. М. Ішханян (Арменія)  
М. І. Ляўчук (Беларусь)  
І. П. Мартынаў (Беларусь)  
П. П. Матус (Беларусь)  
А. І. Мелькер (Расія)  
В. С. Манахаў (Беларусь)  
У. А. Плещохоў (Беларусь)  
В. М. Радзькоў (Беларусь)

Пасведчанне аб рэгістрацыі  
ў Міністэрстве інфармацыі  
Рэспублікі Беларусь  
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:  
224016, г. Брэст,  
бульвар Касманаўтаў, 21  
тэл.: +375-(162)-21-72-07  
e-mail: vesnik@brsu.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага  
ўніверсітэта» выдаецца  
са снежня 1997 г.

**Серыя 4**

**ФІЗІКА**

**МАТЭМАТЫКА**

**НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС**

Выходзіць два разы на год

Заснавальнік – установа адукацыі  
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»

**№ 2 / 2025**

У адпаведнасці з Дадаткам да загада  
Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь  
ад 24.02.2025 № 45 (са змяненнямі, унесенымі загадамі  
ад 27.02.2025 № 48, ад 06.05.2025 № 107, ад 28.05.2025 № 118,  
ад 27.06.2025 № 140, ад 30.09.2025 № 189,  
ад 17.10.2025 № 207, ад 04.11.2025 № 228,  
ад 27.11.2025 № 229, ад 20.12.2025 № 271)

часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта.

Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»

ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь  
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў у 2025 г.  
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка. Матэматыка)

◇ ◇ ◇

У адпаведнасці з дагаворам паміж установай адукацыі  
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»  
і ТАА «Навуковая электронная бібліятэка» (ліцэнзійны дагавор  
№ 457-11/2020 ад 03.11.2020) часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта.  
Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»  
размяшчаецца на платформе eLIBRARY.RU  
і ўключаны ў Расійскі індэкс навуковага цытавання (РІНЦ)

# ЗМЕСТ

## ФІЗИКА

|   |    |
|---|----|
| <b>Alina Ivashkevich, Anton Bury, Olga Bianco, Elena Ovsiyuk.</b><br>Pauli Equation in Curvilinear Coordinates of Minkowski Space,<br>Separating the Variables .....  | 5  |
| <b>Антонович Д. А., Сковородко М. А., Шидловская Д. В.</b><br>К вопросу воздействия на обрабатываемые поверхности<br>электронными и ионными пучками .....   | 17 |
| <b>Сендер Н. Н.</b><br>Исследование возможностей эллипсометрического определения<br>параметров гиротропии кристаллов средних сингоний<br>в отраженном свете .....   | 29 |
| <b>Серый А. И.</b><br>К вопросу о пороге нейтронизации<br>в звездах главной последовательности и субкарликах.....   | 46 |
| <b>Ворсин Н. Н., Гладышук А. А., Кушнер Т. Л., Луценко Е. В.</b><br>Моделирование и исследование исходно закрытого AlGaN<br>гетеропереходного полевого транзистора .....  | 59 |
| <b>Римский Г. С., Радюш Ю. В., Макоед И. И., Буневич М. А.</b><br>Влияние облучения гамма-квантами<br>на структуру и динамику кристаллической решетки<br>твердых растворов ферритов $Co_{1-x}Zn_xFe_2O_4$ ( $x = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1$ ) ..... | 69 |

## МАТЭМАТЫКА

|  |     |
|--|-----|
| <b>Будько А. Е.</b><br>Тьюринговые вычисления со стандартной траекторией движения головки.....                           | 75  |
| <b>Грицук Д. В., Павлушко П. А., Трофимук А. А.</b><br>О конечных группах со слабо проперестановочными подгруппами ..... | 82  |
| <b>Зубей Е. В.</b><br>О разрешимости конечной группы<br>с полусубнормальными подгруппами Шмидта.....                     | 93  |
| <b>Кот М. Г.</b><br>Резольвента аппроксимирующей системы уравнений<br>с дельта-образными коэффициентами .....            | 99  |
| <b>Сохор И. Л.</b><br>CP-подгруппы в конечных группах.....   | 108 |

*Editorial Board*

*editor-in-chief*  
Yu. P. Golubeu

*deputy editor-in-chief*  
U. A. Plietsiukhou

*managing editor*  
A. A. Trafimuk

A. B. Antanievich (Belarus)  
A. I. Basik (Belarus)  
A. Ya. Budzko (Belarus)  
M. A. Gromau (Russia)  
A. M. Ishkhanian (Armenia)  
A. U. Dziamidchyk (Belarus)  
M. I. Liauchuk (Belarus)  
I. P. Martynau (Belarus)  
P. P. Matus (Belarus)  
A. I. Melkier (Russia)  
V. S. Manakhau (Belarus)  
U. A. Plietsiukhou (Belarus)  
V. M. Radzkou (Belarus)

Registration Certificate  
by Ministry of Information  
of the Republic of Belarus  
nr 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:  
224016, Brest,  
21, Kosmonavtov Boulevard  
tel.: +375-(162)-21-72-07  
e-mail: vesnik@brsu.by

**Series 4****PHYSICS****MATHEMATICS****SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL**

Issued twice a year

Founder – Educational Establishment  
«Brest State A. S. Pushkin University»

**№ 2 / 2025**

According to the Supplement to the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from February 24, 2025 nr 45 (with the amendments made by the orders of Supreme Certification Commission from February 27, 2025 nr 48, from May 06, 2025 nr 107, from May 28, 2025 nr 118, from June 27, 2025 nr 140, from September 30, 2025 nr 189, from October 17, 2025 nr 207, from November, 4 nr 228, from November 27, 2025 nr 229, from December 20, 2025 nr 271) the journal «Vesnik of Brest University.

Series 4. Physics. Mathematics» has been included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in 2025 in physics and mathematical sciences (Physics. Mathematics)

◇ ◇ ◇

According to the agreement  
between Educational Establishment  
«Brest State A. S. Pushkin University» and Pvt Ltd «Scientific Electronic  
Library» (licence contract № 457-11/2020 from 03.11.2020)  
the journal « Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics»  
is placed on the platform eLIBRARY.RU  
and included in the Russian Science Citation Index (RSCI)

# CONTENTS

## PHYSICS

- Ивашкевич А. В., Бурый А. В., Бенько О. Н., Овсюк Е. М.**  
Уравнение Паули в криволинейных координатах  
пространства Минковского, разделение переменных ..... 5
- Dmitry Antonovich, Marina Skovorodko, Diana Shidlovskaya.**  
To the Question of Impact on Processed Surfaces by Electron and Ion Beams ..... 17
- Nikolai Sender.**  
Investigation of Possibilities of Ellipsometric Determination  
of Gyrotropy Parameters of Crystals of Middle Syngonies in Reflected Light ..... 29
- Alexey Sery.**  
On the Issue of the Neutronization Threshold  
in Main-Sequence Stars and Subdwarfs ..... 46
- Nikolai Vorsin, Anatolii Gladyschuk, Tatsiana Kushner, Evgenii Lutsenko.**  
Modeling and Investigation of the Initially Closed  
AlGa<sub>N</sub> Heterojunction Field-Effect Transistor ..... 59
- Gregory Rymski, Yuriy Radyush, Igor Makoed, Mikhail Bunevich.**  
Influence of Gamma Irradiation  
on the Structure and Dynamics of the Crystal Lattice  
of Solid Solutions of Ferrites  $\text{Co}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$  ( $x = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1$ ) ..... 69

## MATHEMATICS

- Alexander Budzko.**  
Turing Computations with a Standard Head Trajectory ..... 75
- Dmitry Gritsuk, Polina Pavlushko, Alexander Trofimuk.**  
On Finite Groups with Weakly Propermutable Subgroups ..... 82
- Ekaterina Zubei.**  
On the Solvability of a Finite Group with Semisubnormal Schmidt Subgroups ..... 93
- Marina Kot.**  
Resolvency of an Approximating System  
of Equations with Delta-Shaped Coefficients ..... 99
- Irina Sokhor.**  
CP-Subgroups in Finite Groups ..... 108

**Alina Ivashkevich<sup>1</sup>, Anton Bury<sup>2</sup>, Olga Bianco<sup>3</sup>, Elena Ovsyuk<sup>4</sup>**

<sup>1,2</sup>Researcher of B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus

<sup>3</sup>Teacher of Physics and Computer Science of the Secondary School nr 3 in the City of Khoyniki

<sup>4</sup>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

Head of Department of Theoretical Physics and Applied Computer Science

of Mozyr State Pedagogical University Named after I. P. Shamyakin

**Алина Валентиновна Ивашкевич<sup>1</sup>, Антон Васильевич Бурый<sup>2</sup>,**

**Ольга Николаевна Бенько<sup>3</sup>, Елена Михайловна Овсиук<sup>4</sup>**

<sup>1,2</sup>науч. сотрудник Института физики имени Б. И. Степанова

Национальной академии наук Беларуси

<sup>3</sup>учитель физики и информатики Средней школы № 3 г. Хойники

<sup>4</sup>д-р физ.-мат. наук, доц., зав. каф. теоретической физики и прикладной информатики

Мозырского государственного педагогического университета имени И. П. Шамякина

e-mail: <sup>1</sup>[ivashkevich.alina@yandex.by](mailto:ivashkevich.alina@yandex.by); <sup>2</sup>[anton.buryy.97@mail.ru](mailto:anton.buryy.97@mail.ru);

<sup>3</sup>[olka\\_proc@mail.ru](mailto:olka_proc@mail.ru); <sup>4</sup>[e.ovsiyuk@mail.ru](mailto:e.ovsiyuk@mail.ru)

## PAULI EQUATION IN CURVILINEAR COORDINATES OF MINKOWSKI SPACE, SEPARATING THE VARIABLES

*The non-relativistic Pauli approximation for a spin  $\frac{1}{2}$  particle is studied in arbitrary curvilinear orthogonal coordinates. The final goal is to develop a unified approach to separating the variables in equation for a spin  $\frac{1}{2}$  particle in all 12 systems of orthogonal coordinates in the flat space, first in the more simple Pauli approximation. A general structure for the covariant equation is derived. The Pauli equation in arbitrary orthogonal coordinates, it includes the relevant tetrads and Ricci rotation coefficients. Because the possibility to develop a unified approach to separating the variables in ordinary presentation of the covariant Pauli equation is rather problematic, another way for studying the problem is proposed. It is based on transforming the usual 2-component Pauli equation to an equivalent system of first order four differential equations, by introducing two auxiliary components, because it is known that the task of separating the variables in the system of differential equations in partial derivatives may be solved easier for the first order systems. One simple example for illustrating this approach, is given; a spin  $\frac{1}{2}$  particle problem in presence of external magnetic field when using the cylindrical coordinates.*

**Key words:** spin  $\frac{1}{2}$  particle, curvilinear coordinates, tetrad formalism, Ricci rotation coefficients, Pauli approximation, separation of the variables.

## УРАВНЕНИЕ ПАУЛИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО, РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

*Нерелятивистское приближение Паули для частицы со спином  $\frac{1}{2}$  изучается в произвольных криволинейных ортогональных координатах. Конечной целью является разработка единого подхода к разделению переменных в уравнении для частицы со спином  $\frac{1}{2}$  во всех 12 системах ортогональных координат в плоском пространстве, сначала в более простом приближении Паули. Выведена общая структура для ковариантного уравнения Паули в произвольных ортогональных координатах, которая включает в себя соответствующие тетрады и коэффициенты вращения Риччи. Поскольку возможность разработки единого подхода к разделению переменных в обычном представлении ковариантного уравнения Паули довольно проблематична, предложен другой способ изучения проблемы. Он основан на преобразовании обычного 2-компонентного уравнения Паули в эквивалентную систему из четырех дифференциальных уравнений первого порядка путем введения двух вспомогательных компонентов, поскольку известно, что задача разделения переменных в системе дифференциальных уравнений в частных производных может быть решена проще для систем первого порядка. Приведен простой пример, иллюстрирующий этот подход: задача о частице со спином  $\frac{1}{2}$  в присутствии внешнего магнитного поля при использовании цилиндрических координат.*

**Ключевые слова:** частица со спином  $\frac{1}{2}$ , криволинейные координаты, тетрадный формализм, коэффициенты вращения Риччи, приближение Паули, разделение переменных.

### Introduction

The study of all possibilities for separating the variables in quantum mechanical equations is important for applications in theoretical problems.

In particular, for flat Euclidean space there is known 13 system of coordinates allowing for the complete separation of the variables in the Laplace equation, closely related to Schrödinger equation.

This problem becomes more involved when turning to the Dirac equation or Maxwell equation, and other.

However, in [1] it was shown that with the use of squaring procedure for the Dirac equation leading to the scalar Klein – Fock – Gordon equation, one may construct solutions for the Dirac equation as well, using the known solutions for the scalar equation.

Therefore, the possibility to get solutions for Klein – Fock – Gordon equation in all 13 coordinates systems, permits us to expect corresponding solutions for the Dirac equation as well. Similar possibility exists also for Maxwell theory [2; 3].

In the present paper, we will derive an explicit form of Pauli equation in arbitrary orthogonal coordinates of the 3-dimensional Euclidean space, parameterized by the metric

$$dS^2 = c^2 dt^2 - h_1^2(x)(dx^1)^2 - h_2^2(x)(dx^2)^2 - h_3^2(x)(dx^3)^2. \quad (1)$$

We will start with the covariant form of the Dirac equation [4]

$$[i\gamma^c (e_{(c)}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2} \gamma_{[ab]c} j^{[ab]} - \frac{mc}{\hbar})] \Psi = 0, \quad (2)$$

where  $j^{[ab]}$  stand for six Lorentzian generators for bispinor representation of the Lorentz group;  $e_{(c)}^\alpha(x)$  stands for the digonal tetrad, related to the metric (1).

### Pauli approximation in orthogonal coordinates for $E_3$ -space

Let us start with the relativistic Dirac equation in orthogonal coordinates

$$\begin{aligned} & \{i\gamma^0(\partial_0 + A_0) + i\gamma^1(\frac{1}{h_1}(\partial_1 + ieA_1) + G_{11}j^{23} + G_{21}j^{31} + G_{31}j^{12}) + \\ & + i\gamma^2(\frac{1}{h_2}(\partial_2 + ieA_2) + G_{12}j^{23} + G_{22}j^{31} + G_{32}j^{12}) + \\ & + i\gamma^3(\frac{1}{h_3}(\partial_3 + ieA_3) + G_{13}j^{23} + G_{23}j^{31} + G_{33}j^{12}) - M\} \Psi = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

where the shortening notations for the Ricci coefficients are used

$$\begin{aligned} G_{11} = \gamma_{011} &= \frac{\partial_0 h_1}{h_1}, & G_{12} = \gamma_{232} &= -\frac{\partial_3 h_2}{h_2 h_3}, & G_{13} = \gamma_{233} &= +\frac{\partial_2 h_3}{h_2 h_3}, \\ G_{21} = \gamma_{311} &= +\frac{\partial_3 h_1}{h_1 h_3}, & G_{22} = \gamma_{022} &= \frac{\partial_0 h_2}{h_2}, & G_{23} = \gamma_{313} &= -\frac{\partial_1 h_3}{h_1 h_3}, \\ G_{31} = \gamma_{121} &= -\frac{\partial_2 h_1}{h_1 h_2}, & G_{32} = \gamma_{122} &= +\frac{\partial_1 h_2}{h_1 h_2}, & G_{33} = \gamma_{033} &= \frac{\partial_0 h_3}{h_3}; \end{aligned}$$

for static metrics, the formulas simplify due to identities  $G_{11} = G_{22} = G_{33} = 0$ .

It is convenient to apply the shortening notations for derivatives

$$D_1 = \frac{1}{h_1}(\partial_1 + ieA_1) + G_{11}j^{23} + G_{21}j^{31} + G_{31}j^{12},$$

$$D_2 = \frac{1}{h_2}(\partial_2 + ieA_2) + G_{12}j^{23} + G_{22}j^{31} + G_{32}j^{12},$$

$$D_3 = \frac{1}{h_3}(\partial_3 + ieA_3) + G_{13}j^{23} + G_{23}j^{31} + G_{33}j^{12}.$$

We will use the Pauli presentation for Dirac matrices:

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix}, \gamma^1 = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{vmatrix}, \gamma^2 = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{vmatrix}, \gamma^3 = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\sigma_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix};$$

also we need the bispinor generators  $j^{kl} = \frac{1}{4}(\gamma^k \gamma^l - \gamma^l \gamma^k)$ :

$$j^{23} = -\frac{i}{2} \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{vmatrix}, \quad j^{31} = -\frac{i}{2} \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix}, \quad j^{12} = -\frac{i}{2} \begin{vmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}.$$

To perform the non-relativistic approximation, we will apply the general method of projective operators:

$$P_+ = \frac{I + \gamma^0}{2} = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad P_- = \frac{I - \gamma^0}{2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix},$$

$$\Psi = \begin{vmatrix} \varphi_+(x) \\ \varphi_-(x) \end{vmatrix}, \quad \Psi_1 = P_1 \Psi = \begin{vmatrix} \varphi_+(x) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi_2 = P_2 \Psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \varphi_-(x) \end{vmatrix}.$$

The, the starting Dirac equation may be presented in the block form

$$\begin{vmatrix} i(\partial_0 + A_0) & i\hat{D}_k \sigma_k \\ -i\hat{D}_k \sigma_k & -i(\partial_0 + A_0) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_+(x) \\ \varphi_-(x) \end{vmatrix} = M \begin{vmatrix} \varphi_+(x) \\ \varphi_-(x) \end{vmatrix}, \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned} \hat{D}_1 &= \frac{1}{h_1}(\partial_1 + ieA_1) - i\frac{1}{2}G_{11}\sigma_1 - i\frac{1}{2}G_{21}\sigma_2 - i\frac{1}{2}G_{31}\sigma_3 = \hat{d}_1 - i\frac{1}{2}G_{11}\sigma_1 - i\frac{1}{2}G_{21}\sigma_2 - i\frac{1}{2}G_{31}\sigma_3, \\ \hat{D}_2 &= \frac{1}{h_2}(\partial_2 + ieA_2) - \frac{1}{2}G_{12}\sigma_1 - i\frac{1}{2}G_{22}\sigma_2 - i\frac{1}{2}G_{32}\sigma_3 = \hat{d}_2 - \frac{1}{2}G_{12}\sigma_1 - i\frac{1}{2}G_{22}\sigma_2 - i\frac{1}{2}G_{32}\sigma_3, \quad (5) \\ \hat{D}_3 &= \frac{1}{h_3}(\partial_3 + ieA_3) - i\frac{1}{2}G_{13}\sigma_1 - i\frac{1}{2}G_{23}\sigma_2 - i\frac{1}{2}G_{33}\sigma_3 = \hat{d}_3 - i\frac{1}{2}G_{13}\sigma_1 - i\frac{1}{2}G_{23}\sigma_2 - i\frac{1}{2}G_{33}\sigma_3. \end{aligned}$$

From (4), it followstwo blocks equations ( $k = 1, 2, 3$ )

$$iD_0\varphi_+ + i\hat{D}_k\sigma_k\varphi_- = M\varphi_+, \quad -i\hat{D}_k\sigma_k\varphi_+ - iD_0\varphi_- = M\varphi_-. \quad (6)$$

According to general method, we are to separate the rest energy by the formal change  $D_0 \Rightarrow (D_0 - iM)$ ; so obtain

$$i(D_0 - iM)\varphi_+ + i\hat{D}_k \sigma_k \varphi_- = M\varphi_+, \quad -i\hat{D}_k \sigma_k \varphi_+ - i(D_0 - iM)\varphi_- = M\varphi_-, \quad (7)$$

whence after simplifying we get

$$i\frac{1}{M}D_0\varphi_+ + i\frac{1}{M}\hat{D}_k \sigma_k \varphi_- = 0, \quad -i\frac{1}{M}\hat{D}_k \sigma_k \varphi_+ - i\frac{1}{M}D_0\varphi_- = 2\varphi_-. \quad (8)$$

It is known that we should assume the following orders of smallness for involved quantities:

$$\varphi_+ \sim 1, \quad \varphi_- \sim x, \quad \frac{1}{M}\hat{D}_j \sim x, \quad \frac{1}{M}G_{kl} \sim x, \quad \frac{1}{M}D_0 \sim x^2, \quad (9)$$

Taking this into account, we derive two equations of order  $x$  and order  $x^2$ :

$$\varphi_- = -i\frac{1}{2M}\hat{D}_n \sigma_n \varphi_+, \quad i\frac{1}{M}D_0\varphi_+ + i\frac{1}{M}\hat{D}_k \sigma_k \varphi_- = 0. \quad (10)$$

Eliminating the small component  $\varphi_-$ , we arrive at the following equation for the large component  $\varphi_+$ :

$$iD_0\varphi_+ = -\frac{1}{2M}(\hat{D}_1\sigma_1 + \hat{D}_2\sigma_2 + \hat{D}_3\sigma_3)(\hat{D}_1\sigma_1 + \hat{D}_2\sigma_2 + \hat{D}_3\sigma_3)\varphi_+. \quad (11)$$

Let us detail this equation (note the new notation  $\varphi_+ = \Psi$ ):

$$iD_0\Psi = -\frac{1}{2M}(\hat{D}_1\sigma_1 + \hat{D}_2\sigma_2 + \hat{D}_3\sigma_3)(\hat{D}_1\sigma_1 + \hat{D}_2\sigma_2 + \hat{D}_3\sigma_3)\Psi; \quad (12)$$

Taking into account identities

$$\begin{aligned} \hat{D}_1\sigma_1 &= \hat{d}_1\sigma_1 - i\frac{1}{2}G_{11}\sigma_1\sigma_1 - i\frac{1}{2}G_{21}\sigma_2\sigma_1 - i\frac{1}{2}G_{31}\sigma_3\sigma_1, \\ \hat{D}_2\sigma_2 &= \hat{d}_2\sigma_2 - i\frac{1}{2}G_{12}\sigma_1\sigma_2 - i\frac{1}{2}G_{22}\sigma_2\sigma_2 - i\frac{1}{2}G_{32}\sigma_3\sigma_2, \\ \hat{D}_3\sigma_3 &= \hat{d}_3\sigma_3 - i\frac{1}{2}G_{13}\sigma_1\sigma_3 - i\frac{1}{2}G_{23}\sigma_2\sigma_3 - i\frac{1}{2}G_{33}\sigma_3\sigma_3. \end{aligned}$$

and the formulas for products of the Pauli matrices, we obtain

$$\begin{aligned} \hat{D}_1\sigma_1 &= \hat{d}_1\sigma_1 - i\frac{1}{2}G_{11} - \frac{1}{2}G_{21}\sigma_3 + \frac{1}{2}G_{31}\sigma_2, \\ \hat{D}_2\sigma_2 &= \hat{d}_2\sigma_2 + \frac{1}{2}G_{12}\sigma_3 - i\frac{1}{2}G_{22} - \frac{1}{2}G_{32}\sigma_1, \\ \hat{D}_3\sigma_3 &= \hat{d}_3\sigma_3 - \frac{1}{2}G_{13}\sigma_2 + \frac{1}{2}G_{23}\sigma_1 - i\frac{1}{2}G_{33}. \end{aligned} \quad (13)$$

Thus, we have the identity

$$\begin{aligned} \hat{D}_1\sigma_1 + \hat{D}_2\sigma_2 + \hat{D}_3\sigma_3 &= (\hat{d}_1\sigma_1 + \hat{d}_2\sigma_2 + \hat{d}_3\sigma_3) - \\ &- i\frac{1}{2}(G_{11} + G_{22} + G_{33}) + \frac{1}{2}(G_{23} - G_{32})\sigma_1 + \frac{1}{2}(G_{31} - G_{13})\sigma_2 + \frac{1}{2}(G_{12} - G_{21})\sigma_3. \end{aligned}$$

It may be presented shorter (for static case, we have  $B \equiv 0$ )

$$\hat{D}_1\sigma_1 + \hat{D}_2\sigma_2 + \hat{D}_3\sigma_3 = (\hat{d}_1\sigma_1 + \hat{d}_2\sigma_2 + \hat{d}_3\sigma_3) - iB + B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + B_3\sigma_3. \quad (14)$$

Therefore, the Pauli equation in curvilinear coordinates takes on the form

$$iD_0\Psi = -\frac{1}{2M}(-iB + (\hat{d}_1 + B_1)\sigma_1 + (\hat{d}_2 + B_2)\sigma_2 + (\hat{d}_3 + B_3)\sigma_3) \times \\ \times (-iB + (\hat{d}_1 + B_1)\sigma_1 + (\hat{d}_2 + B_2)\sigma_2 + (\hat{d}_3 + B_3)\sigma_3)\Psi. \quad (15)$$

### The detailed structure of the Pauli equation

Let us detail the product of the multipliers

$$\begin{aligned} \Pi^2 &= (-iB + (\hat{d}_1 + B_1)\sigma_1 + (\hat{d}_2 + B_2)\sigma_2 + (\hat{d}_3 + B_3)\sigma_3) \times \\ &\quad \times (-iB + (\hat{d}_1 + B_1)\sigma_1 + (\hat{d}_2 + B_2)\sigma_2 + (\hat{d}_3 + B_3)\sigma_3) = \\ &= -iB(-iB + (\hat{d}_1 + B_1)\sigma_1 + (\hat{d}_2 + B_2)\sigma_2 + (\hat{d}_3 + B_3)\sigma_3) + \\ &\quad + (\hat{d}_1 + B_1)(-iB\sigma_1 + (\hat{d}_1 + B_1) + i(\hat{d}_2 + B_2)\sigma_3 - i(\hat{d}_3 + B_3)\sigma_2) + \\ &\quad + (\hat{d}_2 + B_2)(-iB\sigma_2 - i(\hat{d}_1 + B_1)\sigma_3 + (\hat{d}_2 + B_2) + i(\hat{d}_3 + B_3)\sigma_1) + \\ &\quad + (\hat{d}_3 + B_3)(-iB\sigma_3 + i(\hat{d}_1 + B_1)\sigma_2 - i(\hat{d}_2 + B_2)\sigma_1 + (\hat{d}_3 + B_3)). \end{aligned}$$

Temporally, we will apply the shortening notations

$$\hat{d}_k + B_k = \frac{1}{\hbar_k}(\partial_k + ieA_k) + B_k = Q_k, k = 1, 2, 3;$$

then we obtain

$$\begin{aligned} \Pi^2 &= -iB(-iB + Q_1\sigma_1 + Q_2\sigma_2 + Q_3\sigma_3) + Q_1(-iB\sigma_1 + Q_1 + iQ_2\sigma_3 - iQ_3\sigma_2) + \\ &\quad + Q_2(-iB\sigma_2 - iQ_1\sigma_3 + Q_2 + iQ_3\sigma_1) + Q_3(-iB\sigma_3 + iQ_1\sigma_2 - iQ_2\sigma_1 + Q_3), \end{aligned}$$

that is

$$\begin{aligned} \Pi^2 &= -B^2 - iBQ_1\sigma_1 - iBQ_2\sigma_2 - iBQ_3\sigma_3 - iQ_1B\sigma_1 + Q_1Q_1 + iQ_1Q_2\sigma_3 - iQ_1Q_3\sigma_2 - \\ &\quad - iQ_2B\sigma_2 - iQ_2Q_1\sigma_3 + Q_2Q_2 + iQ_2Q_3\sigma_1 - iQ_3B\sigma_3 + iQ_3Q_1\sigma_2 - iQ_3Q_2\sigma_1 + Q_3Q_3, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \Pi^2 &= +(Q_1Q_1 + Q_2Q_2 + Q_3Q_3) - B^2 - \\ &\quad - iB(Q_1\sigma_1 + Q_2\sigma_2 + Q_3\sigma_3) - i(Q_1B\sigma_1 + Q_2B\sigma_2 + Q_3B\sigma_3) + \\ &\quad + i(Q_1Q_2 - Q_2Q_1)\sigma_3 + i(Q_3Q_1 - Q_1Q_3)\sigma_2 + i(Q_2Q_3 - Q_3Q_2)\sigma_1; \end{aligned}$$

for generality we will preserve the term  $B$  relevant for non-static metrics.

Let us turn to the structure of the Pauli equation

$$\begin{aligned} iD_0\Psi = & -\frac{1}{2M}\Pi^2 = -\frac{1}{2M}\{(Q_1Q_1 + Q_2Q_2 + Q_3Q_3) - B^2 - \\ & -i(BQ_1 + Q_1B)\sigma_1 - i(BQ_2 + Q_2B)\sigma_2 - i(BQ_3 + Q_3B)\sigma_3\} + \\ & +i(Q_1Q_2 - Q_2Q_1)\sigma_3 + i(Q_3Q_1 - Q_1Q_3)\sigma_2 + i(Q_2Q_3 - Q_3Q_2)\sigma_1\}\Psi. \end{aligned} \quad (16)$$

We should find the commutators  $[Q_k, Q_l]$ :

$$\begin{aligned} (Q_2Q_3 - Q_3Q_2)\Psi = & \{((\frac{1}{h_2}\partial_2\frac{1}{h_3})\partial_3 - (\frac{1}{h_3}\partial_3\frac{1}{h_2})\partial_2) + \\ & +ie((\frac{1}{h_2}\partial_2\frac{1}{h_3})A_3 - (\frac{1}{h_3}\partial_3\frac{1}{h_2})A_2) + ie\frac{1}{h_2}\frac{1}{h_3}(\partial_2A_3 - \partial_3A_2) + (\frac{1}{h_2}\partial_2B_3 - \frac{1}{h_3}\partial_3B_2)\}\Psi; \\ (Q_3Q_1 - Q_1Q_3)\Psi = & \{((\frac{1}{h_3}\partial_3\frac{1}{h_1})\partial_1 - (\frac{1}{h_1}\partial_1\frac{1}{h_3})\partial_3) + \\ & +ie((\frac{1}{h_3}\partial_3\frac{1}{h_1})A_1 - (\frac{1}{h_1}\partial_1\frac{1}{h_3})A_3) + ie\frac{1}{h_3}\frac{1}{h_1}(\partial_3A_1 - \partial_1A_3) + (\frac{1}{h_3}\partial_3B_1 - \frac{1}{h_1}\partial_1B_3)\}\Psi; \\ (Q_1Q_2 - Q_2Q_1)\Psi = & \{((\frac{1}{h_1}\partial_1\frac{1}{h_2})\partial_2 - (\frac{1}{h_2}\partial_2\frac{1}{h_1})\partial_1) + \\ & +ie((\frac{1}{h_1}\partial_1\frac{1}{h_2})A_2 - (\frac{1}{h_2}\partial_2\frac{1}{h_1})A_1) + ie\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_2}(\partial_1A_2 - \partial_2A_1) + (\frac{1}{h_1}\partial_1B_2 - \frac{1}{h_2}\partial_2B_1)\}\Psi. \end{aligned}$$

With the special notations

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1}\partial_1 = \partial_{(1)}, \quad \frac{1}{h_2}\partial_2 = \partial_{(2)}, \quad \frac{1}{h_3}\partial_3 = \partial_{(3)}, \\ \partial_2A_3 - \partial_3A_2 = F_{23}, \quad \partial_3A_1 - \partial_1A_3 = F_{31}, \quad \partial_1A_2 - \partial_2A_1 = F_{12}, \end{aligned}$$

the above formulas read more symmetrically

$$\begin{aligned} (Q_2Q_3 - Q_3Q_2)\Psi = & \{((\partial_{(2)}\frac{1}{h_3})\partial_3 - (\partial_{(3)}\frac{1}{h_2})\partial_2) + \\ & +ie((\partial_{(2)}\frac{1}{h_3})A_3 - (\partial_{(3)}\frac{1}{h_2})A_2) + ie\frac{1}{h_2}\frac{1}{h_3}F_{23} + (\partial_{(2)}B_3 - \partial_{(3)}B_2)\}\Psi; \\ (Q_3Q_1 - Q_1Q_3)\Psi = & \{((\partial_{(3)}\frac{1}{h_1})\partial_1 - (\partial_{(1)}\frac{1}{h_3})\partial_3) + \\ & +ie((\partial_{(3)}\frac{1}{h_1})A_1 - (\partial_{(1)}\frac{1}{h_3})A_3) + ie\frac{1}{h_3}\frac{1}{h_1}F_{31} + (\partial_{(3)}B_1 - \partial_{(1)}B_3)\}\Psi; \\ (Q_1Q_2 - Q_2Q_1)\Psi = & \{((\partial_{(1)}\frac{1}{h_2})\partial_2 - (\partial_{(2)}\frac{1}{h_1})\partial_1) + \\ & +ie((\partial_{(1)}\frac{1}{h_2})A_2 - (\partial_{(2)}\frac{1}{h_1})A_1) + ie\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_2}F_{12} + (\partial_{(1)}B_2 - \partial_{(2)}B_1)\}\Psi. \end{aligned}$$

They may be presented yet shorter

$$\begin{aligned}
 (Q_2Q_3 - Q_3Q_2)\Psi &= \left\{ \left( (\partial_{(2)} \frac{1}{h_3}) (\partial_3 + ieA_3) - (\partial_{(3)} \frac{1}{h_2}) (\partial_2 + ieA_2) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + ie \frac{1}{h_2} \frac{1}{h_3} F_{23} + (\partial_{(2)} B_3 - \partial_{(3)} B_2) \right\} \Psi; \\
 (Q_3Q_1 - Q_1Q_3)\Psi &= \left\{ \left( (\partial_{(3)} \frac{1}{h_1}) (\partial_1 + ieA_1) - (\partial_{(1)} \frac{1}{h_3}) (\partial_3 + ieA_3) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + ie \frac{1}{h_3} \frac{1}{h_1} F_{31} + (\partial_{(3)} B_1 - \partial_{(1)} B_3) \right\} \Psi; \\
 (Q_1Q_2 - Q_2Q_1)\Psi &= \left\{ \left( (\partial_{(1)} \frac{1}{h_2}) (\partial_2 + ieA_2) - (\partial_{(2)} \frac{1}{h_1}) (\partial_1 + ieA_1) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + ie \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_2} F_{12} + (\partial_{(1)} B_2 - \partial_{(2)} B_1) \right\} \Psi.
 \end{aligned}$$

For non-static metrics, we would add expressions for three terms

$$-i(BQ_1 + Q_1B); \quad -i(BQ_2 + Q_2B); \quad -i(BQ_3 + Q_3B);$$

we omit them.

For static metrics, the Pauli equation has the following general structure

$$\begin{aligned}
 iD_0\Psi &= -\frac{1}{2M}\Pi^2 = -\frac{1}{2M}\{(Q_1Q_1 + Q_2Q_2 + Q_3Q_3) + \\
 &\quad + i(Q_2Q_3 - Q_3Q_2)\sigma_1 + i(Q_3Q_1 - Q_1Q_3)\sigma_2 + i(Q_1Q_2 - Q_2Q_1)\sigma_3\}\Psi. \tag{17}
 \end{aligned}$$

### Pauli equation in the first order form

Let us turn to the non-relativistic equation (12)

$$iD_0\Psi = -\frac{1}{2M}(\hat{D}_1\sigma_1 + \hat{D}_2\sigma_2 + \hat{D}_3\sigma_3)(\hat{D}_1\sigma_1 + \hat{D}_2\sigma_2 + \hat{D}_3\sigma_3)\Psi, \tag{18}$$

and give other but equivalent formulation of this problem, which is based on the first order differential equations. To this end, lutning to the operator-multiplier entering eq. (18):

$$D = (\hat{D}_1\sigma_1 + \hat{D}_2\sigma_2 + \hat{D}_3\sigma_3) = -iB + (\hat{d}_1 + B_1)\sigma_1 + (\hat{d}_2 + B_2)\sigma_2 + (\hat{d}_3 + B_3)\sigma_3;$$

We fix its matrix structure

$$D = \begin{vmatrix} (\hat{d}_3 - iB + B_3) & (\hat{d}_1 - i\hat{d}_2 + B_1 - iB_2) \\ (\hat{d}_1 + i\hat{d}_2 + B_1 + iB_2) & (-\hat{d}_3 - iB - B_3) \end{vmatrix}. \tag{19}$$

As the next step, let us introduce a subsidiary 2-component function  $\Phi$  :

$$\Psi = \begin{vmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{vmatrix}, \quad \Phi = \begin{vmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{vmatrix} = D\Psi = 1, \tag{20}$$

so that

$$\Phi_1 = (\hat{d}_3 - iB + B_3)\Psi_1 + (\hat{d}_1 - i\hat{d}_2 + B_1 - iB_2)\Psi_2,$$

$$\Phi_2 = (-\hat{d}_3 - iB - B_3)\Psi_2 + (\hat{d}_1 + i\hat{d}_2 + B_1 + iB_2)\Psi_1.$$

In this way, instead of the above Pauli equation we get equivalent system of four first order equations

$$\Phi_1 = (+\hat{d}_3 - iB + B_3)\Psi_1 + (\hat{d}_1 - i\hat{d}_2 + B_1 - iB_2)\Psi_2,$$

$$\Phi_2 = (-\hat{d}_3 - iB - B_3)\Psi_2 + (\hat{d}_1 + i\hat{d}_2 + B_1 + iB_2)\Psi_1, \quad (21)$$

$$2iMD_0\Psi_1 + (+\hat{d}_3 - iB + B_3)\Phi_1 + (\hat{d}_1 - i\hat{d}_2 + B_1 - iB_2)\Phi_2 = 0,$$

$$2iMD_0\Psi_2 + (-\hat{d}_3 - iB - B_3)\Phi_2 + (\hat{d}_1 + i\hat{d}_2 + B_1 + iB_2)\Phi_1 = 0, \quad (22)$$

Where

$$\hat{d}_1 = \frac{1}{h_1}\partial_1 + ieA_1, \quad \hat{d}_2 = \frac{1}{h_2}\partial_2 + ieA_2, \quad \hat{d}_3 = \frac{1}{h_3}\partial_3 + ieA_3;$$

$$B_1 = \frac{1}{2}(G_{23} - G_{32}), \quad B_2 = \frac{1}{2}(G_{31} - G_{13}), \quad B_3 = \frac{1}{2}(G_{12} - G_{21}), \quad B = \frac{1}{2}(G_{11} + G_{22} + G_{33}).$$

In static metrics, equations become simpler

$$\Phi_1 = (+\hat{d}_3 + B_3)\Psi_1 + (\hat{d}_1 - i\hat{d}_2 + B_1 - iB_2)\Psi_2,$$

$$\Phi_2 = (-\hat{d}_3 - B_3)\Psi_2 + (\hat{d}_1 + i\hat{d}_2 + B_1 + iB_2)\Psi_1; \quad (23)$$

$$2iMD_0\Psi_1 + (+\hat{d}_3 + B_3)\Phi_1 + (\hat{d}_1 - i\hat{d}_2 + B_1 - iB_2)\Phi_2 = 0,$$

$$2iMD_0\Psi_2 + (-\hat{d}_3 - B_3)\Phi_2 + (\hat{d}_1 + i\hat{d}_2 + B_1 + iB_2)\Phi_1 = 0. \quad (24)$$

The usual 2-component Pauli equation is obtained by eliminating auxiliary variables  $\Phi_1, \Phi_2$ .

### Particle in magnetic field, cylindrical coordinates

Let us write down the needed initial definitions

$$(r, \phi, z), \quad G_{32} = +\frac{1}{2r}, \quad B_1 = -\frac{1}{2r}, \quad \hat{d}_1 = \partial_r, \quad \hat{d}_2 = \frac{1}{r}(\partial_\phi - ie\frac{Br^2}{2}), \quad \hat{d}_3 = \partial_z;$$

the system of Pauli first order equations reads

$$\Phi_1 = +\partial_z\Psi_1 + (\partial_r - \frac{i}{r}(\partial_\phi - ie\frac{Br^2}{2}) - \frac{1/2}{r})\Psi_2,$$

$$\Phi_2 = -\partial_z\Psi_2 + (\partial_r + \frac{i}{r}(\partial_\phi - ie\frac{Br^2}{2}) - \frac{1/2}{r})\Psi_1,$$

$$2iM\partial_t\Psi_1 + \partial_z\Phi_1 + (\partial_r - \frac{i}{r}(\partial_\phi - ie\frac{Br^2}{2}) - \frac{1/2}{r})\Phi_2 = 0,$$

$$2iM\partial_t\Psi_2 - \partial_z\Phi_2 + (\partial_r + \frac{i}{r}(\partial_\phi - ie\frac{Br^2}{2}) - \frac{1/2}{r})\Phi_1 = 0.$$

The general substitution for the wave function should be

$$\Psi = e^{-iEt} e^{im\phi} e^{ikz} \begin{vmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{vmatrix}, \quad \Phi = e^{-iEt} e^{im\phi} e^{ikz} \begin{vmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \end{vmatrix}; \quad (25)$$

correspondingly we get more simple system

$$\begin{aligned} g_1 &= +ikf_1 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\left(m - e\frac{Br^2}{2}\right) - \frac{1/2}{r}\right)f_2, \\ g_2 &= -ikf_2 + \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\left(m - e\frac{Br^2}{2}\right) - \frac{1/2}{r}\right)f_1, \\ 2MEf_1 + ikg_1 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\left(m - e\frac{Br^2}{2}\right) - \frac{1/2}{r}\right)g_2 &= 0, \\ 2MEf_2 - ikg_2 + \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\left(m - e\frac{Br^2}{2}\right) - \frac{1/2}{r}\right)g_1 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Let us introduce the shortening notations (also for brevity let  $B \Rightarrow B$ )

$$\hat{a}_m = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\left(m - 1/2 - \frac{Br^2}{2}\right), \quad \hat{b}_m = \frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\left(m + 1/2 - \frac{Br^2}{2}\right); \quad (27)$$

then the equations read

$$\begin{aligned} g_1 &= +ikf_1 + \hat{a}_m f_2, \quad g_2 = -ikf_2 + \hat{b}_m f_1, \\ 2MEf_1 + ikg_1 + \hat{a}_m g_2 &= 0, \quad 2MEf_2 - ikg_2 + \hat{b}_m g_1 = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Eliminating the redundant variables, we derive two second order equations

$$\begin{aligned} 2MEf_1 - k^2 f_1 + ik\hat{a}_m f_2 - ik\hat{a}_m f_2 + \hat{a}_m \hat{b}_m f_1 &= 0, \\ 2MEf_2 - k^2 f_2 - ik\hat{b}_m f_1 + ik\hat{b}_m f_1 + \hat{b}_m \hat{a}_m f_1 &= 0; \end{aligned}$$

so we arrive at two separated equations

$$\begin{aligned} (\hat{a}_m \hat{b}_m + 2ME - k^2)f_1(r) &= 0, \\ (\hat{b}_m \hat{a}_m + 2ME - k^2)f_2(r) &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

They are readily solvable, and then lead to the known Landau levels (see for instance in [5]). One can use the following two independent solutions

$$\Psi_1 = e^{-iEt} e^{im\phi} e^{ikz} \begin{vmatrix} f_1(r) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi_2 = e^{-iEt} e^{im\phi} e^{ikz} \begin{vmatrix} 0 \\ f_2(r) \end{vmatrix}. \quad (30)$$

We can elaborate another way for studying the problem, more preferable for further extension. To this end, we turn back the the first order system (34)

$$\begin{aligned} g_1 &= +ikf_1 + \hat{a}_m f_2, \\ g_2 &= -ikf_2 + \hat{b}_m f_1, \\ 2MEf_1 + ikg_1 + \hat{a}_m g_2 &= 0, \\ 2MEf_2 - ikg_2 + \hat{b}_m g_1 &= 0; \end{aligned} \quad (31)$$

evidently, for existence of solutions, we should assume the algebraic constraints

$$g_1 = \mu_1 f_1 \quad g_2 = \mu_2 f_2; \quad (32)$$

this leads to

$$\begin{aligned}\mu_1 f_1 &= ikf_1 + \hat{a}_m f_2, \\ \mu_2 f_2 &= -ikf_2 + \hat{b}_m f_1, \\ 2MEf_1 + ik\mu_1 f_1 + \hat{a}_m \mu_2 f_2 &= 0, \\ 2MEf_2 - ik\mu_2 f_2 + \hat{b}_m \mu_1 f_1 &= 0;\end{aligned}\tag{33}$$

and then we should assume the differential constraints

$$\hat{a}_m f_2 = C_1 f_1, \quad \hat{b}_m f_1 = C_2 f_2;$$

then the system reads

$$\begin{aligned}\mu_1 f_1 &= ikf_1 + C_1 f_1 \Rightarrow \mu_1 = ik + C_1, \\ \mu_2 f_2 &= -ikf_2 + C_2 f_2 \Rightarrow \mu_2 = -ik + C_2, \\ 2MEf_1 + ik\mu_1 f_1 + \mu_2 C_1 f_1 &= 0 \Rightarrow 2ME + ik\mu_1 + \mu_2 C_1 = 0, \\ 2MEf_2 - ik\mu_2 f_2 + \mu_1 C_2 f_2 &= 0 \Rightarrow 2ME - ik\mu_2 + \mu_1 C_2 = 0.\end{aligned}\tag{34}$$

This algebraic system can be readily solved

$$\begin{aligned}\mu_1 &= ik + C, \quad \mu_2 = -ik + C; \\ 2ME + ik\mu_1 + \mu_2 C &= 0, \quad 2ME - ik\mu_2 + \mu_1 C = 0,\end{aligned}\tag{35}$$

that

$$\begin{aligned}2ME + ik(ik + C) + (-ik + C)C &= 0, \\ 2ME - ik(-ik + C) + (ik + C)C &= 0;\end{aligned}$$

whence it follows

$$C = \pm i\sqrt{2ME - k^2}, \quad \mu_1 = ik \pm i\sqrt{2ME - k^2}, \quad \mu_2 = -ik \pm i\sqrt{2ME - k^2};\tag{36}$$

$\mu_1, \mu_2$  determine the constraints in the first order system

$$g_1 = \mu_1 f_1, \quad g_2 = \mu_2 f_2, \quad C = \pm i\sqrt{2ME - k^2}. \quad C^2 = -(2ME - k^2).$$

In turn, the differential constraints gives separate equations (without lost of generality one can set  $C_1 = C_2 = C$ )

$$(\hat{a}_m \hat{b}_m - C^2)f_1(r) = 0, \quad (\hat{b}_m \hat{a}_m - C^2)f_2(r) = 0;\tag{37}$$

They coincide with equatiopns (29). We should remember that the functions  $f_1(r), f_2(r)$  are linked to each other by the first order differential constraints

$$\begin{aligned}(\hat{a}_m \hat{b}_m - C^2)f_1(r) &= 0, \quad f_2(r) = \frac{1}{C} \hat{b}_m f_1(r), \\ (\hat{b}_m \hat{a}_m - C^2)f_2(r) &= 0, \quad f_1(r) = \frac{1}{C} \hat{a}_m f_2(r);\end{aligned}$$

So we can introduce two new solutions

$$\Psi_+ = \begin{vmatrix} f_1 \\ \frac{1}{C_+} \hat{b}_m f_1 \end{vmatrix}, \quad \Psi_- = \begin{vmatrix} f_1 \\ \frac{1}{C_-} \hat{b}_m f_1 \end{vmatrix};\tag{38}$$

we readily find relationships between the above solutions  $\Psi_1, \Psi_2$  (30) and the new ones  $\Psi_+, \Psi_-$ :

$$\Psi_+ - \Psi_- = \left(\frac{1}{C_+} - \frac{1}{C_-}\right)\Psi_2, \quad C_+\Psi_+ - C_-\Psi_- = (C_+ - C_-)\Psi_1. \quad (39)$$

### Conclusions

The non-relativistic Pauli approximation for a spin  $\frac{1}{2}$  particle was studied in arbitrary curvilinear orthogonal coordinates. The final goal is to develop a unified approach to separating the variables in equation for spin  $\frac{1}{2}$  particle in all 12 systems of orthogonal coordinates in the flat space, first in more simple Pauli approximation. We derive general structure for covariant Pauli equation in arbitrary orthogonal coordinates, it includes the relevant tetrads and Ricci rotation coefficients. Because the possibility to develop a unified approach to separating the variables in ordinary presentation of the covariant Pauli equation is rather problematic, other way for studying the problem is proposed. It is based on transforming the usual 2-component Pauli equation to an equivalent system of first order four differential equations, by introducing two auxiliary components, because it is known that the task of separating the variables in the system of differential equations in partial derivatives may be solved easier for the first order systems. One simple example for illustrating this approach, is given; a spin  $\frac{1}{2}$  particle problem in presence of external magnetic field when using the cylindrical coordinates.

The more perspective for generalization is seems to be the method that is based on first order form of Pauli theory.

### REFERENCES

1. Veko, O. V. Peculiarities of squaring method applied to construct solutions of the Dirac, Majorana, and Weyl equations / O. V. Veko, V. M. Red'kov // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2015. – Vol. 18, Nr 1. – P. 44–62.
2. Maxwell equations in matrix form, squaring procedure, separating the variables and structure of electromagnetic solutions / V. V. Kisel, E. M. Ovsyuk, V. M. Red'kov, H. G. Tokarevskaya // *Nonlinear Dynamics and Applications*, Minsk. – 2009. – Vol. 16. – P. 144–168.
3. Maxwell equations in complex form, squaring procedure and separating the variables / V. V. Kisel, E. M. Ovsyuk, V. M. Red'kov, N. G. Tokarevskaya // *Ricerche di Matematica*. – 2011. – Vol. 60, nr 1. – P. 1–14.
4. Red'kov, V. M. Particle fields in Riemannian space and the Lorentz group / V. M. Red'kov. – Minsk : Belarussian science, 2009. – 486 c.
5. Quantum mechanics of particles with spin in an external magnetic field / E. M. Ovsyuk, O. V. Veko, Y. A. Voinova [et al.]. – Minsk : Belarussian science, 2017. – 515 c.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Veko, O. V. Peculiarities of squaring method applied to construct solutions of the Dirac, Majorana, and Weyl equations / O. V. Veko, V. M. Red'kov // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2015. – Vol. 18, Nr 1. – P. 44–62.
2. Maxwell equations in matrix form, squaring procedure, separating the variables and structure of electromagnetic solutions / V. V. Kisel, E. M. Ovsyuk, V. M. Red'kov, H. G. Tokarevskaya // *Nonlinear Dynamics and Applications*, Minsk. – 2009. – Vol. 16. – P. 144–168.
3. Maxwell equations in complex form, squaring procedure and separating the variables / V. V. Kisel, E. M. Ovsyuk, V. M. Red'kov, N. G. Tokarevskaya // *Ricerche di Matematica*. – 2011. – Vol. 60, nr 1. – P. 1–14.

---

4. Red'kov, V. M. Particle fields in Riemannian space and the Lorentz group / V. M. Red'kov. – Minsk : Belarussian science, 2009. – 486 с.

5. Квантовая механика частиц со спином во внешнем магнитном поле / Е. М. Овсюк, О. В. Веко, Я. А. Войнова [и др.]. – Мн. : Бел. наука, 2017. – 515 с.

*Рукапіс паступіў у рэдакцыю 14.09.2025*

*Дмитрий Анатольевич Антонович<sup>1</sup>, Марина Александровна Сквородко<sup>2</sup>,  
Диана Владимировна Шидловская<sup>3</sup>*

*<sup>1</sup>канд. техн. наук, доц.,*

*ведущий науч. сотрудник отдела электронно-лучевых технологий и физики плазмы  
Физико-технического института Национальной академии наук Беларуси*

*<sup>2</sup>магистр техн. наук, ст. преподаватель каф. физики*

*Полоцкого государственного университета имени Евфросинии Полоцкой*

*<sup>3</sup>преподаватель каф. прикладного и системного программирования*

*Витебского государственного университета имени П. М. Машерова*

*Dmitry Antonovich<sup>1</sup>, Marina Skovorodko<sup>2</sup>, Diana Shidlovskaya<sup>3</sup>*

*<sup>1</sup>Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,*

*Leading Researcher, Department of Electron Beam Technologies and Plasma Physics  
of the Physical-Technical Institute of National Academy of Sciences of Belarus*

*<sup>2</sup>Master of Technical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Physics  
of the Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*

*<sup>3</sup>Lecturer of the Department of Applied and System Programming  
of the Vitebsk State University named after P. M. Masherov*

*e-mail: <sup>1</sup>d.antonovich@phti.by; <sup>2</sup>volal26@ya.ru; <sup>3</sup>dianabirukovaseal@gmail.com*

## **К ВОПРОСУ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ОБРАБАТЫВАЕМЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЕКТРОННЫМИ И ИОННЫМИ ПУЧКАМИ**

*Описываются процессы взаимодействия электронных и ионных пучков с обрабатываемой поверхностью, воздействие налетающих частиц на элементы вещества, основные характеристики процессов влияния пучков на поверхность. Рассмотрены зависимости энергетических потерь налетающих частиц от глубины проникновения в обрабатываемое вещество, зависимости коэффициента эмиссии и тормозных способностей от энергии ускоренных частиц. Описано влияние газа и давления на область обрабатываемой поверхности при ионном распылении. Приведены некоторые результаты экспериментальных исследований, полученных для разработанного макета плазменного источника низкоэнергетических ионно-электронных совмещенных в пространстве пучков.*

***Ключевые слова:** электронно-лучевые технологии, обработка поверхности, плазменные источники, плазменные эмиссионные системы, электронно-ионные технологии, ионное распыление.*

### ***To the Question of Impact on Processed Surfaces by Electron and Ion Beams***

*This article describes the processes of interaction of electron and ion beams with the surface being processed, the impact of incident particles on the elements of matter, and the main characteristics of the processes of beam influence on the surface. The dependences of the energy losses of incident particles on the depth of penetration into the substance being processed, the dependences of the emission coefficient and stopping power on the energy of accelerated particles are considered. The influence of gas and pressure on the area of the surface being processed during ion sputtering is described. Some results of experimental studies obtained for the developed model of a plasma source of low-energy ion-electron beams combined in space are presented.*

***Key words:** electron beam technologies, surface treatment, plasma sources, plasma emission systems, electron-ion technologies, ion sputtering.*

### **Введение**

Взаимодействие потока заряженных частиц с поверхностью обрабатываемого материала позволяет изменять ее физико-химические свойства. Воздействие является многофакторным, обрабатываемый материал подвергается как тепловому воздействию, так и модифицирующему – взаимодействию частиц пучка с частицами обрабатываемого материала, приводящему к изменению его внутренней структуры. Среди современных электронно-ионных лучевых технологий воздействия на обрабатываемые поверхности интенсивно развивается область с применением пучков заряженных частиц (электронов и ионов), генерируемых пушками с использованием плазменных

образований, альтернативных термокатодным источникам [1–4]. Наиболее значимые результаты были достигнуты для источников заряженных частиц преимущественно по двум направлениям. Первое относится к генерированию пучка заряженных частиц в источниках на основе высоковольтного тлеющего разряда (ВТР) [4; 5]. Второе направление связано с развитием источников с плазменным эмиттером, в которых роль катода играет газоразрядная плазма [1–4; 6].

Параметры сформированных потоков заряженных частиц и, как следствие, результат взаимодействия с обрабатываемой поверхностью сформированных в таких источниках пучков заряженных частиц определяет дальнейшие технологические возможности и возможные варианты применения таких источников. Поэтому для получения требуемого результата воздействия на материалы важно понимание механизмов взаимодействия потоков заряженных частиц с обрабатываемой поверхностью и проведения предварительных расчетов для определения требуемых параметров источников, формирующих потоки заряженных частиц.

В данной работе представлен обзор основных параметров и соотношений, позволяющих определить результат взаимодействия сформированных источниками заряженных частиц на основе плазменного эмиттера потоков заряженных частиц и рассчитать требуемые параметры таких источников для формирования потоков с заданными свойствами.

### **Взаимодействие ускоренных электронов с веществом**

Процесс влияния электронного пучка на вещество определяется такими характеристиками, как [3; 4; 7]:

- 1) глубина проникновения электронов в вещество;
- 2) распределение выделяемой электронами энергии;
- 3) изменение поперечных размеров пучка по мере продвижения его вглубь поверхности;
- 4) явление вторичной электронной эмиссии.

Падающие электроны с энергиями менее 1 МэВ, контактируя с электронными оболочками и ядрами атомов вещества, вызывают упругое и неупругое рассеяние ускоренных электронов, сопровождающееся процессами возбуждения и ионизации атомов, а также нарушают структуру вещества.

Процесс влияния электронного пучка на вещество описывается с помощью углового рассеяния и потери энергии электронов. При этом считается, что угловое рассеяние обусловлено упругими взаимодействиями, а потеря энергии – неупругими.

Рассеяние электронов описывается с помощью формулы Резерфорда [8]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{e^2 Z_2}{16\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\varphi/2)},$$

где  $\sigma$  – дифференциальное сечение рассеяния,  $\Omega$  – телесный угол,  $e$  – заряд электрона,  $Z_2$  – заряд ядра рассеивающих центров,  $\varphi$  – угол рассеяния,  $E$  – энергия электрона.

Отсюда следует, что при больших начальных энергиях угол рассеяния электрона будет мал. Уменьшение энергии приводит к увеличению угла рассеяния. Таким образом, движение электронов в веществе сопровождается возрастанием угла его рассеяния.

Описывая процесс взаимодействия частиц с веществом, используется важное понятие – траекторный пробег  $R_\xi$  (путь, который проходит частица в веществе до полной остановки). За этот промежуток частица растрчивает свою запасенную энергию. Проекция реальной траектории частицы на направление вектора скорости при входе

в вещество определяется как проективный пробег частицы  $R_{пр}$  ( $\xi$  – координата частицы на реальной траектории,  $x$  – на проективной).

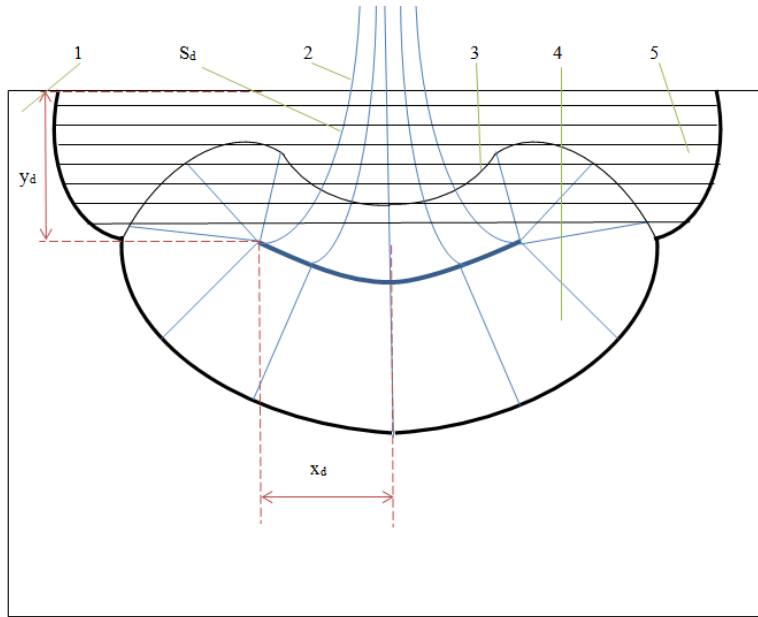
Продвигаясь вглубь вещества, из-за рассеяния электронный пучок увеличивается в поперечном направлении. Величина размытия пучка определяется выражением:

$$\Delta D \sim \frac{x^{1,5}}{E_0},$$

где  $E_0$  – начальная энергия ускоренного электрона.

В конце пробега составляющая вектора скорости электронов имеет направление противоположное первоначальному.

На рисунке 1 схематично представлена область взаимодействия электронного пучка с веществом.



1 – обрабатываемый материал; 2 – пучок электронов; 3 – область рассеяния пучка при столкновениях на малые углы; 4 – область диффузно-рассеянных электронов; 5 – область рассеяния на большие углы,  $S_d$  – путь,  $x_d$  и  $y_d$  – координаты точки, в которой угол рассеяния электрона составляет  $90^\circ$  по отношению к направлению вектора его скорости при входе в вещество.

**Рисунок 1 – Модель области взаимодействия электронного пучка с веществом**

Важным в описании взаимодействия электрона с веществом является изучение удельных ионизационных потерь электрона, которое описывается с помощью выражения:

$$-\frac{dE}{d\xi} = \frac{e^4 Z_2 N_0}{2\varepsilon_0 E_0} \ln \frac{4E_0}{\bar{I}}$$

( $Z_2$  – заряд ядра атома в веществе,  $e$  – заряд электрона,  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая постоянная вакуума,  $N_0$  – число атомов в единице объема,  $E_0$  – начальная энергия электрона,  $\bar{I} = 13.5Z_2$  – средняя «энергия ионизации» атома,  $d\xi$  – бесконечно малый элемент траектории электрона).

Для получения более точных результатов в практических расчетах используют проективный пробег электрона в качестве пространственной координаты. Применяя закон Виддингтона [9]

$$E^2(x) = E_0^2 - \alpha_B x,$$

где  $x$  – проективное расстояние,  $E(x)$  – текущее значение энергии,  $E_0$  – начальное значение энергии,  $\alpha_B$  – константа Виддингтона, определяемая экспериментально, можно оценить проективную глубину проникновения электрона в вещество

$$R_{\text{ПР}} = \frac{E_0^2}{\alpha_B}$$

Для диапазона начальных энергий 10кэВ – 100кэВ используется формула [9]:

$$R_{\text{ПР}} = 2,35 \cdot 10^{-12} \frac{U_{\text{П}}^2}{\rho},$$

где  $U_{\text{П}}$  – ускоряющее напряжение (В),  $\rho$  – плотность вещества (г/см<sup>3</sup>).

Распределение приносимой электронами энергии по объему обрабатываемого материала зависит от характеристик электронного пучка. Удельная объемная мощность  $dP/dV$ , передаваемая электронным пучком, описывается формулой

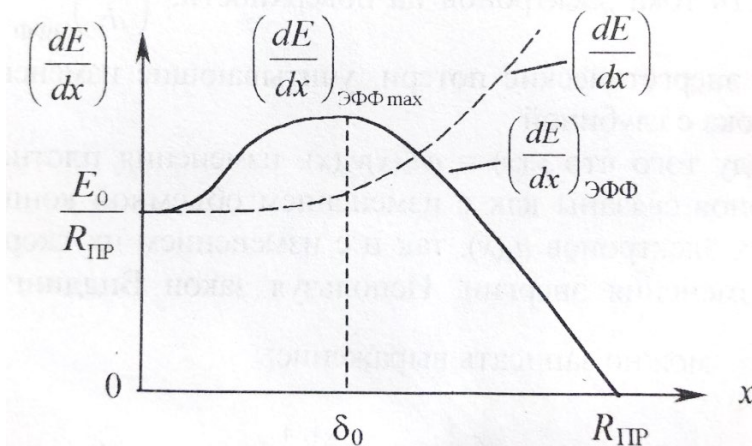
$$\frac{dP}{dV} = \frac{dE}{dx} j_e(x) \frac{1}{e} = \left( \frac{dE}{dx} \right)_{\text{ЭФ}} \frac{j_{e_0}}{e},$$

где  $\frac{dE}{dx}$  – потери энергии электронами,  $j_e$  – плотность тока ускоренных электронов в сечении  $x$ ,  $e$  – заряд электрона,  $j_{e_0}$  – плотность тока электронов на поверхности,  $\left( \frac{dE}{dx} \right)_{\text{ЭФ}}$  – эффективные энергетические потери, учитывающие изменение плотности тока с глубиной [7].

Концентрация электронов в сечении  $x$  уменьшается за счет рассеяния потока и увеличивается за счет появления обратного потока электронов. Эффективные потери энергии при этом описываются с помощью выражения [7]

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)_{\text{ЭФ}} = \frac{E_0}{R_{\text{ПР}}} \left( 1 - \frac{x}{R_{\text{ПР}}} \right)^{5/4} \left( 3 - 2e^{-\frac{Z+8}{4R_{\text{ПР}}}x} \right).$$

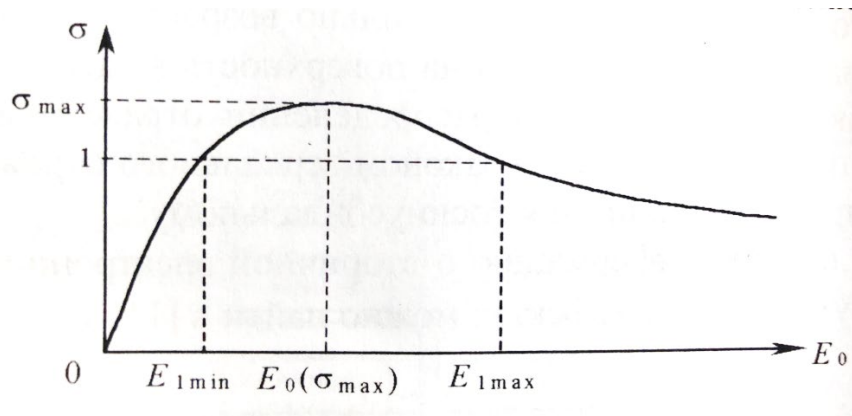
На рисунке 2 представлен график зависимости потерь энергии от глубины продвижения электронов в веществе. Анализируя график, видно, что выделяемая мощность в максимуме ( $x = \delta_0$ ) больше выделяемой мощности на поверхности.



$\delta_0$  – расстояние от поверхности, где наблюдается максимум выделяемой мощности

**Рисунок 2 – Зависимость энергетических потерь от глубины проникновения электронов**

Еще одним из явлений, которое оказывает влияние на характер процессов вблизи обрабатываемой поверхности пучком электронов, является вторичная электронная эмиссия. Коэффициент вторичной электронной эмиссии  $\sigma$  зависит от коэффициентов, характеризующих область с истинной эмиссией и области с упруго и неупруго отраженными электронами. Также существует взаимосвязь  $\sigma$  с энергией первичных электронов  $E_0$  (рисунок 3).



**Рисунок 3 – Зависимость коэффициента вторичной эмиссии от энергии ускоренных электронов [7]**

При возрастании начального значения энергии падающих электронов  $E_0$  коэффициент вторичной эмиссии растет до некоторого максимального значения, а затем начинает спадать. Для металлов максимальное значение  $\sigma$  незначительно превышает 1, для диэлектриков может быть и более 10. Если максимальное значение  $\sigma$  превышает 1, то важно знать не только  $E_0(\sigma_{max})$ , но и значения энергии  $E_{1max}$  и  $E_{1min}$ , соответствующие  $\sigma=1$ . Данные значения энергии необходимы для определения динамического потенциала поверхности диэлектрика. Состояние поверхности (нанесенные пленки или адсорбированные слои) влияет на значение коэффициента вторичной эмиссии, но не влияет на характер отражения электронов.

### **Взаимодействие ускоренных ионов с веществом**

При ионно-вакуумной обработке вещества особое внимание уделяется [10; 11]:

- 1) эмиссии нейтральных частиц с поверхности;
- 2) вторичной ионно-электронной эмиссии;
- 3) ионной имплантации.

На процесс потери энергии ионов в веществе влияют неупругие столкновения со связанными электронами вещества и упругие соударения с ядрами вещества. Для описания данных процессов используются понятия электронной  $S_e(E)$  и ядерной  $S_n(E)$  тормозных способностей. Ионные потери энергии описываются выражением:

$$-\frac{dE}{d\xi} = N[S_n(E) + S_e(E)],$$

где  $N$  – концентрация атомов в веществе.

Данное выражение применимо в случае, когда начальная энергия ионов не превышает 1 МэВ.

Вследствие взаимодействия ионного пучка с веществом электроны обрабатываемого вещества переходят в возбужденное состояние, энергия которых может быть с непрерывным значением или дискретным. Энергия электронов увеличивается за счет

кинетической энергии налетающего иона. При высоких энергиях ионов, электронная тормозная способность определяется выражением [12]

$$S_e(E) = -\frac{2Z_1^2 e^4 Z_2}{\varepsilon_0 E} \ln\left(\frac{4E}{\bar{I}}\right),$$

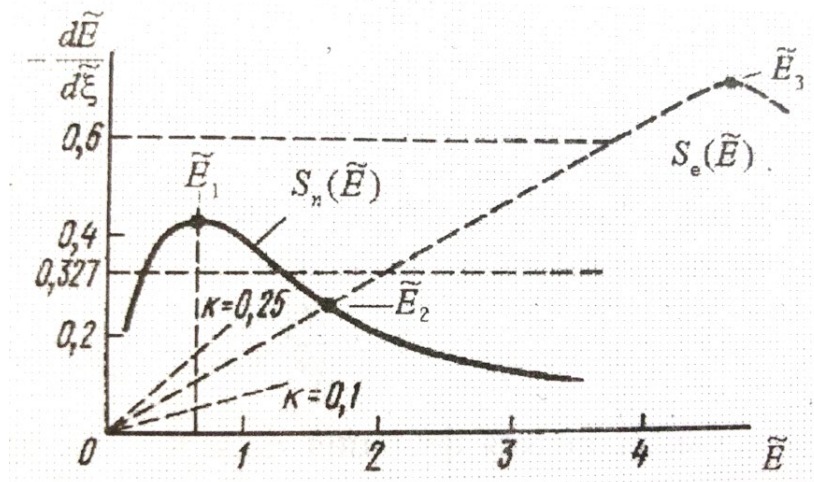
где  $Z_1$  – зарядовое число первичного иона,  $Z_2$  – порядковый номер атома вещества,  $E$  – энергия первичного иона,  $e$  – заряд электрона,  $\bar{I}$  – средний ионизационный потенциал атомов вещества.

При вычислении ядерной тормозной способности используется выражение в безразмерном виде

$$S_n(\tilde{E}) = 0,5 \ln\left(\frac{1+\tilde{E}}{\tilde{E}+A\tilde{E}^B}\right),$$

где  $\tilde{E} = C_E E$  – безразмерная переменная,  $C_E = \frac{4\pi\varepsilon_0 a_L M_2}{e^2 Z_1 Z_2 (M_1 + M_2)}$  – коэффициент преобразования координаты,  $a_L = 0,855 a_0 (Z_1^3 + Z_2^3)^{-1/2}$  – длина экранирования по Линдхарду,  $a_0 = 0,529 \cdot 10^{-10}$  – боровский радиус,  $A = 0,10396$  и  $B = 0,50793$  – постоянные аппроксимации в случае потенциала Томаса – Ферми [12].

Анализируя график зависимости тормозных способностей от энергии ионов (рисунок 4) видно, что при больших энергиях преобладает электронное торможение, а при малых – ядерное.



**Рисунок 4 – Зависимости электронной и ядерной тормозных способностей от энергии ионного пучка [12]**

Для определения распределения ионов по глубине вещества, необходимо знать проективный пробег  $R_{\text{пр}}$  и его дисперсию  $\Delta R_{\text{пр}}$ , которые, в свою очередь, рассчитываются из распределения потерь энергии ионов в веществе. Возрастание величины  $R_{\text{пр}}$  происходит в эффекте каналирования, когда ионы движутся по т. н. каналам (направлениям в монокристаллах, вдоль которых выстраиваются атомы).

Рассмотрим изменения, происходящие при взаимодействии ионного пучка с веществом в процессе распыления (эмиссии нейтральных частиц с поверхности). Ионное распыление считается физическим, если при воздействии ионов на вещество происходит эмиссия с поверхности не только в виде атомов вещества, но и атомов и молекул, адсорбированных на поверхности и растворенных в веществе. При химическом распылении вещество с поверхности удаляется за счет образования летучих химических соединений.

Определяющей характеристикой ионного распыления является коэффициент распыления  $Y$ , который зависит от энергии, массы и заряда ионов, угла падения ионов на поверхность, заряда ядра, массы, энергии связи атома обрабатываемого вещества, кристаллического строения, шероховатости и пористости поверхности и др.

Распыление происходит, когда значение энергии падающего иона больше некоторого значения пороговой энергии  $E_{пор}$ . При этом  $E_{пор}$  рассчитывается, если знать массу иона  $M_1$ , массу атома вещества  $M_2$ , энергию связи атома с поверхностью  $E_{св}$

$$E_{пор} = \frac{(M_1 + M_2)^2}{M_1 M_2} E_{св}.$$

Коэффициент распыления зависит от вида ионов пучка и достигает максимального значения при  $M_1 \approx M_2$ . Также зависит от атомного номера вещества и имеет периодический характер из-за изменений свойств веществ в таблице химических элементов Д. И. Менделеева.

Строгой закономерности в зависимости коэффициента ионного распыления от температуры вещества нет. Для аморфных и поликристаллических тел  $Y$  не зависит от температуры до 400 К, для монокристаллических полупроводников – до температуры 600 К. При более высоких температурах коэффициент ионного распыления может как уменьшаться, так и увеличиваться, например, из-за структурных превращений или начала термического испарения обрабатываемого вещества.

На гладкой поверхности поликристаллических материалов при нормальном падении бомбардирующих ионов наблюдается образование приповерхностного рельефа в виде кратеров, выступов, блистеров. Коэффициент распыления у гладких поверхностей выше, чем у шероховатых. При увеличении угла падения ионов происходит повышение гладкости материала. Таким образом, параметры процесса распыления полностью влияют на рельеф, получаемый при удалении приповерхностных слоев материала.

Процесс ионного распыления связан с изучением областей энергии ионов. При энергии падающих ионов, равной десяткам килоэлектронвольт, коэффициент распыления достигает максимальных значений. Важную роль в значении  $Y$  играет угол падения ионов на вещество. При увеличении угла падения ионов коэффициент распыления растет. Значение  $Y$  при максимальном угле падения ионов в 3–6 раз больше, чем при нормальном падении ионов. Если же угол падения превышает свое максимальное значение, то ионы упруго отражаются и коэффициент распыления уменьшается. Рост максимального значения угла достигается за счет увеличения энергии падающих ионов.

Не малую роль в эффективности ионного распыления играет состав газа и давление газа в области обрабатываемой поверхности. При повышении давления в пределах до 15 Па эффективное значение коэффициента распыления снижается из-за действия процессов обратной диффузии и обратного рассеивания.

В обратной диффузии возвращение атомов обратно на обрабатываемую поверхность происходит с расстояния большего, чем средняя длина свободного пути распыленных атомов. При обратном рассеивании, возвращение атомов происходит, наоборот, с расстояний меньших длины свободного пути. Энергия таких атомов в обратном рассеивании выше, чем энергия теплового движения атомов газа, распыляемого над поверхностью.

В случае обратной диффузии возвращающиеся атомы обладают средними значениями энергии, определяемой тепловым движением атомов газа.

Таким образом, коэффициент ионного распыления в случае, когда масса атомов газа меньше массы распыленных атомов (процесс будет описываться обратной диф-

фузией) определяется формулой Хипшеля, скорректированной Данилиным и Киреевым [13]:

$$Y = \begin{cases} Y_0 & \text{при } pd < \lambda_{pT0} ; \\ Y_0 \frac{2,3 \lambda_{p0}}{2,3 \lambda_{p0} + pd - \lambda_{pT0}} & \text{при } pd \geq \lambda_{pT0}, \end{cases}$$

где  $Y_0$  – коэффициент распыления в вакууме,  $\lambda_{p0}$  – длина свободного пути при единичном давлении,  $\lambda_{pT0}$  – длина направленного пути (длина термализации, на которой распыленная частица теряет избыточную энергию и импульс),  $d$  – расстояние, проходимое распыленной частицей до поверхности,  $p$  – давление.

При воздействии на поверхность не только потока ионов, но и газовой смеси необходимо учитывать плотность потока газовых атомов, описываемую выражением:

$$v_a = N_L p_a \sqrt{\frac{kT_a}{\pi m_a}},$$

где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T_a$  – температура атомов,  $m_a$  – масса атомов,  $N_L$  – число Лошмидта,  $p_a$  – парциальное давление.

Картина ионного распыления будет зависит от количества попадающих химически активных частиц на обрабатываемое вещество. Если поток химически активных частиц меньше основного потока распыляющих частиц, то его влияние не будет оказывать существенных изменений на процесс распыления.

При воздействии ионного пучка на поверхность материала формируются хорошие условия для эмиссии с поверхности электронов. Потенциальной и кинетической энергии иона хватает для того, чтобы электрон смог преодолеть потенциальный барьер на облучаемой поверхности. Характеристикой вторичной ионно-электронной эмиссии является коэффициент  $\gamma$ , который описывает выход электронов с поверхности в расчете на один упавший ион. Определяется данный коэффициент в виде суммы кинетической и потенциальной ионно-электронной эмиссии.

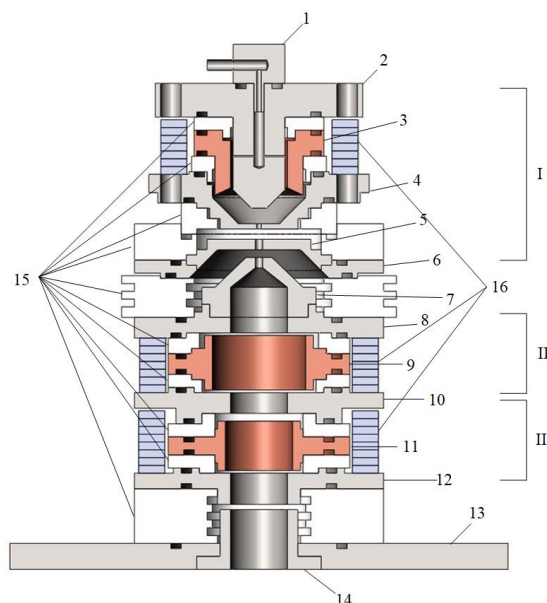
Для возникновения кинетической эмиссии энергия падающего иона должна быть выше некоторой пороговой энергии, составляющей сотни электронвольт. Если энергия ионов меньше нескольких сотен килоэлектронвольт, то зависимость коэффициента кинетической ионно-электронной эмиссии  $\gamma_k$  от энергии ионов носит линейный характер. При увеличении энергии ионов  $\gamma_k$  возрастает плавно до некоторого максимального значения. Когда энергия ионов достигает больших значений, глубина прохождения ионов в вещество увеличивается, а вероятность выхода возбужденных электронов уменьшается, тем самым уменьшается и  $\gamma_k$ .

Для возникновения потенциальной ионно-электронной эмиссии необходимо выполнение условия, в котором потенциал ионизации иона больше удвоенной работы выхода вещества. При приближении иона к поверхности вещества образуется область с дискретными разрешенными уровнями, на которых может происходить переход электронов вещества. Если при данном переходе избыток энергии превышает работу выхода, то осуществляется эмиссия электрона. Коэффициент потенциальной ионно-электронной эмиссии практически не зависит от кинетической энергии ионов.

У ионного внедрения существует важный недостаток, заключающийся в нарушении кристаллической структуры обрабатываемого металла или полупроводника. В результате первичных соударений ионов с атомами мишени или вторичных соударений уже смещенных из узлов кристаллической решетки быстрых атомов с другими атомами матрицы появляются дефекты, устранить которые возможно с помощью термообработки.

**Теоретическая оценка термического воздействия разработанного макета плазменного источника низкоэнергетических ионно-электронных совмещенных в пространстве пучков**

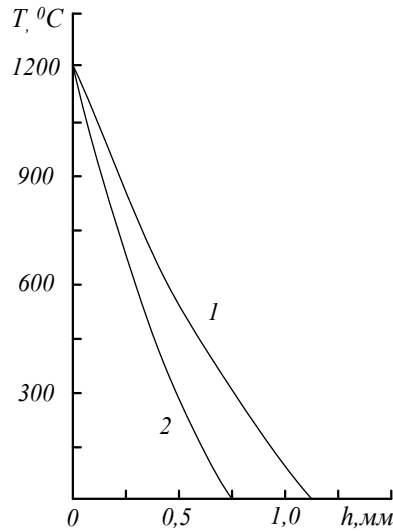
На основе приведенных соотношений, а также методики и прикладной программы, представленной в [14], была проведена теоретическая оценка термического воздействия разработанного макета плазменного источника низкоэнергетических ионно-электронных совмещенных в пространстве пучков [15] на поверхность обрабатываемого материала (сталь 45) в стационарном режиме. Конструкция плазменного источника представлена на рисунке 5.



*1 – штуцер для напуска плазмообразующего газа; 2 – внутренний катод; 3 – главный анод;  
 4 – внешний катод; 5 – эмиттерный электрод; 6 – вспомогательный анод;  
 7 – ускоряющий электрод; 8, 10, 12 – катоды; 9, 11 – аноды; 13 – фланец для установки структуры  
 на рабочую камеру; 14 – согласующий электрод; 15 – изоляторы;  
 16 – постоянные магниты I, II, III – области разрядных камер*

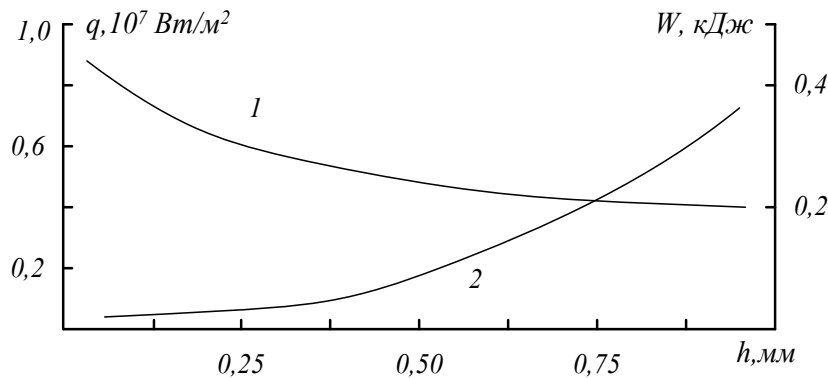
**Рисунок 5 – Электродная структура источника заряженных частиц со скрещенными  $E \times H$  полями [16]**

Данная конструкция способна формировать электронные и ионные пучки с током до 45 мА при ускоряющем напряжении до 5 кВ и обеспечивать в стационарном режиме мощность пучка до  $10^7$  Вт/м<sup>2</sup>. На рисунках 6 и 7 представлены некоторые результаты расчетов, полученные в рамках предложенной модели – фрагмент распределения температуры в материале и зависимость толщины термообработанного слоя от плотности мощности электронного пучка и суммарного энергоклада в изделие для стационарного режима воздействия.



1 – плотность мощности  $0,2 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2$ ; 2 – плотность мощности  $0,4 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2$

**Рисунок 6 – Фрагмент распределения температуры по толщине однослойного материала (сталь 45) при стационарном воздействии**



**Рисунок 7 – Зависимость толщины термически обработанного слоя  $h$  от плотности мощности (1) и суммарного энерговклада (2)**

Как следует из рисунков, с уменьшением плотности мощности электронного пучка крутизна распределения температуры снижается (рисунок 6), а толщина термически обработанного слоя и общий энерговклад увеличиваются (рисунок 7).

Это означает, что теоретически в таком режиме воздействия возможно получение термически обработанного слоя большой толщины. Однако понятно, что при этом остальная часть изделия подвергается значительному разогреву, что в ряде случаев недопустимо. Поэтому перспективным представляется исследовать импульсный режим работы данного источника, реализация которого, как показывают ранее проведенные эксперименты [17], как правило, дает возможность получать более эффективный энерговклад с меньшим термическим воздействием на весь обрабатываемый материал.

### Заключение

Ионно-вакуумная обработка материалов с использованием потоков ионов и электронов может быть использована в процессах нанесения вещества на поверхность, удаления вещества с поверхности, модификации поверхностных слоев. Изучение данного вида обработки актуально при создании новых и модернизации существующих конструкций электронно-лучевых устройств.

Создание физико-математических моделей происходящих при таком воздействии процессов и их моделирование позволит существенно снизить большой объем экспериментальных исследований и упростит разработку конструкций плазменных источников заряженных частиц, способных формировать пучки с требуемыми для реализации соответствующей технологии свойствами.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Крейндел, Ю. Е. Плазменные источники электронов / Ю. Е. Крейндел. – М. : Атомиздат, 1977. – 144 с.
2. Источники электронов с плазменным эмиттером / Ю. Е. Крейндел [и др.]. – Новосибирск : Наука, 1983. – 120 с.
3. Физика и технология плазменных эмиссионных систем / под общ. ред. В. Т. Барченко. – СПб. : Изд-во Санкт-Петерб. гос. электротехн. ун-та «ЛЭТИ», 2014. – 286 с.
4. Плазменные процессы в технологических электронных пушках / М. А. Завьялов [и др.]. – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 256 с.
5. Новиков, А. А. Источники электронов высоковольтного тлеющего разряда с анодной плазмой / А. А. Новиков. – М. : Энергоатомиздат, 1983. – 96 с.
6. Окс, Е. М. Источники электронов с плазменным катодом / Е. М. Окс. – Томск : НТЛ, 2005. – 216 с.
7. Ионно-плазменные технологии в электронном производстве : моногр. / В. Т. Барченко, Ю. А. Быстров, Е. А. Колгин ; под ред. Ю. А. Быстрова. – СПб. : Энергоатомиздат, 2001. – 331 с.
8. Вендик, О. Г. Корпускулярно-фотонная технология / О. Г. Вендик, Ю. Н. Горин, В. Ф. Попов. – М. : Высш. шк., 1984. – 240 с.
9. Рыкалин, М. М. Основы электронно-лучевой обработки материалов / М. М. Рыкалин, И. В. Зуев, А. А. Углов. – М. : Машиностроение, 1978. – 239 с.
10. Габович, М. Д. Физика и техника плазменных источников ионов / М. Д. Габович. – М. : Атомиздат, 1972. – 304 с.
11. Браун, Я. Физика и технология источников ионов / Я. Браун. – М. : Мир, 1998. – 495 с.
12. Романов, В. С. Прохождение заряженных частиц через вещество / В. С. Романов, С. В. Стародубцев. – Ташкент : Изд-во ФАН, 1962.
13. Данилин, Б. С. Ионное травление микроструктур / Б. С. Данилин, В. Ю. Киреев. – М. : Совет. радио, 1979. – 104 с.
14. Груздев, В. А. Моделирование температурного поля в поверхностном слое при импульсном электронно-лучевом воздействии / В. А. Груздев, В. Г. Залесский, Д. Г. Руголь // Инженерно-физический журнал. – 2007. – № 2. – С. 134–142.
15. Патент ВУ 23743, МПК Н 01J 37/30. Плазменный источник электронно-ионных пучков / Антонович Д. А., Груздев В. А., Залесский В. Г., Солдатенко П. Н., Голубев Ю. П. // Афіційны бюлетэнь Нац. цэнтра інтэлектуал. уласнасці. – 2022. – № 3 (146). – С. 65.
16. Antonovich, D. A. Features of Electron Optical Systems with the Plasma Emitter Based on Stationary Double Electric Layers in the Plasma / D. A. Antonovich, V. A. Gruzdev, V. G. Zalesski // Russian Physics Journal. – 2021. – Vol. 63, nr 10, February. – P. 1713–1720.
17. Антонович, Д. А. Электронно-ионный источник для реализации комбинированного воздействия на поверхность / Д. А. Антонович, В. А. Груздев, В. Г. Залесский // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2014. – № 4. – С. 119–124.

## REFERENCES

1. Kreindel', Yu. E. Plazmennyye istochniki elektronov / Yu. E. Kreindel'. – M. : Atomizdat, 1977. – 144 s.
2. Istochniki elektronov s plazmennym emitterom / Yu. E. Kreindel' [i dr.]. – Novosibirsk : Nauka, 1983. – 120 s.

3. Fizika i tekhnologiya plazmennykh emissionnykh sistem / pod obshch. red. V. T. Barchenko. – SPb. : Izd-vo Sankt-Peterb. gos. elektrotekhn. un-ta «LETI», 2014. – 286 s.
4. Plazmennye protsessy v tekhnologicheskikh elektronnykh pushkakh / M. A. Zav'yalov [i dr.]. – M. : Energoatomizdat, 1989. – 256 s.
5. Novikov, A. A. Istochniki elektronov vysokovol'nogo tleyushchego razryada s anodnoi plazmoi / A. A. Novikov. – M. : Energoatomizdat, 1983. – 96 s.
6. Oks, E. M. Istochniki elektronov s plazmennym katodom / E. M. Oks. – Tomsk : NTL, 2005. – 216 s.
7. Ionno-plazmennye tekhnologii v elektronnom proizvodstve : monogr. / V. T. Barchenko, Yu. A. Bystrov, E. A. Kolgin ; pod red. Yu. A. Bystrova. – SPb. : Energoatomizdat, 2001. – 331 s.
8. Vendik, O. G. Korpuskulyarno-fotonnaya tekhnologiya / O. G. Vendik, Yu. N. Gorin, V. F. Popov. – M. : Vyssh. shk., 1984. – 240 s.
9. Rykalin, M. M. Osnovy elektronno-luchevoi obrabotki materialov / M. M. Rykalin, I. V. Zuev, A. A. Uglov. – M. : Mashinostroenie, 1978. – 239 s.
10. Gabovich, M. D. Fizika i tekhnika plazmennykh istochnikov ionov / M. D. Gabovich. – M. : Atomizdat, 1972. – 304 s.
11. Braun, Ya. Fizika i tekhnologiya istochnikov ionov / Ya. Braun. – M. : Mir, 1998. – 495 s.
12. Romanov, V. S. Prokhozhdenie zaryazhennykh chastits cherez veshchestvo / V. S. Romanov, S. V. Starodubtsev. – Tashkent : Izd-vo FAN, 1962.
13. Danilin, B. S. Ionnoe travlenie mikrostruktur / B. S. Danilin, V. Yu. Kireev. – M. : Sovet. radio, 1979. – 104 s.
14. Gruzdev, V. A. Modelirovanie temperaturnogo polya v poverkhnostnom sloe pri impul'snom elektronno-luchevom vozdествii / V. A. Gruzdev, V. G. Zalesskii, D. G. Rugol' // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. – 2007. – № 2. – S. 134–142.
15. Patent BY 23743, MPK H 01J 37/30. Plazmenniy istochnik elektronno-ionnykh puchkov / Antonovich D. A., Gruzdev V. A., Zalesskii V. G., Soldatenko P. N., Golubev Yu. P. // Afitsyiny byuleten' Nats. tsehntra intelektual. ulasnasti. – 2022. – № 3 (146). – S. 65.
16. Antonovich, D. A. Features of Electron Optical Systems with the Plasma Emitter Based on Stationary Double Electric Layers in the Plasma / D. A. Antonovich, V. A. Gruzdev, V. G. Zalesski // Russian Physics Journal. – 2021. – Vol. 63, nr 10, February. – P. 1713–1720.
17. Antonovich, D. A. Elektronno-ionnyi istochnik dlya realizatsii kombinirovannogo vozdествiya na poverkhnost' / D. A. Antonovich, V. A. Gruzdev, V. G. Zalesskii // Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya S. Fundamental'nye nauki. – 2014. – № 4. – S. 119–124.

*Рукапіс паступіў у рэдакцыю 04.03.2025*

**Николай Никитич Сендер**

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. фундаментальной математики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Nikolai Sender**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics  
of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: [sender@brsu.by](mailto:sender@brsu.by)

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ЭЛЛИПСОМЕТРИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГИРОТРОПИИ КРИСТАЛЛОВ СРЕДНИХ СИНГОНИЙ В ОТРАЖЕННОМ СВЕТЕ

Рассмотрена задача о распространении света в гиротропных кристаллах с антисимметричной частью тензора гирации. Получено общее решение уравнения  $(1 - \tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\alpha + \tilde{m}^*\varepsilon^{-1}\tilde{m}^* + i\tilde{\Gamma}^*)\vec{H} = 0$

для вектора магнитного поля собственных волн  $\vec{H}$ , применимое к кристаллам всех сингоний. Рассмотрены кристаллы средних и низших сингоний с тензором гирации  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2(\vec{c}, \vec{c}) + \alpha_0\vec{c}^*$ . Показано что, для средних сингоний, в квазиобыкновенной волне, если  $\vec{n}$  и  $\vec{c}$  не ортогональны, всегда имеется составляющая магнитного поля вдоль направления распространения, тогда как в квазиобыкновенной волне такая составляющая появляется только при наличии несимметричной части тензора  $\alpha$ . Показано, что гиротропия кристаллов планальных классов средних сингоний проявляется не только в эллиптичности отраженного света, но и в дополнительном скачке фаз отраженных волн, особенно заметном вблизи угла Брюстера. Гиротропия таких кристаллов проявляется тем заметнее, чем ближе показатель преломления окружающей среды к показателям преломления кристалла. Приведенные расчеты верны для идеальной поверхности кристалла, но переходный слой может оказывать влияние на эллиптичность отраженного света, на скачки фаз, а также на модули недиагональных элементов. Оценено влияние переходного слоя.

**Ключевые слова:** эллипсометрия, параметры гиротропии, кристаллы средних и низших сингоний, тензор гирации.

### **Investigation of Possibilities of Ellipsometric Determination of Gyrotropy Parameters of Crystals of Middle Syngonies in Reflected Light**

The problem of light propagation in gyrotropic crystals with antisymmetric part of the gyration tensor is considered. The general solution of the equation  $(1 - \tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\alpha + \tilde{m}^*\varepsilon^{-1}\tilde{m}^* + i\tilde{\Gamma}^*)\vec{H} = 0$  for the vector of the mag-

netic field of its own waves  $\vec{H}$  applicable to crystals of all syngonies is obtained. Crystals of the average and lower crystal systems with the tensor of gyration  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2(\vec{c}, \vec{c}) + \alpha_0\vec{c}^*$  are considered. It is shown, that for.

It is shown that for the average syngonies in a quasi-ordinary wave, if  $\vec{n}$  and  $\vec{c}$  are not orthogonal, there is always a component the magnet field along the propagation direction, whereas in a quasi-ordinary wave such component appears only in the presence of an asymmetric part of the tensor  $\alpha$ . It is shown that gyrotropy of crystals of planal class of middle syngony manifests itself not only in ellipticity of the reflected light, but also in the additional phase jump of the reflected waves, especially near the Brewster angle. Gyrotropy of such crystals manifests itself the more noticeable the closer the refractive index of the environment to the refractive indices of the crystal. The calculations correct for a perfect crystal surface, but the transition layer can affect the ellipticity of the reflected light, jump phases and modules of the nondiagonal elements. The influence of the transition layer.

**Key words:** ellipsometry, gyrotropy parameters, crystals of middle and lower syngonies, gyration tensor.

### **Введение**

Для выяснения особенностей проявления гиротропии, связанной с антисимметричной частью тензора  $\alpha$ , вначале рассмотрим вопрос о распространении света в кристаллах средних и низших сингоний, тензор которых наряду с симметричной

содержит и антисимметричную часть. Затем проанализируем решение задачи отражения света от границы с кристаллами планальных классов средних сингоний для случая, когда оптическая ось кристалла лежит в плоскости падения. Этот случай проанализируем подробно, причем граничную задачу решим модифицированным методом с целью выяснения возможности измерений параметров гиротропии для кристаллов средних сингоний эллипсометрическим методом в отраженном свете.

### Распространение света в кристаллах с антисимметричной частью тензора гирации

Как известно, электромагнитное поле в среде без зарядов и токов описывается уравнениями Максвелла [1]:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \operatorname{div}\vec{B} = 0, \operatorname{div}\vec{D} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  – векторы напряженностей электрического и магнитного полей,  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  – векторы индукции тех же полей. Считаем, что в среде отсутствуют свободные электрические заряды и токи. Ограничимся далее решением уравнения Максвелла (1) в виде плоских гармонических волн, векторы поля и индукции которых пропорциональны  $\exp i(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}))$ , где  $\omega$  – круговая частота электромагнитного поля в среде;  $\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{n}$  – волновой вектор;  $v$  – фазовая скорость волны в среде;  $\vec{n}$  – единичный вектор волновой нормали.

Введем вектор рефракции [2; 3]

$$\vec{m} = N\vec{n} = \frac{c}{\omega} \vec{k}, \quad (2)$$

где  $N$  – показатель преломления среды. Тогда уравнения (1) с учетом (2) можно записать в форме [1; 2]:

$$\vec{D} = -[\vec{m}, \vec{H}], \vec{B} = [\vec{m}, \vec{E}], (\vec{m}, \vec{D}) = (\vec{m}, \vec{B}) = 0. \quad (3)$$

Уравнения (3) необходимо дополнить уравнениями связи и граничными условиями. Будем использовать уравнения связи [1]:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + i\alpha \vec{H}, \vec{B} = \mu \vec{H} - i\tilde{\alpha} \vec{E}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon, \mu$  – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости,  $\alpha$  – псевдотензор гирации (для краткости псевдотензор будем называть тензором),  $\tilde{\alpha}$  – тензор, полученный транспонированием тензора  $\alpha$ .

Выбранная система уравнений связи (4) имеет преимущества по сравнению с другими системами. Так, закон сохранения энергии соблюдается в обычной форме, а также не изменяются выражения для вектора плотности потока энергии и обычные граничные условия, т. е. они имеют вид [1; 2]:

$$[\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{q}] = 0, [\vec{H}_1 - \vec{H}_2, \vec{q}] = 0, (\vec{D}_1 - \vec{D}_2, \vec{q}) = 0, (\vec{B}_1 - \vec{B}_2, \vec{q}) = 0, \quad (5)$$

где  $\vec{q}$  – единичный вектор нормали к границе раздела двух сред, направленный из среды 1 в среду 2.

Уравнения Максвелла (3) и материальные уравнения (4) представляют собой полную систему уравнений.

Знание одного из векторов поля или индукции позволяет с помощью (3), (4) установить вид трех остальных.

Исключая из (3) и (4)  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$  (в оптическом диапазоне  $\mu=1$ ), приходим к уравнению для вектора магнитного поля собственных волн  $\vec{H}$  [1; 2]:

$$\left(1 - \tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\alpha + \vec{m}^{\times}\varepsilon^{-1}\vec{m}^{\times} + i\vec{\Gamma}^{\times}\right)\vec{H} = 0, \quad (6)$$

где  $\vec{\Gamma}$  – вектор гирации, который имеет вид [1; 2]

$$\vec{\Gamma} = \left(\text{Sp}(\tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}) - \varepsilon^{-1}\alpha\right)\vec{m}, \quad (7)$$

где  $\text{Sp}$  – означает след тензора,  $\vec{m}^{\times}$  – антисимметричный тензор, дуальный вектору рефракции  $\vec{m}$  [1; 2].

Из уравнения (6) следует уравнение нормалей для определения показателей преломления собственных волн [1; 2]

$$\left|1 - \tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\alpha + \vec{m}^{\times}\varepsilon^{-1}\vec{m}^{\times} + i\vec{\Gamma}^{\times}\right| = 0. \quad (8)$$

Для дальнейшего удобно получить общее решение уравнения (6). С этой целью разложим вектор  $\vec{H}$  следующим образом:

$$\vec{H} = a_1\vec{h}_+ + a_2\vec{h}_- + a_3\vec{n},$$

где  $\vec{h}_{\pm}$  – векторы поляризации собственных волн в кристалле (не обязательно единичные) в отсутствие гиротропии,  $\vec{n}$  – единичный вектор волновой нормали.

Фактически используемый нами подход представляет собой модификацию метода связанных волн [4], двух поперечных  $\vec{h}_+$ ,  $\vec{h}_-$  и продольной волны, распространяющейся вдоль  $\vec{n}$ .

Умножая (6) слева на  $\vec{h}_{\pm}$  и  $\vec{n}$ , получим систему однородных уравнений, из которых найдем поляризации  $\vec{h}_1$  и  $\vec{h}_2$  собственных волн гиротропного кристалла.

Если учесть, что  $(\vec{m}^{\times}\varepsilon^{-1}\vec{m}^{\times})\vec{h}_{\pm} = (n^2/n_{\pm}^2)(\vec{m}_{\pm}, \varepsilon^{-1}\vec{m}_{\pm})\vec{h}_{\pm} = -(n^2/n_{\pm}^2)\vec{h}_{\pm}$ ,  $n_{\pm}$  – показатели преломления для волн  $\vec{h}_{\pm}$ , то решение для  $\vec{h}_{1,2}$  удобно представить в виде:

$$\vec{h}_1 = \vec{h}_+ + \kappa_1\vec{h}_- + p_1\vec{n}, \quad \kappa_1 = \frac{g_{12} + \Gamma_1\Gamma_2 - i\Gamma_3}{(1 - g_{33})(1 - n^2/n_-^2)\vec{h}_-^2 - g_{22} - \Gamma_1^2}, \quad (9)$$

$$p_1 = i(\Gamma_2 - \kappa_1\Gamma_1),$$

$$\vec{h}_2 = \vec{h}_- + \kappa_2\vec{h}_+ + p_2\vec{n}, \quad \kappa_2 = \frac{g_{12} - \Gamma_1\Gamma_2 + i\Gamma_3}{(1 - g_{33})(1 - n^2/n_+^2)\vec{h}_+^2 - g_{11} - \Gamma_2^2}, \quad (10)$$

$$p_2 = -i(\Gamma_1 - \kappa_2\Gamma_2).$$

В выражениях (9), (10) отброшены члены с параметрами гиротропии степени выше второй [5] и введены обозначения (отметим, что для изонормальных волн  $[\vec{h}_+, \vec{h}_-] \parallel \vec{n}$ ):

$$g_{ik} = (\vec{h}_i, (\tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\alpha)\vec{h}_k), \quad g_{i3} = (\vec{h}_i, (\tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\alpha)\vec{n}),$$

$$i, k = 1, 2, \quad g_{33} = (\vec{n}, (\tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\alpha)\vec{n}), \quad (11)$$

$$\Gamma_1 = -\bar{\Gamma}[\vec{n}, \vec{h}_-], \quad \Gamma_2 = \bar{\Gamma}[\vec{n}, \vec{h}_+], \quad \Gamma_3 = \bar{\Gamma}[\vec{h}_+, \vec{h}_-].$$

Величины  $\kappa_{1,2}, p_{1,2}$  представляют собой параметры связи, невозмущенных за счет гиротропии решений уравнений Максвелла для волн  $\vec{h}_+, \vec{h}_-$  и продольной волны  $\vec{h} \parallel \vec{n}$ . Уравнение нормалей для определения показателей преломления сводится к виду  $\kappa_1 \cdot \kappa_2 = 1$ .

Векторы электрического поля найдем с помощью уравнений (3), (4)

$$\vec{e}_{1,2} = -\varepsilon^{-1}[\vec{m}, \vec{h}_{1,2}] - i\varepsilon^{-1}\alpha\vec{h}_{1,2}. \quad (12)$$

Подставляя сюда выражения (9), (10), получим:

$$\vec{e}_1 = (n/n_+) \vec{e}_+ + (n/n_-) \kappa_1 \vec{e}_- - i\varepsilon^{-1}\alpha\vec{h}_+, \quad \vec{e}_2 = (n/n_-) \vec{e}_- + (n/n_+) \kappa_2 \vec{e}_+ - i\varepsilon^{-1}\alpha\vec{h}_-,$$

$$\vec{e}_\pm = -\varepsilon^{-1}[\vec{m}_\pm, \vec{h}_\pm]. \quad (13)$$

При отсутствии гиротропии ( $\alpha = 0$ )  $\kappa_{1,2} = p_{1,2} = 0$  и  $\vec{h}_1 = \vec{h}_+, \vec{h}_2 = \vec{h}_-, n = n_+, \vec{h}_2 = \vec{h}_-, n = n_-$ . В прозрачных кристаллах ( $\vec{h}_\pm$  – линейные векторы) в направлениях, не совпадающих с направлением оптической оси, члены  $1 - n^2/n_\pm^2$  пропорциональны величине линейного двулучепреломления, т. е. много больше остальных членов, входящих в выражения (9), (10).

Поэтому поляризация изонормальных волн определяется значением «продольной» составляющей  $\Gamma_3$  вектора гирации ( $\sim \pm i\Gamma_3/(n_+^2 - n_-^2)$ ).

В направлении оптической оси  $1 - n^2/n_\pm^2 \sim \Gamma_3$ , поэтому в (9), (10) для определения поляризации изонормальных волн следует учитывать члены второго порядка малости [5]. Полученные выражения (9) и (10) общие и применимы к кристаллам всех сингоний.

Перейдем к рассмотрению кристаллов средних сингоний. В классах  $3m, 4mm, 6mm$  имеем

$$\varepsilon^{-1} = 1/\varepsilon_0 + (1/\varepsilon_e - 1/\varepsilon_0)(\vec{c}, \vec{c}), \quad \alpha = -\tilde{\alpha} = \alpha_0 \vec{c}^\times, \quad (14)$$

где  $\vec{c}$  – единичный вектор, направленный вдоль оптической оси кристалла,  $\vec{c}^\times$  – антисимметричный тензор, дуальный вектору  $\vec{c}$ ,  $\varepsilon_0 = n_0^2, \varepsilon_e = n_e^2, n_0, n_e$  – показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн.

Поляризация собственных волн в отсутствии гиротропии ( $\alpha = 0$ ) определяется выражениями [1; 2]:

$$\begin{aligned}\vec{h}_1 \rightarrow \vec{h}_+ = \vec{h}_e = \varepsilon_0 [\vec{m}_e, \vec{c}], \vec{e}_e = \varepsilon_0 \vec{c} - (\vec{m}_e, \vec{c}) \vec{m}_e, \\ \vec{h}_2 \rightarrow \vec{h}_- = \vec{h}_0 = [\vec{m}_0, [\vec{m}_0, \vec{c}]], \vec{e}_0 = [\vec{m}_0, \vec{c}],\end{aligned}\quad (15)$$

где  $m_0, m_e$  – векторы рефракции обыкновенной и необыкновенной волн.

Учитывая далее только члены не выше первого порядка малости, из выражений (9) – (11) найдем:

$$\begin{aligned}\vec{h}_1 = \varepsilon_0 [\vec{m}_e, \vec{c}], \vec{e}_1 = \varepsilon_0 \vec{c} - (\vec{m}_e, \vec{c}) \vec{m}_e - i\alpha_0 [\vec{c}, [\vec{m}_e, \vec{c}]], \\ \vec{h}_2 = [\vec{m}_0, [\vec{m}_0, \vec{c}]] - i \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} [\vec{m}_0, \vec{c}]^2 \vec{m}_0, \vec{e}_2 = \left(1 + i \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} (\vec{m}_0, \vec{c})\right) [\vec{m}_0, \vec{c}],\end{aligned}\quad (16)$$

причем в линейном по  $\alpha_0$  приближении  $n_{1,2} = n_{e,0}$ .

Таким образом, в волне с индексом «1» (назовем ее квазиобыкновенной) вектор магнитного поля описывает эллипс в плоскости, перпендикулярной направлению колебаний электрического вектора.

Во второй волне – квазиобыкновенной, наоборот, эллипс, перпендикулярный вектору магнитного поля, описывает электрический вектор волны.

В одноосных кристаллах классов 3, 4, 6 тензор  $\alpha$  имеет три независимых компоненты [1]  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 (\vec{c}, \vec{c}) + \alpha_0 \vec{c}^{\times}$ .

Поскольку в них  $\Gamma_3 = \varepsilon_0^2 [\vec{m}, \vec{c}]^2 (\gamma_1 - \gamma_2 (\vec{n}, \vec{c})^2)$ , где

$$\varepsilon_0 \gamma_1 = \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) \varepsilon_0 / \varepsilon_e, \quad \gamma_2 = \alpha_2 \varepsilon_e + \alpha_1 (\varepsilon_0 - \varepsilon_e) / (\varepsilon_0 \varepsilon_e),$$

то обычное эллиптическое двулучепреломление, обусловленное гиротропией, имеет место для всех направлений распространения, причем

$$\begin{aligned}\kappa_1 = -\frac{i\Gamma_3}{(1 - n_e^2/n_0^2) \vec{h}_e^2}, \quad p_1 = i\varepsilon_0 \gamma_2 n_e^2 (\vec{n}, \vec{c}) [\vec{n}, \vec{c}]^2, \\ \kappa_2 = -\frac{i\Gamma_3}{(1 - n_e^2/n_0^2) \vec{h}_0^2}, \quad p_2 = -i \frac{\alpha_0}{n_0} [\vec{m}_0, \vec{c}]^2.\end{aligned}\quad (17)$$

Таким образом, в квазиобыкновенной волне, если  $\vec{n}$  и  $\vec{c}$  не ортогональны, всегда имеется составляющая магнитного поля вдоль направления распространения, тогда как в квазиобыкновенной волне такая составляющая появляется только при наличии несимметричной части тензора  $\alpha$ .

Рассмотрим теперь кристаллы низших сингоний. Введем правую тройку ортов  $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$ , совпадающую с главными осями тензора  $\varepsilon$ .

Считаем, что орт  $\vec{U}_3$  направлен вдоль кристаллографической оси  $z$  кристалла. Для кристаллов класса  $mm2$  тензор  $\alpha$  имеет вид [1]:

$$\alpha = \alpha_1 \left( (\vec{U}_1, \vec{U}_2) + (\vec{U}_2, \vec{U}_1) \right) + \alpha_0 \vec{U}_3^{\times}.$$

Поскольку  $\Gamma_3 \sim \bar{n}\bar{\Gamma} \sim (\bar{n}, \vec{U}_1)(\bar{n}, \vec{U}_2)$ , то при распространении света в плоскостях симметрии кристалла, перпендикулярных  $\vec{U}_1$  или  $\vec{U}_2$ , вращение плоскости поляризации невозможно (включая и направления оптических осей).

Известно, что при отсутствии гиротропии собственные волны распространяются в плоскостях, перпендикулярных векторам  $\vec{U}_1$ ,  $\vec{U}_2$ ,  $\vec{U}_3$ , полностью аналогичны обыкновенной и необыкновенной волнам в одноосных кристаллах [6]. Так для  $\bar{n}$ , лежащих в плоскости, ортогональной вектору  $\vec{U}_1$ , имеем:

$$\bar{h}_+ = \bar{h}_e = \vec{U}_1 \parallel [\bar{m}_e, \vec{U}_3], \quad \bar{h}_- = \bar{h}_o = [\bar{n}, \vec{U}_2] \parallel [\bar{m}_o, [\bar{m}_o, \vec{U}_3]], \quad (18)$$

$$n_+^2 = n_e^2 = \varepsilon_2 \varepsilon_3 / \left( \varepsilon_2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\bar{n}, \vec{U}_3)^2 \right), \quad n_-^2 = \varepsilon_1.$$

После несложных вычислений находим:

$$\bar{h}_1 = \vec{U}_1, \quad \bar{e}_1 = \frac{1}{\varepsilon_3}(\bar{m}, \vec{U}_2)\vec{U}_3 - \frac{1}{\varepsilon_2}(\bar{m}, \vec{U}_3)\vec{U}_2 - i \frac{(\alpha_0 + \alpha_1)\vec{U}_2}{\varepsilon_2}, \quad (19)$$

$$\bar{h}_2 = [\bar{n}, \vec{U}_1] - i \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\varepsilon_e}(\bar{m}, \vec{U}_2)\bar{n}, \quad \bar{e}_2 = \frac{n}{\varepsilon_1} \left( 1 - i(\alpha_0 + \alpha_1)(\bar{m}, \vec{U}_3) \right) \vec{U}_1.$$

В случае, когда свет распространяется в плоскости, ортогональной вектору  $\vec{U}_2$ :

$$\bar{h}_1 = \vec{U}_2, \quad \bar{e}_1 = \frac{1}{\varepsilon_3}(\bar{m}, \vec{U}_1)\vec{U}_3 - \frac{1}{\varepsilon_1}(\bar{m}, \vec{U}_3)\vec{U}_1 + i \frac{(\alpha_0 - \alpha_1)\vec{U}_1}{\varepsilon_1}, \quad (20)$$

$$\bar{h}_2 = [\bar{n}, \vec{U}_2] - i \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{\varepsilon_1}(\bar{m}, \vec{U}_1)\bar{n}, \quad \bar{e}_2 = \frac{n}{\varepsilon_2} \left( 1 + i(\alpha_0 + \alpha_1)(\bar{m}, \vec{U}_3) \right) \vec{U}_2.$$

Следовательно, поведение векторов поля в волне аналогично их поведению в случае планальных классов одноосных кристаллов.

Однако есть и отличие, которое заключается в том, что в кристаллах класса *mm2* имеется две гириационные постоянные –  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ . Поэтому, если  $\alpha_0 \sim \alpha_1$ , то, как следует из (19), (20), частично происходит компенсация влияния одной и второй постоянных на поляризацию волн в кристалле.

В кристаллах класса *m* тензор  $\alpha$  имеет четыре независимых параметра, которые удобно представить в виде компонент двумерных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  [1]:  $\left( (\vec{a}, \vec{U}_3) = (\vec{b}, \vec{U}_3) = 0 \right)$   $\alpha = (\vec{b}, \vec{U}_3) + (\vec{U}_3, \vec{b}) + \vec{a}^\times$ . Вычисляя  $\Gamma_3$ , найдем

$$\Gamma_3 \sim (\bar{n}, \bar{\Gamma}) = (\bar{n}, \vec{U}_3)(\vec{R}, \bar{n}), \quad (21)$$

где вектор  $\vec{R}$  лежит в плоскости, ортогональной  $\vec{U}_3$ , и имеет вид:

$$\vec{R} = \left( \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) (\vec{b}, \vec{U}_1) - \left( \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) (\vec{a}, \vec{U}_2) \right) \vec{U}_1 + \left( \left( \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) (\vec{b}, \vec{U}_2) + \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) (\vec{a}, \vec{U}_1) \right) \vec{U}_2. \quad (22)$$

Следовательно, при распространении света в плоскости, ортогональной вектору  $\vec{R}$  или вектору  $\vec{U}_3$ , обычное эллиптическое двулучепреломление отсутствует.

В последнем случае поляризация векторов поля определяется соотношениями:

$$\vec{h}_1 = \vec{U}_3, \quad \vec{e}_1 = \frac{(\vec{m}_e, \vec{U}_1)}{\varepsilon_2} \vec{U}_2 - \frac{(\vec{m}_e, \vec{U}_2)}{\varepsilon_1} \vec{U}_1 - i\vec{E}, \quad (23)$$

$$\vec{h}_2 = [\vec{n}, \vec{U}_3] - i\Gamma\vec{n}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{n_0} \left( 1 - \frac{i}{\varepsilon_3} \left( (\vec{b}, [\vec{m}_0, \vec{U}_3]) + (\vec{a}, \vec{m}_0) \right) \right) \vec{U}_3,$$

$$n_0 = \sqrt{\varepsilon_3}, \quad n_e^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 / \left( \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) (\vec{n}, \vec{U}_2)^2 \right),$$

$$\Gamma_3 = \frac{1}{\varepsilon_2} \left( -(\vec{a}, \vec{U}_1) - (\vec{b}, \vec{U}_2) \right) (\vec{m}, \vec{U}_2) + \frac{1}{\varepsilon_1} \left( (\vec{a}, \vec{U}_2) + (\vec{b}, \vec{U}_1) \right) (\vec{m}, \vec{U}_1), \quad (24)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_1} \left( (\vec{b}, \vec{U}_1) - (\vec{a}, \vec{U}_2) \right) \vec{U}_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \left( (\vec{b}, \vec{U}_2) + (\vec{a}, \vec{U}_1) \right) \vec{U}_2.$$

Наконец, в классе 1 тензор  $\alpha$  имеет 9 компонент, а соответствующие соотношения становятся весьма громоздкими, поэтому анализ этого случая возможен с привлечением численных методов.

### Отражение света от границы с кристаллами планальных классов средних сингоний

Рассмотрим граничную задачу для главной плоскости падения с учетом материальных уравнений (4):

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + i\alpha \vec{H}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} - i\tilde{\alpha} \vec{E},$$

где  $\varepsilon$ ,  $\mu$  – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости,  $\tilde{\alpha}$  – тензор, полученный транспонированием тензора  $\alpha$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  – векторы напряженностей электрического и магнитных полей,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  – векторы индукции тех же полей [1; 7]. Для кристаллов планальных классов средних сингоний тензор гирации имеет вид (14)

$$\varepsilon^{-1} = 1/\varepsilon_0 + (1/\varepsilon_e - 1/\varepsilon_0) (\vec{c}, \vec{c}), \quad \alpha = -\tilde{\alpha} = \alpha_0 \vec{c}^\times,$$

где  $\vec{c}$  – единичный вектор, направленный вдоль оптической оси кристалла,  $\vec{c}^\times$  – антисимметричный тензор, дуальный вектору  $\vec{c}$ ,  $\varepsilon_0 = n_0^2$ , где  $n_0$  – показатели преломления квазиобыкновенной волны,  $\varepsilon_e = n_e^2$ , где  $n_e$  – показатели преломления квазиобыкновенной волны [1,7].

Поле в граничащей с кристаллом среде, которую считаем изотропной, разложим на  $s$  и  $p$  – составляющие:

$$\vec{E} = A_s \vec{a} + A_p [\vec{n}, \vec{a}], \quad \vec{H} = [\vec{m}, \vec{E}], \quad (25)$$

где  $\vec{m} = n\vec{n}$  – вектор рефракции,  $n$  – показатель преломления среды, из которой падает волна,  $\vec{n}$  – волновая нормаль,  $\vec{a} = [\vec{m}, \vec{q}]$ ,  $\vec{q}$  – нормаль к границе раздела двух сред,  $\vec{b} = [\vec{q}, \vec{a}]$  (рисунок 1) [8].

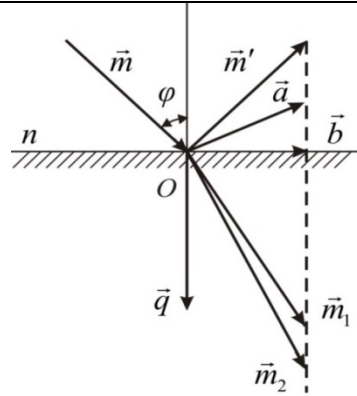


Рисунок 1 – Преломление и отражение света на границе изотропная среда – кристалл

В кристалле распространяются две собственные волны, поляризация которых оказывается специфической.

Вектор магнитного поля в квазиобыкновенной волне  $\vec{h}_0$  и вектор электрического поля в квазинеобыкновенной волне  $\vec{e}_e$  описывают эллипсы в главной плоскости падения

$$\vec{h}_1 \rightarrow \vec{h}_+ = \vec{h}_e = \varepsilon_0 [\vec{m}_e, \vec{c}], \quad \vec{e}_e = \varepsilon_0 \vec{c} - (\vec{m}_e, \vec{c}) \vec{m}_e, \quad \vec{h}_2 \rightarrow \vec{h}_- = \vec{h}_0 = [\vec{m}_0, [\vec{m}_0, \vec{c}]], \quad \vec{e}_0 = [\vec{m}_0, \vec{c}], \quad (26)$$

а их тангенциальные составляющие имеют вид:

$$\begin{aligned} r_0 &= (\vec{h}_0, \vec{b}) = \eta_0 \left( \xi (\vec{q}, \vec{c}) - \eta_0 (\vec{b}, \vec{c}) \right) - \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} \xi [\vec{m}_0, \vec{c}]^2, \\ l_0 &= (\vec{l}_0, \vec{a}) = \left( 1 + i \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} (\vec{m}_0, \vec{c}) \right) (\vec{a}, [\vec{m}_0, \vec{c}]), \\ r_e &= (\vec{h}_e, \vec{a}) = \varepsilon_0 \left( \xi (\vec{q}, \vec{c}) - \eta_e (\vec{b}, \vec{c}) \right) = \varepsilon_0 (\vec{a}, [\vec{m}_e, \vec{c}]), \\ l_e &= (\vec{l}_e, \vec{b}) = \varepsilon_0 (\vec{b}, \vec{c}) - \xi (\vec{m}_e, \vec{c}) - i \alpha_0 \left( \xi - (\vec{m}_e, \vec{c}) (\vec{b}, \vec{c}) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь  $\xi = n \sin \varphi$ ,  $\varphi$  – угол падения,  $n$  – показатель преломления окружающей среды,  $\vec{m}_{0,e} = \xi \vec{b} + \eta_{0,e} \vec{q}$  – векторы рефракции волн в кристалле,  $\vec{n}$  – вектор волновой нормали падающей волны,  $\vec{a} = [\vec{m}, \vec{q}]$ ,  $\vec{b} = [\vec{q}, \vec{a}]$  – единичные векторы (рисунок 1).

Рассмотрим отражение в главной плоскости падения для двух случаев.

а) Волна падает из изотропной среды на кристалл. Решая граничную задачу для амплитуд отраженной ( $A'_s, A'_p$ ) и преломленных ( $A_0, A_e$ ) волн, получим

$$A'_s = \frac{\eta l_0 - r_0}{\eta l_0 + r_0} A_s, \quad A'_p = \frac{\eta r_e + n^2 l_e}{\eta r_e - n^2 l_e}, \quad (28)$$

$$A_0 = \frac{2\eta}{\eta l_0 + r_0} A_s, \quad A_e = \frac{2\eta}{n(\eta r_e - n^2 l_e)}, \quad (29)$$

где  $\eta = n \cos \varphi$ .

Упростим полученные выражения, учитывая, что для  $\eta_e$  справедливо выражение [1; 6]:

$$\eta_e = \frac{1}{(\vec{q}, \varepsilon \vec{q})} \left( R - (\vec{b}, \varepsilon \vec{q}) \right), \quad R = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e \left( (\vec{q}, \varepsilon \vec{q}) - \xi^2 \right)},$$

поэтому

$$(\eta r_e \pm n^2 l_e) = (\varepsilon_0 \varepsilon_e \eta \mp n^2 (R + i \alpha_0 \varepsilon_e (\vec{q}, \vec{c}))) (r_e / \varepsilon_0 \varepsilon_e).$$

Выражения для амплитудных коэффициентов отражения  $r_s = A'_s / A_s$  и  $r_p = A'_p / A_p$  можно привести к виду:

$$r_s = \frac{\varepsilon_0 (\eta - \eta_0) + i \alpha_0 \left( \xi (\eta + \eta_0) (\vec{b}, \vec{c}) + (\eta \eta_0 - \xi^2) (\vec{q}, \vec{c}) \right)}{\varepsilon_0 (\eta + \eta_0) - i \alpha_0 \left( \xi (\eta - \eta_0) (\vec{b}, \vec{c}) + (\eta \eta_0 - \xi^2) (\vec{q}, \vec{c}) \right)}, \quad (30)$$

$$r_p = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_e \eta - n^2 R - i \alpha_0 n^2 \varepsilon_e (\vec{q}, \vec{c})}{\varepsilon_0 \varepsilon_e \eta + n^2 R + i \alpha_0 n^2 \varepsilon_e (\vec{q}, \vec{c})}. \quad (31)$$

б) Волна падет из кристалла на границу с изотропной средой. В случае падения квазиобыкновенной волны ( $\eta_0 = n_0 \cos \varphi$ ,  $\xi = n \sin \varphi$ ):

$$A'_0 = \frac{\eta l_0 - r_0}{\eta l'_0 - r'_0} A_0, \quad A_s = \frac{r_0 l'_0 - r'_0 l_0}{\eta l'_0 + r'_0} A_0. \quad (32)$$

Здесь штрихами отмечены величины, относящиеся к отраженной волне. Если на границу падает квазиобыкновенная волна

$$\left( \eta_e = n_e \cos \varphi, \eta'_e = - \left( \eta_e + 2 \xi (\vec{b}, \varepsilon \vec{q}) / (\vec{q}, \varepsilon \vec{q}) \right) \right),$$

то решение граничной задачи имеет вид:

$$A'_e = - \frac{\eta r_e + n^2 l_e}{\eta r'_e + n^2 l'_e} A_e, \quad A_p = \frac{n (r'_e l_e - r_e l'_e)}{\eta r'_e + n^2 l'_e} A_e. \quad (33)$$

Для коэффициентов отражения  $R_0 = A'_0 / A_0$  и  $R_e = A'_e / A_e$  имеем:

$$R_0 = \frac{\vec{a} [\vec{m}_0, \vec{c}] \left[ (\eta_0 - \eta) - i \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} \left( \xi (\eta_0 - \eta) (\vec{b}, \vec{c}) + (\xi^2 + \eta \eta_0) (\vec{q}, \vec{c}) \right) \right]}{\vec{a} [\vec{m}'_0, \vec{c}] \left[ (\eta_0 - \eta) + i \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} \left( \xi (\eta_0 + \eta) (\vec{b}, \vec{c}) + (\xi^2 - \eta \eta_0) (\vec{q}, \vec{c}) \right) \right]}, \quad (34)$$

$$R_e = \frac{r_e}{r'_e} \cdot \frac{-\varepsilon_0 \varepsilon_e \eta + n^2 R + i \alpha_0 n^2 \varepsilon_e (\vec{q}, \vec{c})}{\varepsilon_0 \varepsilon_e \eta + n^2 R - i \alpha_0 n^2 \varepsilon_e (\vec{q}, \vec{c})}.$$

Случай, когда оптическая ось  $\vec{c}$  перпендикулярна плоскости падения ( $\vec{c} \parallel \vec{a}$ ), рассмотрен в [9]:

$$A'_s = \frac{\eta - \eta_e}{\eta + \eta_e} A_s + \frac{2i \alpha_0 n \xi \eta}{(\eta + \eta_e) (\varepsilon_0 \eta + n^2 \eta_0)} A_p, \quad (35)$$

$$A'_p = \frac{2i \alpha_0 n \xi \eta}{(\eta + \eta_e) (\varepsilon_0 \eta + n^2 \eta_0)} A_s + \frac{\varepsilon_0 \eta - n^2 \eta_0}{\varepsilon_0 \eta + n^2 \eta_0} A_p. \quad (36)$$

Проанализируем влияние гиротропии на характеристики света, отраженного кристаллом. Как следует из (30), (31), (35), (36), при падении на кристалл линейно поляризованного света отраженный свет оказывается поляризованным эллиптически, причем эллиптичность  $k \sim \text{Im } \omega \sim \alpha_0 / (\eta - \eta_0)$  ( $\omega = A'_p / A'_s$ ). Таким образом, для обеих ориентаций кристалла при  $n^2 \rightarrow \varepsilon_0$  эллиптичность отраженного света увеличивается.

Однако если при ориентации оптической оси перпендикулярно плоскости падения, отраженная волна поляризована эллиптически при любых вещественных  $A_p$  и  $A_s$ , то в случае главной плоскости падения при  $A_p$  или  $A_s$  коэффициент равен нулю, отраженная волна будет поляризована линейно.

Гиротропия кристаллов планальных классов проявляется также в различных сдвигах фаз  $s$ - и  $p$ -компонент отраженного света относительно  $s$ - и  $p$ -компонент падающего. Для главной плоскости падения сдвиги фаз  $\delta_s$  и  $\delta_p$  определяются выражениями:

$$\text{tg } \delta_s = \frac{\text{Im } r_s}{\text{Re } r_s} = \frac{2\alpha_0 \left( (\eta^2 + \eta_0^2) \xi(\vec{b}, \vec{c}) + \eta_0 (\eta^2 - \xi^2) (\vec{q}, \vec{c}) \right)}{\varepsilon_0 (\eta^2 - \eta_0^2)}, \quad (37)$$

$$\text{tg } \delta_p = \frac{\text{Im } r_p}{\text{Re } r_p} = \frac{2\alpha_0 \eta n^2 \varepsilon_0 \varepsilon_e^2 (\vec{q}, \vec{c})}{n^4 R^2 - \varepsilon_0^2 \varepsilon_e^2 \eta^2}. \quad (38)$$

Если кристалл не обладает гиротропией, то до угла Брюстера  $\Delta = \delta_p - \delta_s = 0$ , а при угле Брюстера происходит скачок фаз, равный  $-\pi$ . Из полученных выражений видно, что при отражении от гиротропных кристаллов сдвиг фаз  $s$ - и  $p$ -компонент происходит при любых углах падения, причем особенно он заметен вблизи угла Брюстера. По мере приближения показателя преломления окружающей среды к показателю преломления кристалла (точнее, при  $\eta \rightarrow \eta_0$  или при  $n^4 R^2 \rightarrow \varepsilon_0^2 \varepsilon_e^2 \eta^2$ ) изменение сдвига фазы  $\Delta$  увеличивается и может достигать значительной величины.

Зависимость сдвига фаз  $\Delta$  от угла падения  $\varphi$  показана на рисунке 2 для двух значений показателей преломления окружающей среды.

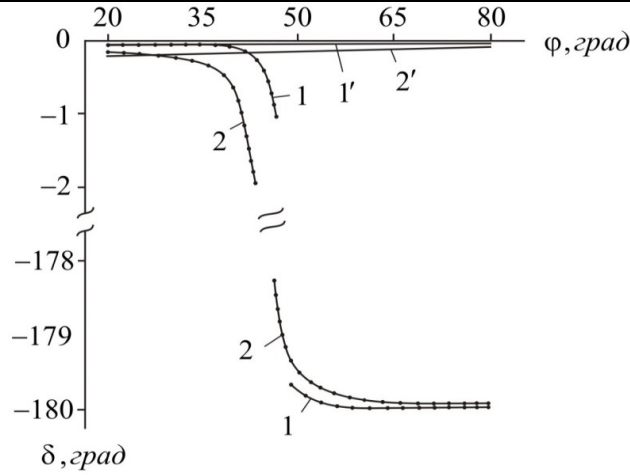
Аналогичные зависимости  $\Delta$  характерны и для случая, когда оптическая ось кристалла перпендикулярна плоскости падения. Сказанное остается справедливым также при падении света из кристалла на границу с изотропной средой.

Таким образом, гиротропия кристаллов планальных классов средних сингоний проявляется не только в эллиптичности отраженного света, но и в дополнительном скачке фаз отраженных волн, особенно заметном вблизи угла Брюстера.

Гиротропия таких кристаллов проявляется тем заметнее, чем ближе показатель преломления окружающей среды к показателям преломления кристалла.

Все приведенные расчеты верны для идеальной поверхности кристалла. Но следует иметь в виду, что переходный слой может оказывать влияние как на эллиптичность отраженного света, так и на скачки фаз [4; 5].

Влияние переходного слоя и гиротропии не одинаково, но этот вопрос требует специального рассмотрения. С этой целью далее проанализируем коэффициенты отражения от гиротропного кристалла, на поверхности которого находится тонкий аморфизированный слабопоглощающий слой.



**Рисунок 2 – Зависимость сдвига фаз  $\delta$   $S$  и  $P$ -компонент от угла падения  $\varphi$ .  
Для кристалла  $n_o = 1,7643$ ,  $n_e = 1,7655$ ; для окружающей среды  $n = 1,6$  (1,1'),  
 $n = 1,72$  (2,2'); 1', 2' –  $S$ -компонента, 1, 2 –  $P$ -компонента**

**Проявление гиротропии при отражении света от одноосных кристаллов**

Теперь рассмотрим вклад различных членов тензора гирации для случая отражения в главной плоскости падения [7]. Поэтому получим вначале выражения для векторов поля собственных волн в гиротропных одноосных кристаллах. Обозначим через  $\vec{m}$ ,  $\vec{m}_{1,2}$  векторы рефракции соответственно падающей и преломленных волн (при отсутствии гиротропии  $\vec{m}_1 \rightarrow \vec{m}_e$ ,  $\vec{m}_2 \rightarrow \vec{m}_o$ ,  $\vec{m}_e, \vec{m}_o$  – векторы рефракции необыкновенной и обыкновенной волн),  $\xi \vec{a} = [\vec{m}, \vec{q}]$ ,  $\xi = n \sin \varphi$ ,  $\varphi$  – угол падения,  $n$  – показатель преломления изотропной среды, граничащей с кристаллом, причем:

$$\vec{m}_i = \xi \vec{b} + \eta_i \vec{q} \quad (i=1,2), \quad \vec{m}_{0,e} = \xi \vec{b} + \eta_{0,e} \vec{q}. \tag{39}$$

Величины  $\eta_{0,e}$  вычисляются по известным соотношениям и являются нулевым приближением для расчета  $\eta_{1,2}$ , которые находятся из решения полного уравнения четвертой степени (формула (22.48) [1]). При наличии гиротропии в каждом направлении в кристалле распространяются эллиптически поляризованные волны с векторами магнитного поля  $\vec{h}_{1,2}$ , в которых  $o$  и  $e$  – волны связаны через параметры:

$$\begin{aligned} \vec{h}_1 &= \vec{h}_{e_1} + i\kappa_1 \vec{h}_{o_1} + ip_1 \vec{m}_1, \\ \vec{h}_2 &= \vec{h}_{o_2} + i\kappa_2 \vec{h}_{e_2} + ip_2 \vec{m}_2, \end{aligned} \tag{40}$$

причем появляется мнимая составляющая векторов магнитного поля по направлению волновой нормали. В (40) сразу учтено, что волны 1 и 2 при преломлении распространяются в различных направлениях, поэтому  $\vec{h}_{e_i}$  и  $\vec{h}_{o_i}$ , из которых комбинируются решения  $h_i, i=1,2$  (так же, как и векторы электрического поля  $\vec{e}_{o_i}, \vec{e}_{e_i}$ ), для них различны. В главной плоскости одноосного кристалла  $\vec{h}_{e_i} = \vec{e}_{o_i} = \vec{a}$ ,  $\vec{h}_{o_i} = [\vec{m}_{0_i}, \vec{a}]$ , причем при вычислении  $\vec{h}_{0_i}, \vec{m}_{0_i} = \sqrt{\epsilon_0} \vec{n}_i$ , где  $\vec{n}_i$  – фазовая нормаль волны 1.

При вычислении  $\vec{h}_{0_2}, \vec{m}_{0_2} = \sqrt{\epsilon_0} \vec{n}_2$ .

Наконец,  $\vec{e}_i = -\varepsilon^{-1} [\vec{m}_i, \vec{a}] = -\left( (1/\varepsilon_0) [\vec{m}_i, \vec{a}] - \beta (\vec{a}, [\vec{m}_0, \vec{c}]) \vec{c} \right)$ , где  $\beta = 1/\varepsilon_e - 1/\varepsilon_0$ .

Учтем, что для одноосных кристаллов тензор гирации имеет вид [1]

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 (\vec{c}, \vec{c}) + \alpha_0 \vec{c}^\times, \quad (41)$$

где  $\vec{c}^\times$  – антисимметричный тензор, дуальный вектору  $\vec{c}$ .

Для векторов электрического поля  $\vec{e}_{1,2}$  из уравнений Максвелла (3):

$$\begin{aligned} \vec{D} &= -[\vec{m}, \vec{H}], \quad \vec{B} = [\vec{m}, \vec{E}], \\ (\vec{m}, \vec{D}) &= (\vec{m}, \vec{B}) = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

и выражений (39) – (41) получаем:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{n_1}{\varepsilon_0 n_e} [\vec{m}_1, \vec{a}] - \beta \frac{n_1}{n_e} (\vec{a}, [\vec{m}_1, \vec{c}]) \vec{c} - i\varepsilon^{-1} \alpha \vec{a}, \\ \vec{e}_2 &= \frac{n_2^2}{\varepsilon_0} \vec{a} - ik_2 \frac{n_2}{n_0} \left( \frac{1}{\varepsilon_0} [\vec{m}_2, \vec{a}] - \beta (\vec{a}, [\vec{m}_2, \vec{c}]) \vec{c} \right) - i\varepsilon^{-1} \alpha [\vec{m}_0, \vec{a}], \end{aligned} \quad (43)$$

где  $\varepsilon^{-1}$  – тензор, обратный тензору диэлектрической проницаемости кристалла, а параметры  $b_i$  и  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ) имеют вид:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{n_1^2 (g_1 - g_2 (\vec{n}, \vec{c})_1^2)}{\varepsilon_0 - n_1^2 - \varepsilon_0 \delta_1 - \delta_2 (\vec{a}, [\vec{m}_0, \vec{c}])^2}, \\ \kappa_2 &= -\frac{n_2^2 n_e^2 (g_1 - g_2 (\vec{n}, \vec{c})_2^2)}{n_2^2 - n_e^2 + n_e^2 \delta_1}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= g_2 (\vec{n}_1, \vec{c}) (\vec{a}, [\vec{n}_1, \vec{c}]) - k_1 \frac{\alpha_0}{n_0} (\vec{a}, [\vec{n}_1, \vec{c}]), \\ p_2 &= -\frac{\alpha_0}{n_0} (\vec{a}, [\vec{n}_2, \vec{c}]) + k_2 g_2 (\vec{n}_2, \vec{c}) (\vec{a}, [\vec{n}_2, \vec{c}]), \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\alpha_1}{\varepsilon_0} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\varepsilon_e}, \quad g_2 = g_1 - \frac{2\alpha_1}{\varepsilon_0}, \\ \delta_1 &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\alpha_1^2 + \alpha_0^2), \quad \delta_2 = \frac{1}{\varepsilon_e} (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - \delta_1. \end{aligned}$$

При вычислении  $k_{1,2}$  (так же, как и  $\eta_{1,2}$ ) следует удерживать члены второго порядка малости [5], поскольку, как видно из (44), в направлениях, близких к оптической оси  $\varepsilon_0 - n_1^2 \sim n_2^2 - n_e^2 \sim \alpha_i$  ( $\alpha_i$  члены порядка параметров гирации  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ).

При отражении линейно  $p$ - или  $s$ -поляризованного света возникает соответственно  $s$ - и  $p$ -компоненты, которые описываются недиагональными компонентами матрицы отражения

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}, \quad r_{12} \neq r_{21}. \quad (46)$$

При наличии гиротропии все компоненты матрицы  $R$  в общем случае комплексны:  $r_{ik} = |r_{ik}| e^{i\delta_{ik}}$ , где

$$|r_{ik}| = \sqrt{\operatorname{Re}(r_{ik})^2 + \operatorname{Im}(r_{ik})^2}, \quad \operatorname{tg} \delta_{ik} = \operatorname{Im}(r_{ik}) / \operatorname{Re}(r_{ik}).$$

Коэффициенты  $R$  имеют вид

$$\begin{cases} r_{11} = (\alpha_2^- \beta_1^- - \alpha_1^- \beta_2^-) / 3, \\ r_{22} = (\alpha_2^+ \beta_1^+ - \alpha_1^+ \beta_2^+) / 3, \\ r_{12} = 2n\eta(a_2 d_1 - a_1 d_2) / 3, \\ r_{21} = 2n\eta(b_1 c_2 - b_2 c_1) / 3, \\ 3 = \alpha_1^+ \beta_2^- - \alpha_2^+ \beta_1^-, \end{cases} \quad (47)$$

где

$$\alpha_{1,2} = \eta a_{1,2} + \alpha_{1,2}, \quad \beta_{1,2} = \varepsilon b_{1,2} - \eta c_{1,2}, \quad \alpha_{1,2}^\pm = \alpha_{1,2} \pm \eta a_{1,2}, \quad \beta_{1,2}^\pm = \varepsilon \beta_{1,2} \pm \eta c_{1,2},$$

$$a_1 = \frac{n_1}{n_0} \kappa_1 - i \frac{\alpha_1}{\varepsilon_0}, \quad a_2 = \frac{n_2}{n_0} + i \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} (\xi \sin \theta + \eta_{0_2} \cos \theta),$$

$$b_1 = - \left( \frac{\eta_1}{\varepsilon_e} - \beta (\xi \cos \theta - \eta_2 \sin \theta) \sin \theta \right) - i \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} \cos \theta,$$

$$b_2 = - \left( \frac{\eta_2}{\varepsilon_e} - \beta (\xi \cos \theta - \eta_2 \sin \theta) \sin \theta \right) (\kappa_2 + i \alpha_1) + i \frac{\alpha_2}{\varepsilon_e} (\xi \cos \theta - \eta_2 \sin \theta) \sin \theta,$$

$$e_1 = 1, \quad c_2 = \kappa_2, \quad d_1 = \kappa_1 \eta_{0_1} + i p_1 \xi, \quad d_2 = \eta_{0_2} + i p_2 \xi, \quad \eta_{0_{1,2}} = \frac{n_0 \eta_{1,2}}{\sqrt{\xi^2 + \eta_{1,2}^2}},$$

$$\kappa_1 = -i \frac{\varepsilon_0 n_1^2 (\gamma_1 - \gamma_2 (\bar{n}, \bar{c})_1^2)}{n_0 n_1 (\varepsilon_0 - n_1^2 - g_{22})}, \quad \kappa_2 = -i \frac{n_0 n_2 (\gamma_1 - \gamma_2 (\bar{n}, \bar{c})_2^2) n_{e_2}^2}{n_2^2 - n_{e_2}^2 + n_{e_2}^2 \delta_1},$$

$$p_1 = \gamma_2 (\bar{n}, \bar{c})_1 (\xi \cos \theta - \eta_1 \sin \theta) / n_1 - \kappa_1 \frac{\alpha_0}{n_1 n_0} (\xi \cos \theta - \eta_1 \sin \theta),$$

$$p_2 = - \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} (\xi \cos \theta - \eta_2 \sin \theta) + \kappa_2 \gamma_2 \frac{(\bar{n}, \bar{c})_2 n_2}{\varepsilon_0} (\xi \cos \theta - \eta_2 \sin \theta),$$

$$g_{22} = \varepsilon_0 \delta_1 + \delta_2 (\xi \cos \theta - \eta_{0_1} \sin \theta)^2, \quad \delta_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} (\alpha_1^2 + \alpha_0^2), \quad \delta_2 = \frac{1}{\varepsilon_e} (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - \delta_1,$$

$$(\bar{n}, \bar{c})_{1,2} = \frac{\xi \sin \theta + \eta_{1,2} \cos \theta}{\sqrt{\xi^2 + \eta_{1,2}^2}}, \quad n_{1,2} = \sqrt{\xi^2 + \eta_{1,2}^2},$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\varepsilon_e}, \quad \gamma_2 = \alpha_1 \beta + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_e} = \gamma_1 - 2 \frac{\alpha_1}{\varepsilon_0},$$

$$\beta = 1/\varepsilon_e - 1/\varepsilon_0, \quad \xi = n \sin \varphi, \quad \eta = n \cos \varphi, \quad \varepsilon_0 = n_0^2, \quad \varepsilon_e = n_e^2,$$

где  $n$  – показатель преломления среды, из которой падает волна,  $\varphi$  – угол падения,  $\theta$  – угол между направлением волновой нормали  $\vec{n}$  и оптической оси  $\vec{c}$ ,  $\eta_1, \eta_2$ , как указывалось выше, находятся из решения полного уравнения четвертой степени (формула (22.48) [1]).

Эти выражения анализировались численно для кристалла кварца ( $\alpha_1 = -3,54 \cdot 10^{-5}$ ,  $\alpha_2 = 10,84 \cdot 10^{-5}$  [10],  $\alpha_0$  полагалось равным  $10^{-5}$ ). Результаты анализа представлены в виде зависимости модулей  $|r_{12}|$  и  $|r_{21}|$  от угла падения  $\varphi$  (рисунки 3, 4).

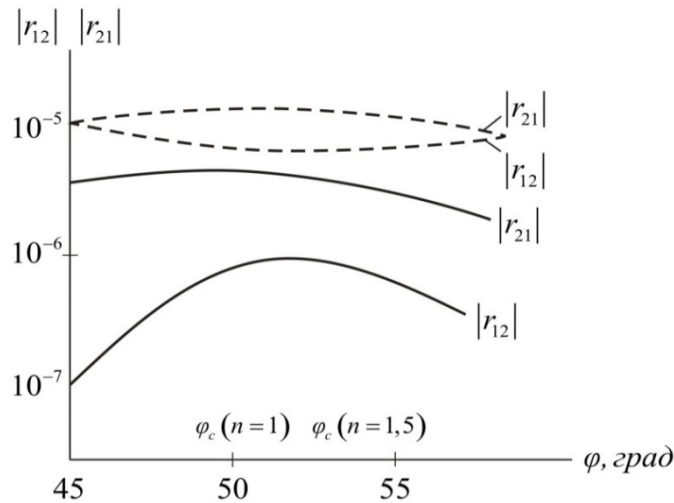


Рисунок 3 ——— зависимость  $|r_{12}|$  и  $|r_{21}|$  от угла падения  $\varphi$  для кварца при  $\alpha_0 = 0$  ( $n = 1$ ,  $n_o = 1,554246$ ,  $n_e = 1,553355$ ),  $\varphi_c$  – угол падения при котором преломленная волна в отсутствие гиротропии выходит на оптическую ось. - - - - - то же при  $n = 1,5$

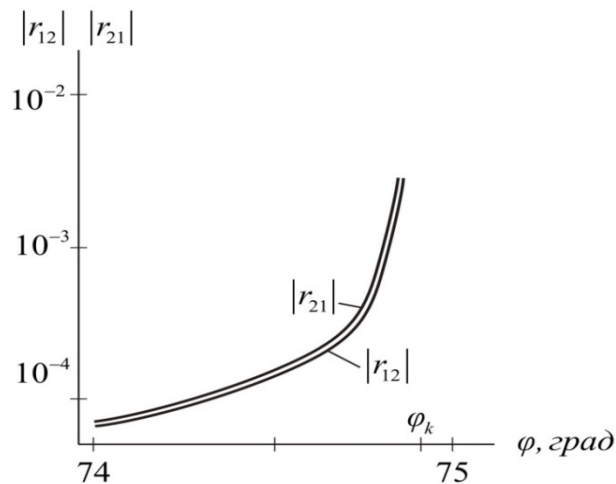


Рисунок 4 – зависимость  $|r_{12}|$  и  $|r_{21}|$  от угла падения  $\varphi$ .  
Для кварца  $n = 1,6$ ,  $n_o = 1,554246$ ,  $n_e = 1,553355$

Наличие гиротропии, описываемой в (41) членом  $\alpha_0 \vec{c}^x$  (называемой иногда «планальной» гиротропией), не приводит к вращению плоскости поляризации и не дает вклада в недиагональные компоненты матрицы  $R$ . Диагональные компо-

ненты  $r_{11}$  и  $r_{22}$  содержит мнимые добавки  $\sim \alpha_0$ . Для главной плоскости падения наличие этого члена проявляется таким же образом, как и малое поглощение, т. е. в дополнительном скачке фаз особенно заметном вблизи псевдобрюстеровского угла падения.

Как следует из рисунков 3 и 4, модули  $|r_{12}|$  и  $|r_{21}|$  увеличиваются на порядок, когда показатель преломления граничащей с кристаллом среды близок к показателям преломления кристалла  $n_o$  и  $n_e$ . Особенно значительный рост  $|r_{12}|$  и  $|r_{21}|$  имеет место тогда, когда показатель преломления иммерсионной жидкости  $n$  больше  $n_o$  и  $n_e$ . Так, для кварца модули  $|r_{12}|$  и  $|r_{21}|$  становятся почти на три порядка больше вблизи критического угла отражения, чем для границы воздух – кристалл.

Приведенные расчеты верны для идеальной поверхности кристалла. Но переходный слой может оказывать влияние на эллиптичность отраженного света, на скачки фаз [6; 11; 12], а также на модули недиагональных элементов. Оценим это влияние. Промоделируем его тонким поглощающим изотропным слоем и рассчитаем отражение от такой системы. Поскольку получающиеся выражения довольно громоздки, проводился численный анализ на ЭВМ. Была составлена программа расчета компонент матрицы отражения от системы: изотропный поглощающий слой на гиротропном кристалле.

Для кристаллов, обладающих «планальной» гиротропией, например, кварца, при толщине слоя  $h = 50 \text{ \AA}$  и поглощении 0,001 также происходит скачок фазы, особенно заметный вблизи псевдобрюстеровского угла падения.

Величина этого скачка одного порядка со скачком фазы, который возникает из-за «планальный» гиротропии (но без поверхностного слоя), поэтому довольно сложно отделить вклад гиротропии от поглощения в поверхности слоем и тем более измерить ее на эксперименте.

Численно анализировалось также влияние переходного слоя на модули недиагональных элементов кристалла кварца.

Коэффициент поглощения слоя и его толщина  $h$  (слабое поглощение порядка  $10^{-3}$  и  $h$  до десятков ангстрем) незначительно влияют на значения недиагональных элементов.

Проведенные расчеты показывают, что наибольшее влияние на недиагональные элементы матрицы отражения оказывает показатель преломления слоя. Если он больше показателя преломления кристалла ( $n_o$  и  $n_e$ ), то модули недиагональных элементов вблизи критического угла имеют величину порядка  $10^{-3} \div 10^{-2}$ , т. е. в этом случае влияние его незначительно. Когда же показатель преломления слоя меньше  $n_o$  и  $n_e$ , то из-за наличия слоя значения модулей недиагональных элементов уменьшаются до значений порядка  $10^{-4}$ .

Как показывают экспериментальные измерения, одним из способов устранения влияния переходного слоя на измеряемые величины является использование метода иммерсионной эллипсометрии [13; 14].

## Заключение

1. Исследовано отражение света от одноосных кристаллов при наклонном падении света, и найдены условия, при которых гиротропия максимальным образом проявляется в отраженном свете. Показано, что модули недиагональных элементов

$|r_{12}|$  и  $|r_{21}|$  матрицы отражения, обусловленные гиротропией, возрастают на порядок при падении света из иммерсионной жидкости, когда показатель преломления жидкости близок к показателю преломления  $n_o$  или  $n_e$  преломленных волн в кристалле, по сравнению со случаем падения света из воздуха. В случае, когда отражение происходит вблизи критического угла полного отражения, для параметров гиротропии порядка  $10^{-4} \div 10^{-5}$  модули  $|r_{12}|$  и  $|r_{21}|$  имеют порядок  $10^{-2}$ .

2. Показано, что гиротропия кристаллов планальных классов средних сингоний проявляется не только в эллиптичности отраженного света, но и в скачке фазы отраженной волны, вектор электрического поля которой лежит в плоскости падения. Значительную величину скачок фазы имеет вблизи псевдобрюстеровского угла падения.

3. Проанализированы возможности определения параметров гиротропии в отраженном свете. Показано, что вклады планальной гиротропии и малого поверхностного поглощения в скачок фазы эквивалентны, поэтому в экспериментальных измерениях разделить их невозможно. В то же время вклад параметров гиротропии, приводящих к вращению плоскости поляризации отраженного света, может быть выделен и оценен их порядок по измеренным величинам недиагональных элементов матрицы отражения.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Федоров, Ф. И. Теория гиротропии / Ф. И. Федоров. – Мн. : Наука и техника, 1976. – 456 с.
2. Сендер, Н. Н. Распространение света в гиротропных кристаллах / Н. Н. Сендер // Вестник Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2019. – № 1. – С. 50–55.
3. Федоров, Ф. И. Оптика анизотропных сред / Ф. И. Федоров. – Мн. : Изд-во АН БССР, 1958. – 380 с.
4. Ярив, А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх. – М. : Мир, 1987. – 616 с.
5. Филиппов, В. В. К учету членов второго порядка малости в теории гиротропии / В. В. Филиппов // Доклады АН БССР. – 1983. – Т. 27, № 5. – С. 409–411.
6. Федоров, Ф. И. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами / Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов. – Мн. : Наука и техника, 1976. – 222 с.
7. Сендер, Н. Н. Проявление гиротропии при отражении света от одноосных кристаллов / Н. Н. Сендер // Вестник Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2017. – № 1. – С. 42–51.
8. Сендер, Н. Н. Эллипсометрическое определение показателей преломления и коэффициентов поглощения одноосных поглощающих кристаллов с использованием отражения и преломления света на границе изотропная среда – кристалл / Н. Н. Сендер // Вестник Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2022. – № 1. – С. 42–54.
9. Бокуть, Б. В. Электромагнитные волны в оптически активных и нелинейных кристаллах : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.05 / Бокуть Борис Васильевич. – Мн., 1972. – 270 л.
10. Константинова, А. Ф. Оптическая активность кристаллов в направлениях, отличных от направления оптической оси. Одноосные кристаллы / А. Ф. Константинова, Н. Р. Иванов, В. Н. Гречушников // Кристаллография. – 1969. – Т. 14, вып. 2. – С. 283–292.
11. Скалецкая, М. И. О возможности применения метода эллипсометрии к исследованию прозрачных материалов / М. И. Скалецкая, Г. Т. Петровский, Е. К. Скалецкий // Оптика твердого тела : сб. ст. – М., 1983. – С. 143–155.
12. Гусев, С. С. К учету поверхностного переходного слоя на полимерных пленках в методе ИК эллипсометрии / С. С. Гусев, Н. И. Стаськов, В. В. Филиппов // Эллипсометрия – метод исследования физико-химических процессов на поверхности твердых тел : сб. ст. – М., 1981. – С. 22.

13. Сендер, Н. Н. Иммерсионный метод определения оптических постоянных анизотропных поглощающих материалов / Н. Н. Сендер // *Вестник Брестского университета. Серия 4, Физика. Математика.* – 2015. – № 2. – С. 40–48.

14. Сендер, Н. Н. Экспериментальное определение оптических постоянных поглощающих кристаллов на основе метода иммерсионной эллисометрии / Н. Н. Сендер // *Вестник Брестского университета. Серия 4, Физика. Математика.* – 2020. – № 1. – С. 53–58.

## REFERENCES

1. Fedorov, F. I. *Teoriya girotropii* / F. I. Fedorov. – Mn. : Nauka i tekhnika, 1976. – 456 s.
2. Sender, N. N. *Rasprostranenie sveta v girotropnykh kristallakh* / N. N. Sender // *Vestnik Brestskago universiteta. Seryya 4, Fizika. Matematyka.* – 2019. – № 1. – S. 50–55.
3. Fedorov, F. I. *Optika anizotropnykh sred* / F. I. Fedorov. – Mn. : Izd-vo AN BSSR, 1958. – 380 s.
4. Yariv, A. *Opticheskie volny v kristallakh* / A. Yariv, P. Yukh. – M. : Mir, 1987. – 616 s.
5. Filippov, V. V. *K uchetu chlenov vtorogo poryadka malosti v teorii girotropii* / V. V. Filippov // *Doklady AN BSSR.* – 1983. – T. 27, № 5. – S. 409–411.
6. Fedorov, F. I. *Otrazhenie i prelomlenie sveta prozrachnymi kristallami* / F. I. Fedorov, V. V. Filippov. – Mn. : Nauka i tekhnika, 1976. – 222 s.
7. Sender, N. N. *Proyavlenie girotropii pri otrazhenii sveta ot odnoosnykh kristallov* / N. N. Sender // *Vestnik Brestskago universiteta. Seryya 4, Fizika. Matematyka.* – 2017. – № 1. – S. 42–51.
8. Sender, N. N. *Ellipsometricheskoe opredelenie pokazatelei prelomleniya i koeffitsientov pogloshcheniya odnoosnykh pogloshchayushchikh kristallov s ispol'zovaniem otrazheniya i prelomleniya sveta na granitse izotropnaya sreda – kristall* / N. N. Sender // *Vestnik Brestskago universiteta. Seryya 4, Fizika. Matematyka.* – 2022. – № 1. – S. 42–54.
9. Bokut', B. V. *Elektromagnitnye volny v opticheski aktivnykh i nelineinykh kristallakh : dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk : 01.04.05* / Bokut' Boris Vasil'evich. – Mn., 1972. – 270 l.
10. Konstantinova, A. F. *Opticheskaya aktivnost' kristallov v napravleniyakh, otlichnykh ot napravleniya opticheskoi osi. Odnoosnye kristally* / A. F. Konstantinova, N. R. Ivanov, V. N. Grechushnikov // *Kristallografiya.* – 1969. – T. 14, vyp. 2. – S. 283–292.
11. Skaletskaya, M. I. *O vozmozhnosti primeneniya metoda ellipsometrii k issledovaniyu prozrachnykh materialov* / M. I. Skaletskaya, G. T. Petrovskii, E. K. Skaletskii // *Optika tverdogo tela : sb. st. – M., 1983.* – S. 143–155.
12. Gusev, S. S. *K uchetu poverkhnostnogo perekhodnogo sloya na polimernykh plenkakh v metode IK ellipsometrii* / S. S. Gusev, N. I. Stas'kov, V. V. Filippov // *Ellipsometriya – metod issledovaniya fiziko-khimicheskikh protsessov na poverkhnosti tverdykh tel : sb. st. – M., 1981.* – S. 22.
13. Sender, N. N. *Immersionnyi metod opredeleniya opticheskikh postoyannykh anizotropnykh pogloshchayushchikh materialov* / N. N. Sender // *Vestnik Brestskago universiteta. Seryya 4, Fizika. Matematyka.* – 2015. – № 2. – S. 40–48.
14. Sender, N. N. *Eksperimental'noe opredelenie opticheskikh postoyannykh pogloshchayushchikh kristallov na osnove metoda immersionnoi ellipsometrii* / N. N. Sender // *Vestnik Brestskago universiteta. Seryya 4, Fizika. Matematyka.* – 2020. – № 1. – S. 53–58.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 16.09.2025*

**Алексей Игоревич Серый**

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Alexey Sery**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics  
of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: [alexey\\_sery@mail.ru](mailto:alexey_sery@mail.ru)

**К ВОПРОСУ О ПОРОГЕ НЕЙТРОНИЗАЦИИ  
В ЗВЕЗДАХ ГЛАВНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И СУБКАРЛИКАХ**

Найдено значение порога образования свободных нейтронов в электронно-протонной плазме с примесью альфа-частиц с плотностями и температурами, характерными для центральной части звезд, подобных Солнцу, и субкарликов, близких к таким звездам на диаграмме Герцшпрунга – Рассела. Использовались модели идеальных крайне невырожденных газов, а также крайне вырожденных нуклонных газов с более точным выражением для химического потенциала электронного газа, а также с учетом ядерного и кулоновского взаимодействия между частицами. Показано, что бета-равновесное значение концентрации нейтронов не может быть равным нулю, но оно крайне мало по сравнению со значением, соответствующим термодинамически равновесному существованию даже одного свободного нейтрона (до момента радиационного захвата протоном) во всей зоне ядерных реакций звезд указанных типов. Обе модели дают одинаковый по порядку величины результат, причем с ростом одной из трех величин (плотности, массовой доли водорода, температуры) при фиксированном значении двух остальных бета-равновесное значение концентрации нейтронов растет; рост наиболее чувствителен к изменению температуры.

**Ключевые слова:** электронно-нуклонное вещество, порог нейтронизации, звезды главной последовательности, субкарлики.

***On the Issue of the Neutronization Threshold in Main-Sequence Stars and Subdwarfs***

The threshold value for the formation of free neutrons in electron-proton plasma with an admixture of alpha particles with densities and temperatures typical for the central part of stars like the Sun and subdwarfs close to such stars on the Hertzsprung – Russell diagram has been found. Models of ideal extremely non-degenerate gases, as well as extremely degenerate nucleonic gases with a more precise expression for the chemical potential of the electron gas, as well as taking into account the nuclear and Coulomb interactions between particles, have been applied. It has been shown that the beta equilibrium value of the neutron density cannot be zero, but it is extremely small compared to the value corresponding to the thermodynamically equilibrium existence of even one free neutron (up to the moment of radiation capture by a proton) in the entire nuclear reaction zone of the stars of these types. Both models give the same result by the order of magnitude, and with an increase in one of the three values (density, mass fraction of hydrogen, temperature) at a fixed value of the remaining two, the beta equilibrium value of the neutron density increases; growth is most sensitive to temperature changes.

**Key words:** electron-nucleon matter, neutronization threshold, main sequence stars, subdwarfs.

**Введение**

Расчет концентрации протонов и электронов, при которой начинается нейтронизация (образование нейтронных капель [1, с. 32]) в водороде, а также концентраций электронов и нуклонов, соответствующих бета-равновесию (до радиационного захвата нейтронов протонами) представляет интерес для различных астрофизических приложений. В классической литературе соответствующая задача обычно решается для модели идеальных ферми-газов при температуре абсолютного нуля в отсутствие внешнего магнитного поля [1, с. 53; 2, с. 55].

Подобные задачи также рассматривались с учетом по крайней мере одного из факторов:

- а) отличные от нуля температуры для всех фермионов (протонов, нейтронов, электронов) или только для некоторых;
- б) наличие внешнего интенсивного магнитного поля;
- в) учет энергии взаимодействия между частицами;
- г) учет спиновой поляризации нуклонов [2, с. 56; 3, с. 88–92, 167–168; 4, с. 30–37; 5, с. 52–61; 6, с. 55–63].

При этом указанная проблема не исследовалась для звезд типа Солнца, а также не уточнялось смысловое содержание понятия «порог нейтронизации» для высоких температур. Такое уточнение, однако, требуется из-за логарифмической расходимости выражения для химического потенциала нейтронов при нулевом значении их концентрации.

Под нейтронизацией в данной работе будет пониматься процесс образования свободных нейтронов  $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$  (с последующим радиационным захватом протонами  $p + n \rightarrow d + \gamma$ ) как альтернатива непосредственному образованию нейтронов в связанном состоянии в одной из реакций протон-протонного цикла  $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$ .

При решении задачи о нахождении порога нейтронизации (в указанном выше смысле) в зонах ядерных реакций звезд типа Солнца и субкарликов с существенным содержанием водорода следует:

- а) учесть примесь других химических элементов помимо электронов и протонов [7, с. 590];
- б) применить формулу для химического потенциала электронного газа, более точную по сравнению с приближениями крайнего вырождения и крайнего невырождения;
- в) внести уточнение в смысловое содержание понятия «порог нейтронизации» при высоких температурах по сравнению с моделью, соответствующей температуре абсолютного нуля.

#### Условия в звездах нижней части главной последовательности

Рассмотрим центральную часть (зону ядерных реакций) звезды нижней части главной последовательности с плотностью  $\rho \sim 10^2$  г/см<sup>3</sup> и температурой  $T \sim 10^7$  К [7, с. 590]. Пренебрегая углеродно-азотным циклом и продуктами промежуточных реакций водородного цикла, будем исследовать модель центральной области звезды, где ниже порога появления свободных нейтронов находятся только электроны, протоны и альфа-частицы.

Обозначим через  $\eta$  массовую долю водорода. Тогда концентрации протонов  $n_p$  и электронов  $n_e$  равны соответственно

$$n_p \approx \frac{\eta\rho}{m_p + m_e}, \quad n_e \approx n_p + \frac{4(1-\eta)\rho}{m_\alpha + 4m_e}, \quad (1)$$

где  $m_e$ ,  $m_p$  и  $m_\alpha$  – массы электрона, протона и альфа-частицы соответственно (массу нейтрона обозначим через  $m_n$ ).

При  $\eta = 0,35$  и  $\rho = 160$  г/см<sup>3</sup>, что характерно для центральной части Солнца [7, с. 590], получаем  $n_p = 3,35 \cdot 10^{25}$  см<sup>-3</sup>,  $n_e = 9,60 \cdot 10^{25}$  см<sup>-3</sup>.

**Степени невырождения и химические потенциалы идеальных электронного и нуклонных газов**

Сравним тепловую энергию  $kT$  ( $k$  – постоянная Больцмана) при температуре  $T = 1,6 \cdot 10^7$  К, характерной для зоны ядерных реакций в центре Солнца [7, с. 590], со значениями выражений для химических потенциалов нерелятивистских электронов и протонов в приближении абсолютного нуля температуры и при отсчете от энергии покоя  $m_i c^2$ ,  $i = e, p$ ;  $c$  – скорость света в вакууме [3, с. 25, 45].

В результате получаем ( $\hbar$  – постоянная Планка):

$$\frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_e^{2/3}}{2m_e} < kT, \quad (2)$$

$$\frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p} \ll kT. \quad (3)$$

Неравенство (2) означает, что для электронов порядок сравниваемых величин одинаков. Вблизи порога нейтронизации, когда концентрация нейтронов  $n_n$  мала, должно, очевидно, выполняться соотношение, аналогичное (3), для нейтронного газа:

$$\frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_n^{2/3}}{2m_n} \ll kT. \quad (4)$$

Также можно убедиться, что электронный и нуклонный газы при указанных значениях концентраций можно считать нерелятивистскими, поскольку выполняются условия:

$$\frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_i^{2/3}}{2m_i} \ll m_i c^2, \quad kT \ll m_i c^2, \quad i = e, p, n. \quad (5)$$

При конечных температурах, когда, помимо (5), справедливы неравенства (2) – (4), в приближении идеальных газов химические потенциалы нуклонов, отсчитываемые от  $m_i c^2$ , можно приближенно выразить по общей формуле [3, с. 52]:

$$\tilde{\mu}_i \approx -kT \ln \left( \frac{1}{4n_i} \left( \frac{2m_i kT}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \right), \quad i = p, n. \quad (6)$$

Для того, чтобы при этом было  $\tilde{\mu}_i < 0$ , должны, очевидно, быть положительными аргументы логарифмов, поэтому должны быть справедливыми неравенства

$$\frac{1}{4n_i} \left( \frac{2m_i kT}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} > 1, \quad i = p, n. \quad (7)$$

Для удобства сравнения с (3) и (4) можно преобразовать (7) к виду

$$\frac{4^{2/3} \pi \hbar^2 n_i^{2/3}}{2m_i} < kT, \quad i = p, n. \quad (8)$$

Поскольку  $(3\pi^2)^{2/3} > 4^{2/3} \pi$ , то неравенства (2) – (4) оказываются более строгими по сравнению с (8), т. е. (8) выполняется и для электронов.

Несмотря на это, для электронного газа с учетом замечания, относящегося к (2), следует предварительно доказать, что  $\tilde{\mu}_e < 0$ , чтобы можно было говорить о применимости (2) и (8) к электронам. Если  $\tilde{\mu}_e = 0$ , то, согласно [8, с. 280–281], справедливо соотношение (в отсутствие спиновой поляризации):

$$n_e = \frac{4\pi(2m_e)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{\exp(\varepsilon/(kT)) + 1}. \quad (9)$$

Эту формулу можно преобразовать к виду

$$n_e = \frac{4\pi(2m_e kT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^x + 1}. \quad (10)$$

Интеграл в правой части (10) равен [8, с. 596]

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^x + 1} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,673, \quad (11)$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция Эйлера [9, с. 275, 276],  $\zeta(x)$  – дзета-функция Римана [10, с. 1087]. С учетом того, что  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ , а онлайн-калькулятор дзета-функции [11] дает значение  $\zeta(3/2) = 2,59823$ , в (9) получается значение интеграла, приближенно равное 0,674422.

При подстановке полученного значения в (8) с учетом значения  $T = 1,6 \cdot 10^7$  К получаем значение концентрации электронов  $n_{0e} = 2,35 \cdot 10^{26} \text{ см}^{-3}$ , которое больше значения  $n_e = 9,60 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$ , найденного по формуле (1). Отсюда следует, что  $\tilde{\mu}_e < 0$ .

Проверим формулу (6) для электронов в первом приближении.

При  $n_e = 9,60 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$  и  $T = 1,6 \cdot 10^7$  К она дает значение  $\tilde{\mu}_{e(1)} \approx -0,001611$  МэВ  $< 0$ .

Теперь применим более точную формулу, аналогичную той, которая применялась, в частности, в [12, с. 34] для нерелятивистских нуклонов:

$$\tilde{\mu}_{e(2)} \approx kT \ln\left(\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{1 - h(n_e, m_e, T)}\right)\right), \quad (12)$$

$$h(n_e, m_e, T) = \frac{(2\pi\hbar)^3 n_e}{4(\pi m_e kT)^{3/2}}. \quad (13)$$

При тех же значениях  $n_e$  и  $T$  получается  $\tilde{\mu}_{e(2)} \approx -0,001426$  МэВ, что несколько отличается от  $\tilde{\mu}_{e(1)}$ .

Можно проверить еще более точную формулу, для чего запишем общую формулу (согласно [8, с. 280–281])

$$n_e = \frac{4\pi(2m_e)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{\exp((\varepsilon + |\tilde{\mu}_e|)/(kT)) + 1}. \quad (14)$$

Преобразуем подынтегральное выражение, приводя (14) к виду

$$n_e = \frac{4\pi(2m_e)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^{1/2} \exp(-(\varepsilon + |\tilde{\mu}_e|)/(kT)) d\varepsilon}{1 + \exp(-(\varepsilon + |\tilde{\mu}_e|)/(kT))}. \quad (15)$$

Выполняя приближенное разложение подынтегрального выражения в (15), согласно [9, с. 161], получаем:

$$n_e \approx \frac{4\pi(2m_e)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \left( \int_0^{+\infty} \varepsilon^{1/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon + |\tilde{\mu}_{e(3)}|}{kT}\right) d\varepsilon - \int_0^{+\infty} \varepsilon^{1/2} \exp\left(-2\frac{\varepsilon + |\tilde{\mu}_{e(3)}|}{kT}\right) d\varepsilon + \int_0^{+\infty} \varepsilon^{1/2} \exp\left(-3\frac{\varepsilon + |\tilde{\mu}_{e(3)}|}{kT}\right) d\varepsilon \right). \quad (16)$$

Вводя обозначение

$$y \equiv \exp(-|\tilde{\mu}_{e(3)}|/(kT)) = \exp(\tilde{\mu}_{e(3)}/(kT)), \quad (17)$$

после выполнения интегрирования в (16) с учетом формул для гамма-функции от полуцелых аргументов [9, с. 277], получаем кубическое уравнение относительно  $y$ :

$$y^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} y^2 + 3^{3/2} y - \frac{3^{3/2} n_e (2\pi\hbar)^3}{2(2m_e \pi kT)^{3/2}} = 0. \quad (18)$$

Проверим левую часть (18) на наличие локальных экстремумов, дифференцируя по  $y$ . В результате получаем уравнение

$$3y^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} y + 3^{3/2} = 0, \quad (19)$$

дискриминант которого отрицателен, т. е. искомые точки отсутствуют. Это является достаточным (хотя и не необходимым) условием наличия единственного вещественного корня уравнения (18).

Выполняя замену

$$y = \xi + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}, \quad (20)$$

получаем, согласно общему алгоритму [9, с. 114], кубическое уравнение

$$\xi^3 + \left(3^{3/2} - \frac{9}{8}\right)\xi + \frac{9}{2^{3/2}} - \frac{3^{3/2}}{2^{7/2}} - \frac{3^{3/2} n_e (2\pi\hbar)^3}{2(2m_e \pi kT)^{3/2}} = 0. \quad (21)$$

Решение (21) находится на основе формулы Кардано [9, с. 114] и в нашем случае имеет вид:

$$\xi = \sqrt[3]{f(n_e, T) + \sqrt{f^2(n_e, T) + \left(\sqrt{3} - \frac{3}{8}\right)^3}} + \sqrt[3]{f(n_e, T) - \sqrt{f^2(n_e, T) + \left(\sqrt{3} - \frac{3}{8}\right)^3}},$$

$$f(n_e, T) = \frac{3^{3/2}}{2^{9/2}} + \frac{3^{3/2} n_e (2\pi\hbar)^3}{4(2m_e \pi kT)^{3/2}} - \frac{9}{2^{5/2}}. \quad (22)$$

В соответствии с (17), (20) и (22) получаем окончательное выражение для  $\tilde{\mu}_{e(3)}$ :

$$\tilde{\mu}_{e(3)} \approx kT \ln \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2} \right)^{3/2} + \sqrt[3]{f(n_e, T) + \sqrt{f^2(n_e, T) + \left( \sqrt{3} - \frac{3}{8} \right)^3}} + \sqrt[3]{f(n_e, T) - \sqrt{f^2(n_e, T) + \left( \sqrt{3} - \frac{3}{8} \right)^3}} \right]. \quad (23)$$

Подстановка упомянутых выше численных значений  $n_e$  и  $T$  дает  $\tilde{\mu}_{e(3)} \approx -0,001468$  МэВ, что близко к значению  $\tilde{\mu}_{e(2)}$ , найденному по формулам (12) и (13), поэтому дальнейшим уточнением, связанным с решением уравнения четвертой степени, можно пренебречь.

### Учет взаимодействий между частицами

Поскольку в рамках исследуемой модели нейтрон (в случае его возникновения) должен взаимодействовать с протонами и альфа-частицами (если пренебречь взаимодействием с электронами), то для химического потенциала нейтронного газа можно записать:

$$\mu_n \approx \tilde{\mu}_n + \varepsilon_{n\alpha} + \varepsilon_{np}, \quad (24)$$

где  $\varepsilon_{n\alpha}$  и  $\varepsilon_{np}$  – энергия взаимодействия нейтрона с альфа-частицами и протонами соответственно.

Протон в рамках исследуемой модели взаимодействует с протонами, электронами и альфа-частицами (если пренебречь взаимодействием с нейтронами вблизи порога нейтронизации).

Тогда для химического потенциала протонного газа можно записать:

$$\mu_p \approx \tilde{\mu}_p + \varepsilon_{p\alpha} + \varepsilon_{pe}^{(\alpha)} + \varepsilon_{pp}^C + \varepsilon_{pp}^N + \varepsilon_{pe}^{(p)}, \quad (25)$$

где введены обозначения для энергии взаимодействия протона:

- а)  $\varepsilon_{p\alpha}$  – с альфа-частицами;
- б)  $\varepsilon_{pe}^{(\alpha)}$  – с электронами, компенсирующими заряд альфа-частиц;
- в)  $\varepsilon_{pp}^C$  – кулоновская с другими протонами;
- г)  $\varepsilon_{pp}^N$  – ядерная с другими протонами;
- д)  $\varepsilon_{pe}^{(p)}$  – с электронами, компенсирующими заряд протонов.

Электрон в рамках исследуемой модели взаимодействует с протонами, альфа-частицами и другими электронами (если пренебречь взаимодействием с нейтронами вблизи порога нейтронизации).

Тогда для химического потенциала электронного газа можно записать:

$$\mu_e \approx \tilde{\mu}_{e(3)} + \varepsilon_{ee} + \varepsilon_{ep} + \varepsilon_{e\alpha}, \quad (26)$$

где введены обозначения для энергии взаимодействия электрона:

- а)  $\varepsilon_{e\alpha}$  – с альфа-частицами;
- б)  $\varepsilon_{ep}$  – с протонами;
- в)  $\varepsilon_{ee}$  – с другими электронами.

### Уравнение порога нейтронизации

Уравнение порога нейтронизации в пренебрежении химическим потенциалом нейтрино имеет вид [3, с. 88]:

$$m_p c^2 + \mu_p + m_e c^2 + \mu_e = m_n c^2 + \mu_n. \quad (27)$$

Подставляя (24)–(26) в (27), получаем:

$$\begin{aligned} m_p c^2 + \tilde{\mu}_p + \varepsilon_{p\alpha} + \varepsilon_{pe}^{(\alpha)} + \varepsilon_{pp} + \varepsilon_{pe}^{(p)} + m_e c^2 + \tilde{\mu}_e + \varepsilon_{ee} + \varepsilon_{ep} + \varepsilon_{e\alpha} = \\ = m_n c^2 + \tilde{\mu}_n + \varepsilon_{n\alpha} + \varepsilon_{np}. \end{aligned} \quad (28)$$

Учитывая изотопическую симметрию альфа-частицы, зарядовую независимость ядерных сил и приближенную компенсацию кулоновского отталкивания протона альфа-частицами кулоновским притяжением протона электронами, можно записать:

$$\varepsilon_{p\alpha} + \varepsilon_{pe}^{(\alpha)} \approx \varepsilon_{n\alpha}. \quad (29)$$

Сумму энергии кулоновского отталкивания протона другими протонами и энергии кулоновского притяжения протона остальными электронами приближенно приравняем к сумме обменной и корреляционной кулоновским поправкам к химическому потенциалу протонов, как это было сделано в [12, с. 34] в случае невырожденных газов:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pp}^C + \varepsilon_{pe}^{(p)} \approx - \frac{\alpha_0 \sqrt{m_p c^2 kT} (1 - \sqrt{1 - h(n_p, m_p, T)})}{\sqrt{\pi(1 - h(n_p, m_p, T))}} - \frac{3(kT)^{1/4} \alpha_0^{3/2} (m_p c^2)^{3/4}}{\pi^{1/4}} \times \\ \times \left( 1 - \frac{1}{2\sqrt{1 - h(n_p, m_p, T)}} \right) \sqrt{\sqrt{1 - h(n_p, m_p, T)} + h(n_p, m_p, T) - 1}, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\alpha_0$  – постоянная тонкой структуры, или постоянная электромагнитного взаимодействия;  $h(n_p, m_p, T)$  записывается аналогично (13).

Сумму энергий кулоновского взаимодействия электрона с протонами, альфа-частицами и остальными электронами приближенно приравняем к сумме обменной и корреляционной кулоновским поправкам к химическому потенциалу электронов по аналогии с (30):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ee} + \varepsilon_{ep} + \varepsilon_{e\alpha} \approx - \frac{\alpha_0 \sqrt{m_e c^2 kT} (1 - \sqrt{1 - h(n_e, m_e, T)})}{\sqrt{\pi(1 - h(n_e, m_e, T))}} - \frac{3(kT)^{1/4} \alpha_0^{3/2} (m_e c^2)^{3/4}}{\pi^{1/4}} \times \\ \times \left( 1 - \frac{1}{2\sqrt{1 - h(n_e, m_e, T)}} \right) \sqrt{\sqrt{1 - h(n_e, m_e, T)} + h(n_e, m_e, T) - 1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Для энергий ядерного взаимодействия отдельного протона и отдельного нейтрона с невырожденным протонным газом воспользуемся формулами, полученными в [13, с. 52, 57], с некоторыми уточнениями:

$$\varepsilon_{pp}^N = -\frac{2\pi\hbar^2 n_p \Omega(a_p, r_{0p}, 3m_p, T)}{m_p \left( \Omega^2(a_p, r_{0p}, 3m_p, T) + \frac{6m_p kT}{\hbar^2} \right)}, \quad (32)$$

$$\varepsilon_{np} = -\frac{(m_p + m_n)\pi\hbar^2 n_p}{2m_p m_n} \left[ 3 \frac{\Omega\left(a_t, r_{0t}, \frac{3}{2}(m_p + m_n), T\right)}{\Omega^2\left(a_t, r_{0t}, \frac{3}{2}(m_p + m_n), T\right) + \frac{3(m_p + m_n)kT}{\hbar^2}} + \frac{\Omega\left(a_s, r_{0s}, \frac{3}{2}(m_p + m_n), T\right)}{\Omega^2\left(a_s, r_{0s}, \frac{3}{2}(m_p + m_n), T\right) + \frac{3(m_p + m_n)kT}{\hbar^2}} \right], \quad (33)$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3, T) = -\frac{1}{x_1} + \frac{x_2 x_3 kT}{\hbar^2}. \quad (34)$$

При этом длины рассеяния и эффективные радиусы равны (в  $10^{-13}$  см)  $a_t = 5,42$ ,  $a_s = -23,71$ ,  $a_p = -17,2$ ,  $r_{0t} = 1,76$ ,  $r_{0s} = 2,70$ ,  $r_{0p} = 2,79$  [14, с. 20, 30, 31].

Переписывая (28) с учетом (6), (23), (29) – (34), получаем:

$$\Xi(n_p, n_e, T) = kT \ln \left( 4n_n \left( \frac{\pi\hbar^2}{2m_n kT} \right)^{3/2} \right), \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Xi(n_p, n_e, T) = & m_p c^2 - kT \ln \left( \frac{1}{4n_p} \left( \frac{2m_p kT}{\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right) - \frac{2\pi\hbar^2 n_p \Omega(a_p, r_{0p}, 3m_p, T)}{m_p \left( \Omega^2(a_p, r_{0p}, 3m_p, T) + \frac{6m_p kT}{\hbar^2} \right)} - \\ & - \frac{\alpha_0 \sqrt{m_p c^2 kT} (1 - \sqrt{1 - h(n_p, m_p, T)})}{\sqrt{\pi(1 - h(n_p, m_p, T))}} - \frac{3(kT)^{1/4} \alpha_0^{3/2} (m_p c^2)^{3/4}}{\pi^{1/4}} \times \\ & \times \left( 1 - \frac{1}{2\sqrt{1 - h(n_p, m_p, T)}} \right) \sqrt{\sqrt{1 - h(n_p, m_p, T)} + h(n_p, m_p, T) - 1 + m_e c^2} + \\ & + kT \ln \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2} \right)^{3/2} + \sqrt[3]{f(n_e, T)} + \sqrt{f^2(n_e, T) + \left( \sqrt{3} - \frac{3}{8} \right)^3} + \right. \\ & \left. + \sqrt[3]{f(n_e, T) - \sqrt{f^2(n_e, T) + \left( \sqrt{3} - \frac{3}{8} \right)^3}} \right] - \frac{\alpha_0 \sqrt{m_e c^2 kT} (1 - \sqrt{1 - h(n_e, m_e, T)})}{\sqrt{\pi(1 - h(n_e, m_e, T))}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3(kT)^{1/4} \alpha_0^{3/2} (m_e c^2)^{3/4}}{\pi^{1/4}} \left( 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-h(n_e, m_e, T)}} \right) \sqrt{\sqrt{1-h(n_e, m_e, T)} + h(n_e, m_e, T) - 1} - \\
& - m_n c^2 + \frac{(m_p + m_n) \pi \hbar^2 n_p}{2m_p m_n} \left[ 3 \frac{\Omega\left(a_t, r_{0t}, \frac{3}{2}(m_p + m_n), T\right)}{\Omega^2\left(a_t, r_{0t}, \frac{3}{2}(m_p + m_n), T\right) + \frac{3(m_p + m_n)kT}{\hbar^2}} + \right. \\
& \left. + \frac{\Omega\left(a_s, r_{0s}, \frac{3}{2}(m_p + m_n), T\right)}{\Omega^2\left(a_s, r_{0s}, \frac{3}{2}(m_p + m_n), T\right) + \frac{3(m_p + m_n)kT}{\hbar^2}} \right]. \quad (36)
\end{aligned}$$

Таким образом, в (35) и (36) характеристики альфа-частиц отсутствуют, но, поскольку  $n_p \neq n_e$ , их массовая доля должна косвенно влиять на численные результаты расчетов. Из (35) можно непосредственно выразить  $n_n$ :

$$n_n = \frac{1}{4} \left( \frac{2m_n kT}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left( \frac{\Xi(n_p, n_e, T)}{kT} \right). \quad (37)$$

Если пренебречь ядерным и кулоновским взаимодействиями, а для химического потенциала электронов использовать формулу, аналогичную (6), то вместо (35) получаем упрощенное уравнение:

$$m_n c^2 - kT \ln\left( \frac{1}{4n_n} \left( \frac{2m_n kT}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \right) = \sum_{i=e,p} \left( m_i c^2 - kT \ln\left( \frac{1}{4n_i} \left( \frac{2m_i kT}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \right) \right). \quad (38)$$

Тогда вместо (37) получаем выражение для  $n_n$ :

$$n_n = \frac{1}{4} \left( \frac{2m_n kT}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left( \frac{1}{kT} \left( \sum_{i=e,p} \left( m_i c^2 - kT \ln\left( \frac{1}{4n_i} \left( \frac{2m_i kT}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \right) \right) - m_n c^2 \right) \right). \quad (39)$$

### О смысловом значении понятия «порог нейтронизации»

В модели, в которой температура равна абсолютному нулю, порог нейтронизации соответствует значению  $n_n = 0$ .

В отличие от этой модели любая конечная температура становится для нейтронов на пороге нейтронизации высокой, поскольку, согласно (6),  $\tilde{\mu}_n \rightarrow -\infty$  при  $n_n \rightarrow 0$ . Из (36) следует, что при конечных значениях  $n_e$ ,  $n_p$  и  $T$  получается конечное значение  $n_n$ , т. е. значение  $n_n = 0$  невозможно.

Тогда порог нейтронизации можно понимать как такое значение  $n_{n0}$ , при котором во всем объеме зоны ядерных реакций возникает хотя бы один свободный нейтрон.

Поскольку, например, для Солнца радиус указанной зоны не превышает  $0, R_S$  ( $R_S$  – радиус Солнца) [15, с. 243], который равен  $R_S = 6,96 \cdot 10^8$  м [7, с. 589], получаем пороговое значение

$$n_{n0} = \left( \frac{4}{3} \pi (0,3R_S)^3 \right)^{-1} \approx 2,62 \cdot 10^{-26} \text{ см}^{-3}. \quad (40)$$

Остается сравнить значения, рассчитанные по формулам (37) и (39), с  $n_{n0}$ .

### Численные результаты и их обсуждение

Численные расчеты по формулам (37) и (39) приводят к результатам, представленным в таблице.

Таблица – Значения концентраций нейтронов, соответствующих бета-равновесию, рассчитанные в рамках двух моделей при различных заданных значениях плотности  $\rho$ , массовой доли водорода  $\eta$ , температуры  $T$

| $\rho$ , г/см <sup>3</sup> | $\eta$ | $T$ , 10 <sup>7</sup> К | $n_{n1}$ , см <sup>-3</sup> (решение (37)) | $n_{n2}$ , см <sup>-3</sup> (решение (39)) |
|----------------------------|--------|-------------------------|--|--|
| 150                        | 0,35   | 1,6                     | $3,038 \cdot 10^{-238}$                    | $3,166 \cdot 10^{-238}$                    |
| 160                        | 0,3    | 1,6                     | $2,964 \cdot 10^{-238}$                    | $3,102 \cdot 10^{-238}$                    |
| 160                        | 0,35   | 1,4                     | $2,646 \cdot 10^{-273}$                    | $2,673 \cdot 10^{-273}$                    |
| 160                        | 0,35   | 1,6                     | $3,457 \cdot 10^{-238}$                    | $3,613 \cdot 10^{-238}$                    |
| 160                        | 0,35   | 1,8                     | $6,953 \cdot 10^{-211}$                    | $7,234 \cdot 10^{-211}$                    |
| 160                        | 0,4    | 1,6                     | $3,950 \cdot 10^{-238}$                    | $4,123 \cdot 10^{-238}$                    |
| 170                        | 0,35   | 1,6                     | $3,903 \cdot 10^{-238}$                    | $4,091 \cdot 10^{-238}$                    |

Таким образом, значения  $n_{n1}$  и  $n_{n2}$  растут с ростом любого из трех параметров (плотности  $\rho$ , массовой доли водорода  $\eta$ , температуры  $T$ ) при фиксированном значении двух остальных. Результаты наиболее чувствительны к изменению температуры. Для всех исследованных случаев полученные результаты значительно меньше  $n_{n0}$ . Это означает, что один нейтрон образуется в пространственной области с линейными размерами более  $10^{70}$  см, если она однородно заполнена веществом с параметрами, соответствующими исследуемой модели.

Такие расстояния значительно превышают оцениваемые в настоящее время масштабы наблюдаемой части Вселенной [16, с. 81], поэтому в зоне ядерных реакций в центральной части звезд типа Солнца крайне мала вероятность термодинамически равновесного существования (до момента радиационного захвата протоном) даже одного нейтрона.

Следует отметить, что в приближении абсолютного нуля температуры (которое для Солнца было бы очень грубым) и идеальных газов результат качественно остался бы таким же: отсутствие свободных нейтронов. Но такой ответ был бы основан на выполнении неравенства:

$$m_n c^2 > \sum_{i=e,p} \left( m_i c^2 + \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_i^{2/3}}{2m_i} \right). \quad (41)$$

Решения (37) и (39), как показывают расчеты, сравнимы с решением (40) при  $T > 10^8$  К (в довольно широких пределах значений  $\rho$  и  $\eta$ ), но при таких температурах нельзя пренебрегать продуктами других ядерных реакций (помимо водород-

ного цикла), в том числе в субкарликах; кроме того, такие условия более характерны для красных гигантов [15, с. 401].

Отсюда следует, что альтернативный канал образования дейтронов (т. е. образования свободных нейтронов с последующим их радиационным захватом протонами) не играет заметной роли в звездах типа Солнца и соседствующих с ними субкарликов на диаграмме Герцшпрунга – Рассела по сравнению с основным каналом образования дейтронов в протон-протонном цикле.

Полученный результат:

- а) несущественно зависит от учета взаимодействий между фермионами;
- б) существенно отличается от результатов, полученных для более высоких плотностей и более низких температур (например, в водородных белых карликах), где исследуемый канал дейтронизации играет главную роль по сравнению с реакцией  $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$ , которая относится уже не к термоядерной, а к пикноядерной [3, с. 74–75].

### **Заключение**

В модели невырожденных газов найдено значение порога образования свободных нейтронов в электронно-протонной плазме с примесью альфа-частиц с плотностями и температурами, характерными для центральной части Солнца.

Использовались модели:

- а) идеальных крайне невырожденных газов;
- б) крайне невырожденных нуклонных газов с более точным выражением для химического потенциала электронного газа, а также с учетом ядерного и кулоновского взаимодействия между частицами.

Показано, что при указанных значениях температуры, плотности вещества и массовой доли водорода равновесное значение концентрации нейтронов хоть и не может быть равным нулю (во избежание логарифмической расходимости в выражении для химического потенциала нейтронов), но оно настолько мало, что в зоне ядерных реакций в центральной части Солнца вероятность термодинамически равновесного существования (до момента радиационного захвата протоном) даже одного нейтрона крайне мала.

Также показано, что этот результат по порядку величины один и тот же для указанных выше двух моделей, причем бета-равновесное значение концентрации нейтронов растет с ростом любого из трех параметров (плотности, массовой доли водорода, температуры) при фиксированном значении двух остальных, а результаты наиболее чувствительны к изменению температуры.

Сделан вывод о том, что данный канал образования дейтронов (через радиационный захват образовавшихся свободных нейтронов протонами) не играет заметной роли в звездах типа Солнца и соседствующих с ними субкарликов на диаграмме Герцшпрунга – Рассела по сравнению с основным каналом образования дейтронов в протон-протонном цикле.

Полученные уравнения могут представлять интерес для теоретического исследования звезд, содержащих водород, при таких температурах и плотностях, когда использованные в работе модельные приближения еще применимы, но вероятность данного канала дейтронизации вещества более существенна.

### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Шапиро, С. Л. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды : пер. с англ. : в 2 ч. / С. Л. Шапиро, С. А. Тьюколски. – М. : Мир, 1985. – Ч. 1. – 256 с.

2. Саакян, Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г. С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с.
3. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : моногр. / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.
4. Серый, А. И. О ферромагнетизме вырожденной нейтронно-протонной системы / А. И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2012. – №1. – С. 30–37.
5. Секержицкий, В. С. О бета-равновесии электронно-нуклонного вещества при низких температурах / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2021. – № 2. – С. 52–61.
6. Серый, А. И. Об условии бета-равновесия электронно-нуклонного вещества при низких температурах вблизи порога нейтронизации / А. И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2022. – № 1. – С. 55–63.
7. Физическая энциклопедия / гл. ред. А. М. Прохоров ; редкол.: Д. М. Алексеев [и др.]. – М. : Большая рос. энцикл., 1994. – Т. 4 : Пойнтинга – Робертсона – Стримеры. – 704 с.
8. Румер, Ю. Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика : учеб. пособие / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 608 с.
9. Воднев, В. Т. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович ; под ред. Ю. С. Богданова. – 3-е изд., перераб. и доп. – Мн. : Выш. шк., 1995. – 380 с.
10. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рьжик. – М. : ГИФМЛ, 1963. – 1100 с.
11. Калькулятор дзета-функции Римана и тождества Эйлера. – URL: <https://wpsolccom/dzeta-funkciya-rimana> (дата обращения: 06.10.2025).
12. Серый, А. И. О некоторых поляризационных эффектах в астрофизической плазме / А. И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2014. – № 1. – С. 30–43.
13. Серый, А. И. О поправках к критерию Стонера для ядерной материи / А. И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 2. – С. 48–60.
14. Ситенко, А. Г. Лекции по теории ядра / А. Г. Ситенко, В. К. Тартаковский // М. : Атомиздат, 1972. – 351 с.
15. Кононович, Э. В. Общий курс астрономии : учеб. пособие / Э. В. Кононович, В. И. Мороз ; под ред. В. В. Иванова. – Изд. 2-е, испр. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 544 с.
16. Сурдин, В. Г. Большая энциклопедия астрономии / В. Г. Сурдин. – М. : Эксмо, 2012. – 480 с.

## REFERENCES

1. Shapiro, S. L. Chernye dyry, belye karliki i neitronnye zvezdy : per. s angl. : v 2 ch. / S. L. Shapiro, S. A. T'yukolski. – М. : Mir, 1985. – Ch. 1. – 256 s.
2. Saakyan, G. S. Ravnovesnye konfiguratsii vyrozhdennykh gazovykh mass / G. S. Saakyan. – М. : Nauka, 1972. – 344 s.
3. Sekerzhitskii, V. S. Ravnovesnye sistemy fermionov i bozonov v magnitnykh polyakh : monogr. / V. S. Sekerzhitskii ; Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina. – Brest : Izd-vo BRGU, 2008. – 198 s.
4. Seryi, A. I. O ferromagnetizme vyrozhdennoi neitronno-protonnoi sistemy / A. I. Seryi // Vesnik Brestskaga universiteta. Seryya 4, Fizika. Matematyka. – 2012. – №1. – S. 30–37.
5. Sekerzhitskii, V. S. O beta-ravnovesii elektronno-nuklonnogo veshchestva pri nizkikh temperaturakh / V. S. Sekerzhitskii, A. I. Seryi // Vesnik Brestskaga universiteta. Seryya 4, Fizika. Matematyka. – 2021. – № 2. – S. 52–61.
6. Seryi, A. I. Ob uslovii beta-ravnovesiya elektronno-nuklonnogo veshchestva pri nizkikh temperaturakh vblizi poroga neitronizatsii / A. I. Seryi // Vesnik Brestskaga universiteta. Seryya 4, Fizika. Matematyka. – 2022. – № 1. – S. 55–63.

7. Fizicheskaya entsiklopediya / gl. red. A. M. Prokhorov ; redkol.: D. M. Alekseev [i dr.]. – M. : Bol'shaya ros. entsikl., 1994. – T. 4 : Pointinga – Robertsona – Strimery. – 704 s.
8. Rumer, Yu. B. Termodinamika, statisticheskaya fizika i kinetika : ucheb. posobie / Yu. B. Rumer, M. Sh. Ryvkin. – 2-e izd., ispr. i dop. – Novosibirsk : Izd-vo Novosib. un-ta, 2000. – 608 s.
9. Vodnev, V. T. Osnovnye matematicheskie formuly : spravochnik / V. T. Vodnev, A. F. Naumovich, N. F. Naumovich ; pod red. Yu. S. Bogdanova. – 3-e izd., pererab. i dop. – Mn. : Vysh. shk., 1995. – 380 s.
10. Gradshtein, I. S. Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii / I. S. Gradshtein, I. M. Ryzhik. – M. : GIFML, 1963. – 1100 s.
11. Kal'kulyator dzeta-funktsii Rimana i tozhdestva Eilera. – URL: <https://wpcalccom/dzeta-funkciya-rimana> (data obrashcheniya: 06.10.2025).
12. Seryi, A. I. O nekotorykh polyarizatsionnykh effektakh v astrofizicheskoi plazme / A. I. Seryi // Vesnik Brestskaga universiteta. Seryya 4, Fizika. Matematyka. – 2014. – № 1. – S. 30–43.
13. Seryi, A. I. O popravkakh k kriteriyu Stonera dlya yadernoi materii / A. I. Seryi // Vesnik Brestskaga universiteta. Seryya 4, Fizika. Matematyka. – 2013. – № 2. – S. 48–60.
14. Sitenko, A. G. Lektsii po teorii yadra / A. G. Sitenko, V. K. Tartakovskii // M. : Atomizdat, 1972. – 351 s.
15. Kononovich, E. V. Obshchii kurs astronomii : ucheb. posobie / E. V. Kononovich, V. I. Moroz ; pod red. V. V. Ivanova. – Izd. 2-e, ispr. – M. : Editorial URSS, 2004. – 544 s.
16. Surdin, V. G. Bol'shaya entsiklopediya astronomii / V. G. Surdin. – M. : Eksmo, 2012. – 480 s.

*Рукапіс надруковано у редакцію 13.10.2025*

**Николай Николаевич Ворсин<sup>1</sup>, Анатолий Антонович Гладышук<sup>2</sup>,  
Татьяна Леонидовна Кушнер<sup>3</sup>, Евгений Викторович Луценко<sup>4</sup>**

<sup>1,2</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. физики

Брестского государственного технического университета

<sup>3</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. физики

Брестского государственного технического университета

<sup>4</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., зав. центром «Широкозонная нано- и микроэлектроника»

Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

**Nikolai Vorsin<sup>1</sup>, Anatolii Gladyschuk<sup>2</sup>, Tatsiana Kushner<sup>3</sup>, Evgenii Lutsenko<sup>4</sup>**

<sup>1,2</sup>Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

Associate Professor of the Department of Physics of Brest State Technical University

<sup>3</sup>Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

Head of the Department of Physics of Brest State Technical University

<sup>4</sup>Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

Head of Centre «Wide-band nano and micro-electronics» B. I. Stepanov Institute of Physics

of National Academy of Sciences of Belarus

e-mail: <sup>1</sup>vorsin@gmail.com; <sup>2</sup>gaa.phys@tut.by; <sup>3</sup>phys@bstu.by; <sup>4</sup>e.lutsenko@ifanbel.bas-net.by

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИСХОДНО ЗАКРЫТОГО ALGAN ГЕТЕРОПЕРЕХОДНОГО ПОЛЕВОГО ТРАНЗИСТОРА

Нитрид галлия (GaN) обладает многими превосходными физическими свойствами: широкую запрещенную зону 3,4 эВ, большим критическим полем пробоя 3,3 МВ/см, высокую скорость насыщения для электронов  $2,5 \cdot 10^7$  см/с и хорошую теплопроводность до 1,5 Вт/(смК). Благодаря этим свойствам устройства на основе GaN являются весьма перспективными для широкого применения в полупроводниковых приборах включая высокоскоростную и мощную электронику. В работе с помощью программного обеспечения COMSOL Multiphysics разработана модель исходно закрытого гетеропереходного полевого транзистора (ГПТ) на основе AlxGax-1N, включающая его вольтамперную характеристику (ВАХ) и другие параметры.

**Ключевые слова:** Гетеропереходный полевой транзистор (ГПТ), нитрид галлия (GaN), нитрид алюминия (AlN), диффузионно-дрейфовая модель, метод градиента электронной плотности, поляризация, исходно закрытый транзистор, вольтамперная характеристика (ВАХ), исходно закрытый транзистор.

### *Modeling and Investigation of the Initially Closed ALGAN Heterojunction Field-Effect Transistor*

Gallium nitride (GaN) has many excellent physical properties: a wide band gap of 3,4 eV, a large critical breakdown field of 3,3 MV/cm, a high saturation velocity for electrons of  $2,5 \cdot 10^7$  cm/s, and good thermal conductivity of up to 1,5 W/(cmK). These properties make GaN-based devices very promising for a wide range of applications in semiconductor devices, including high-speed and high-power electronics. In this work, using the COMSOL Multiphysics software, a model of an initially closed heterojunction field-effect transistor (HJFET) based on AlxGax-1N was developed, including its current-voltage characteristic (CVC) and other parameters.

**Key words:** Heterojunction field-effect transistor (HJET), gallium nitride (GaN), aluminum nitride (AlN), diffusion-drift model, electron density gradient method, polarization, current-voltage characteristic (volt-ampere characteristic), initially closed transistor.

### **Введение**

Будучи полупроводником с широкой запрещенной зоной, нитрид галлия (GaN) обладает высоким напряжением пробоя и высокой проводимостью двумерного электронного газа (ДЭГ) на гетеропереходе [1]. Хотя есть примеры привычного построения GaN транзисторов с изолированным затвором [2], весьма заманчивым является использование высокой проводимости ДЭГ для формирования канала транзистора. Действительно, первые образцы подобных транзисторов в сравнении с кремниевыми

позволили уменьшить все виды потерь, увеличить частоту работы преобразователей, улучшить теплоотдачу за счет более высокой рабочей температуры.

Единственное неудобство применения силовых гетеропереходных полевых транзисторов (ГПТ) состоит в том, что они являются исходно открытыми приборами, т. е. при нулевом напряжении на затворе транзистор открыт для стокового тока. Это качество не является непреодолимым препятствием для построения силовых преобразователей, но создает неудобство в построении их схемы и конструкции. В свое время такая ситуация стала препятствием для распространения мощных транзисторов со статической индукцией (СИТ) в построении на них силовых преобразователей.

В работе на основе построенной модели исследуется исходно закрытый ГПТ с затвором в виде р-п-перехода, (т. н. р-затвор). Данный тип транзистора является весьма подходящим для практического использования.

### Структура моделируемого ГПТ

Форма и размеры структуры ГПТ с р-затвором показана на рисунке 1. Она состоит из барьерного слоя AlGaN толщиной  $h_2$ , канального слоя GaN толщиной  $h_1$ , который через промежуточный слой AlN опирается на подложку. Толщина слоя GaN –  $h_1$  должна быть сравнительно большой для уменьшения напряжений в верхней его части, обусловленных рассогласованием в нижней части его решетки с решеткой подложки. Из-за разности ширины запрещенной зоны барьерного и канального слоев на границе их соприкосновения образуется слой двумерного электронного газа (ДЭГ), выполняющий роль канала транзистора. На рисунке 1 этот слой обозначен темнокрасной линией. Над барьерным слоем расположен р-затвор – это сильно легированный акцептором слой GaN, который образует с барьерным слоем р-п-переход.

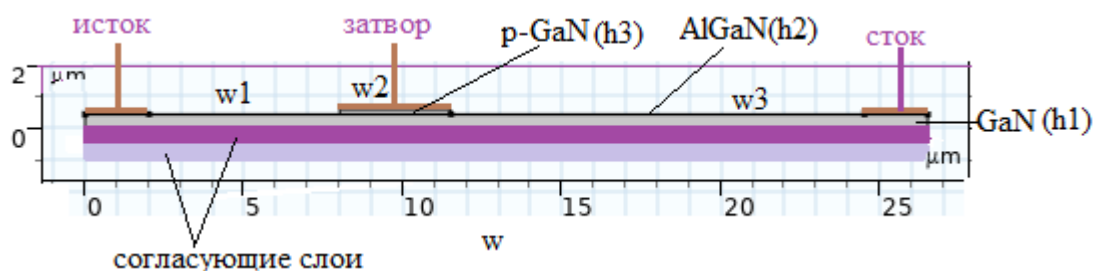


Рисунок 1 – Структура и геометрические параметры модели ГПТ

Толщины слоев  $h$  и длины компонент  $w$ , а также концентрации примесей и доля алюминия в барьерном слое являются варьируемыми параметрами, которые могут изменяться перед запуском модели на расчет. Идея данного ГПТ состоит в том, что обедненный свободными носителями слой затворного р-п-перехода захватывает подзатворный участок барьерного слоя, обездвиживает имеющиеся там электроны и создает разрыв в слое двумерного электронного газа (ДЭГ), который является электропроводным каналом транзистора. В результате слой ДЭГ разрывается в подзатворной области, и транзистор оказывается запертым при нулевом напряжении на затворе. При подаче на затвор положительного относительно канала напряжения толщина обедненного слоя р-п-перехода уменьшается, в подзатворной области барьерного слоя появляются свободные электроны, которые переходят в слой GaN, создавая там ДЭГ. Электропроводность канала восстанавливается.

### Методология моделирования

Модуль «полупроводники» программного комплекса COMSOL Multiphysics базируется на диффузионно-дрейфовой модели процессов в полупроводниках. Данная

модель справедлива для микронных размеров описываемых объемов. Для меньших объемов комплекс содержит методику учета квантоворазмерных эффектов – метод градиента электронной плотности, которая позволяет учесть квантовые эффекты в субмикронных областях.

Таким образом, получается удобный инструмент моделирования полупроводниковых приборов микронных и субмикронных размеров. Получаемая модель описывается следующим набором уравнений.

Уравнение Пуассона дает связь между электрическим полем (E), концентрацией пространственного заряда (ρ) и электростатическим потенциалом (φ) [3].

$$\nabla^2 \varphi = -\nabla E = \rho / \varepsilon, \tag{1}$$

где ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость, ρ – плотность заряда (она определяется вкладом концентраций дырок (p), электронов (n), ионизированных атомов донора N<sub>d</sub> и ионизированных атомов акцептора N<sub>a</sub>):

$$\rho = q(p + n + N_d - N_a). \tag{2}$$

Элементарный заряд обозначен через q. Перенос носителей заряда описывается соотношениями, заданными в виде уравнений непрерывности тока:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \frac{-\nabla \cdot \vec{j}_n}{-q} - R_n + G_n \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{-\nabla \cdot \vec{j}_p}{+q} - R_p + G_p \end{aligned} \right\}, \tag{3}$$

где t – время j<sub>n</sub>, j<sub>p</sub> – плотности тока электронов и дырок, R<sub>n</sub>, G<sub>n</sub> и R<sub>p</sub>, G<sub>p</sub> – скорости рекомбинации и генерации электронов и дырок.

Плотность тока электронов j<sub>n</sub> и дырок j<sub>p</sub> выражаются в компактной форме через квазиферми-уровни электронов и дырок: E<sub>fn</sub> и E<sub>fp</sub>:

$$\left. \begin{aligned} \vec{j}_n &= qn\mu_n \nabla E_{fn} + qn \left( (E_c - E_{fn})\mu_n + Q_n \right) \frac{\nabla T}{T} \\ \vec{j}_p &= -qp\mu_p \nabla E_{fp} - qp \left( (E_v - E_{fp})\mu_p + Q_p \right) \frac{\nabla T}{T} \end{aligned} \right\}, \tag{4}$$

где μ<sub>n</sub> и μ<sub>p</sub> – подвижности электронов и дырок, E<sub>c</sub>, E<sub>v</sub> – энергии дна зоны проводимости и потолка валентной зоны соответственно, Q<sub>n</sub>, Q<sub>p</sub> являются неравновесным вкладом электронов и дырок в коэффициент термодиффузии, T – температура (К).

Дно зоны проводимости – E<sub>c</sub> и E<sub>v</sub> – потолок валентной зоны, в свою очередь, связаны с электрическим потенциалом φ, сродством к электрону χ и шириной запрещенной зоны E<sub>g</sub> следующими соотношениями:

$$E_c = -V - \chi \quad E_v = E_c - E_g \tag{5}$$

В полупроводниковом модуле комсола все переменные уровней энергии (E<sub>fn</sub>, E<sub>fp</sub>, E<sub>c</sub>, E<sub>v</sub>, χ, E<sub>g</sub>) масштабируются по элементарному заряду и выражаются в единицах электрического потенциала (В).

Как следует из (4), для вычисления плотностей токов необходимо знание концентраций свободных носителей заряда.

В теории дрейфа-диффузии концентрации свободных носителей n, p связаны с квазиферми-уровнями E<sub>fn</sub>, E<sub>fp</sub> следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} n &= N_c F_{1/2} \left( \frac{E_{fn} - E_c}{U_T} \right) \\ p &= N_v F_{1/2} \left( \frac{-E_{fp} + E_v}{U_T} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где  $N_c$ ,  $N_v$  – эффективная плотность состояний зоны проводимости и валентной зоны,  $F_{1/2}$  является интегралом Ферми – Дирака,  $U_T$  – температурный потенциал ( $U_T = \frac{k_B T}{q}$ ). Таким образом, система уравнений (1) – (6) замыкается и позволяет вычислить плотности токов и токи всех электродов транзистора при заданной его геометрии и потенциалах электродов.

Сомнения в точности такого расчета создает то, что в нитридном ГПТ область вблизи перехода, содержащая свободные электроны, очень узкая. Совокупность находящихся в ней свободных электронов называют двумерным электронным газом (ДЭГ), а вычисление концентрации электронов в ДЭГ требует учета квантовых явлений. Наиболее экономной вычислительной процедурой этого учета «в комсоло» является метод градиента электронной плотности, при котором в рассмотрение вводятся т. н. квантовые потенциалы для электронов –  $V_n$  и дырок –  $V_p$ , видоизменяющие уравнения (6):

$$\left. \begin{aligned} n &= N_c F_{1/2} \left( \frac{E_{fn} - E_c + V_n}{U_T} \right) \\ p &= N_v F_{1/2} \left( \frac{-E_{fp} + E_v + V_p}{U_T} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Расчет квантовых потенциалов выполняется комсолом в виде линейной процедуры, не требующей циклических итераций. Это обеспечивает экономию вычислений в сравнении с поиском самосогласованного решения уравнений Пуассона и Шредингера.

*Поляризация материала.* Известно, что нитриды алюминия и галия являются поляризованными материалами. При этом действуют два механизма поляризации: спонтанная, характеризуемая вектором  $P^{sp}$ , и пьезоэлектрическая, выражаемая вектором  $P^{pz}$ . Эффекты поляризации играют важную роль в образовании ДЭГ, и меры по их учету в модели являются ключевыми. Для этого использован имеющийся в COMSOL Multiphysics инструмент задания поверхностного заряда. В обоих слоях, образующих гетеропереход, действуют оба механизма поляризации. Но поскольку толщины слоев отличаются более чем в 20 раз, то можно принять толстый слой GaN расслабленным, а тонкий слой AlGaIn напряженным. Это напряжение является растягивающим, при котором направление векторов спонтанной и пьезоэлектрической поляризации совпадают. Модуль суммарного вектора поляризации, численно равный поверхностному заряду, определится равенством

$$P = P_{AlGaIn}^{sp} + P_{GaIn}^{pz} - P_{GaIn}^{sp}. \quad (8)$$

Для векторов поляризации в литературе [4] имеются упрощенные формулы, выражающие их как функцию относительной доли алюминия в материале. Подстановка этих формул в (8) дает используемое в модели выражение для величины поверхностного заряда, которая численно равна модулю вектора поляризации:

$$\sigma = [0.06095 \cdot x - 0.019 \cdot x \cdot (1 - x)] [\text{Кл} \cdot \text{м}^{-2}]. \quad (9)$$

*Легирование.* Барьерный слой  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$  толщиной  $h_2$  является источником свободных электронов для канала транзистора.

Для улучшения электропроводности канала степень его легирования донорной примесью (Si) желательна быть большой. Однако необходимо иметь в виду, что для размещения затворного р-п-перехода в барьерном слое степень легирования затвора должны быть еще больше, причем значительно больше.

Однако предел легирования ограничен растворимостью примеси. Кроме того, необходимо учесть тот факт, что сильное легирование областей р-п-перехода делает его тонким и электрически не прочным. С учетом этого концентрация донорной примеси в барьерном слое выступала в качестве одного из параметров, варьируемого в диапазоне от  $10^{16} \text{ см}^{-3}$  до  $10^{17} \text{ см}^{-3}$ .

Степень легирования затвора акцепторной примесью (Mg) также являлась варьируемым параметром от  $10^{18} \text{ см}^{-3}$  до  $10^{20} \text{ см}^{-3}$ .

Канальный слой, имеющий толщину  $h_1$ , должен быть максимально чистым, что диктуется требованием сохранения подвижности электронов. Этот слой полагается нелегированным. Однако чистый GaN имеет небольшую исходную электронную проводимость. Поэтому в расчетах он полагается легированным донорной примесью, дающей концентрацию свободных электронов  $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .

*Металлические контакты.* Модуль «полупроводники» комплекса COMSOL Multiphysics содержит мини-модели контактов металла с полупроводником, что избавляет от специального их моделирования. Используются невыпрямляющие контакты.

*Величина электронного сродства  $\chi$*  – разность энергии нулевого уровня (вакуума) и дна зоны проводимости полупроводника. Данный параметр необходим для моделирования гетеропереходов. Его значение для AlGaIn зависит от доли алюминия и в модели определяется по эмпирической формуле [5]

$$\chi = (4.1 - x) [\text{эВ}]. \quad (10)$$

*Квантовые эффекты.* Толщина слоя ДЭГ на гетеропереходе AlGaIn/GaN сравнима или даже меньше длины волны де Бройля движущихся там электронов. Как уже отмечалось, это обстоятельство требует учета квантовых эффектов в расчетах. Для этого использовался метод градиента электронной концентрации значительно более экономный по требуемым вычислительным ресурсам и легко встраивающийся в единую программу вычисления характеристик транзистора.

*Модель подвижности* имеет большое значение при расчетах характеристик транзистора. Она оказывает влияние не только на динамические, но и на статические параметры.

В расчетах использована модель подвижности Коги – Томаса, которая отражает насыщение скорости носителей заряда под действием электрического поля простой формулой для подвижности носителей.

Эта формула содержит всего два параметра: подвижность при слабом поле –  $\mu_f$  и скорость насыщения –  $v_{\text{sat}}$ .

Формула для подвижности имеет следующий вид:

$$\mu_d = \frac{\mu_f}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu_f E_{\leftrightarrow}}{v_{\text{sat}}}\right)^2}}. \quad (11)$$

Символом  $E_{\leftrightarrow}$  обозначена параллельная скорости носителей компонента электрического поля.

Модель Коги – Томаса также учитывает рассеяние носителей поверхностью канала. Если обозначить объемную подвижность материала как  $\mu_{ss}$ , то приповерхностная подвижность определится формулой:

$$\mu_s = \frac{\mu_{ss}}{\left(\frac{E_y}{E_{ss}}\right)^4}, \quad (12)$$

где  $E_y$  – перпендикулярная каналу компонента напряженности поля,  $E_{ss}$  – общая напряженность поля в области канала.

Таким образом, в знаменателе (12) стоит косинус наклона вектора напряженности к нормали поверхности в 4 степени.

Полная подвижность, как обычно, определится следующей формулой:

$$\mu = \frac{\mu_d \mu_s}{\mu_d + \mu_s}. \quad (13)$$

*Поверхностные состояния.* Влияние поверхностных состояний на распределение заряда в структуре устройства может быть учтено с использованием соответствующей статистики распределения при расчете плотности заряда в уравнении Пуассона (путем включения поверхностных состояний через легированный слой).

Поверхностные состояния обычно моделируются феноменологическим образом на основе предположения о существовании их в виде акцептора и донора с определенной энергией ионизации.

Возможно, их ионизация на самом деле не следует предполагаемой ферми-статистике. В рассматриваемой модели мы пренебрегли особыми состояниями поверхности.

*Дискретизация по конечным объемам.* На поверхности раздела материалов гетероперехода имеется скачок их параметров.

Разрыв может вызвать числовые проблемы, особенно для пространственной производной поляризации  $P_x$ .

В нашем случае это может быть исправлено введением плавного изменения доли  $Al(y)$ .

Вместо этого можно использовать для дискретизации и решения уравнений метод конечных объемов, имеющийся в комsole, и выбрать прямоугольную форму сеточных элементов со стороны, параллельной границе раздела материалов.

Этот метод и был использован.

### **Результаты и их обсуждение**

В ходе расчета COMSOL Multiphysics запоминает огромные таблицы результатов, из которых затем можно сформировать наглядные графики зависимости одних величин от других.

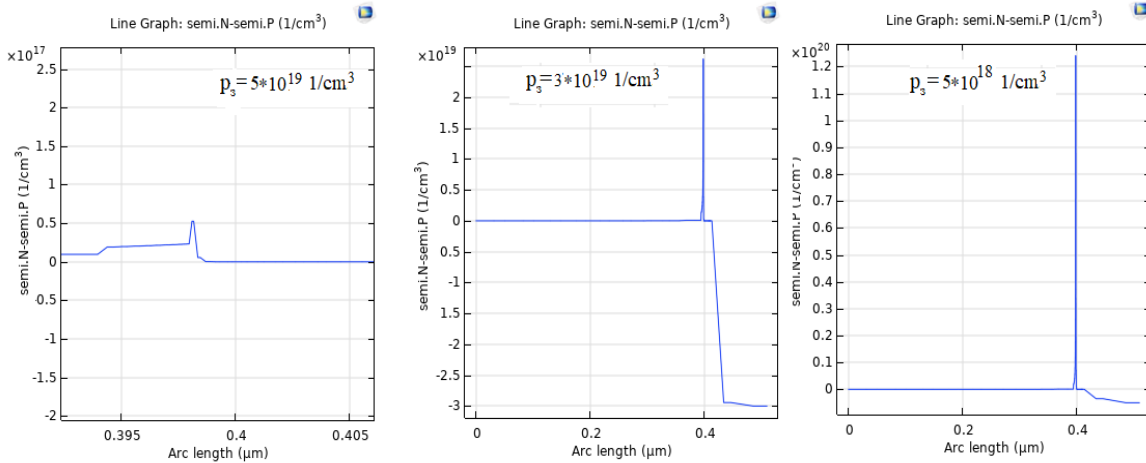
Показанная на рисунке 1 двумерная модель ГПТ предполагает, что зависимость всех характеристик от третьей координаты  $Z$  отсутствует. Ширина транзистора по третьей координате равна 1 мкм.

С учетом противоречивых требований к уровню легирования барьерного слоя была выбрана компромиссная величина концентрации донорной примеси –  $10^{16} \text{ см}^{-3}$ . Все дальнейшие результаты получены для этого барьерного слоя.

*Зависимость концентрация свободных электронов в канале транзистора от концентрации акцепторной примеси в затворе.*

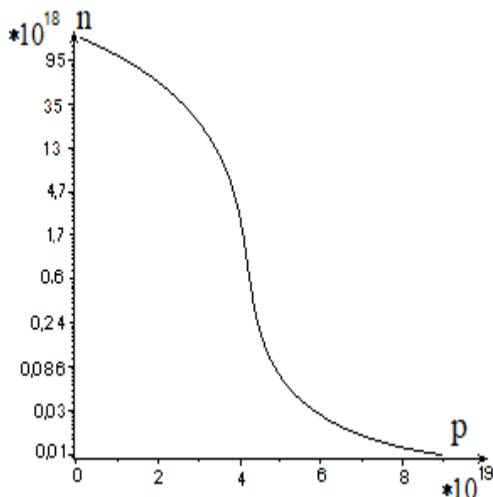
Данная зависимость получена путем многократного «прогона» модели при нулевых величинах напряжений смещения. В каждом из них формировался график зависимости концентрации электронов в центре подзатворной области как функция вертикальной координаты. Для примера на рисунке 2 показаны результаты трех про-

гонов при концентрации донорной примесе в барьерном слое  $n_0 = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ . Видно, что ДЭГ практически не затрагивается затворным p-n-переходом, если концентрация акцептора в затворе  $p_3$  равна или меньше  $5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . Концентрация свободных электронов в ДЭГ при этом составит  $1,4 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ . Увеличивая легирование затвора, можно снизить электронную плотность в ДЭГ, но заметное снижение до  $10^{17} \text{ см}^{-3}$  (т. е. на три порядка) получается начиная с величины  $p_3 = 10^{19} \text{ см}^{-3}$ . Ясно, что при таком уровне легирования будет невозможно получить достаточную для практики величину пробивного напряжения затворного перехода.

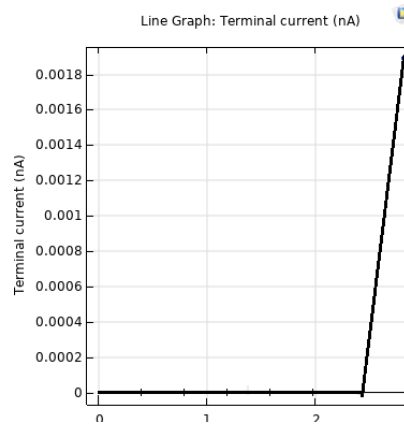


**Рисунок 2 – Концентрация свободных электронов в подзатворной области при различных величинах степени легирования затвора**

На рисунке 3 показана зависимость концентрации свободных электронов в центре подзатворной области на вершине канального слоя ( $n$ ) от концентрации акцепторов в затворе ( $p$ ).



**Рисунок 3 – Зависимость концентрации свободных электронов в ДЭГ от концентрации акцептора в затворе**

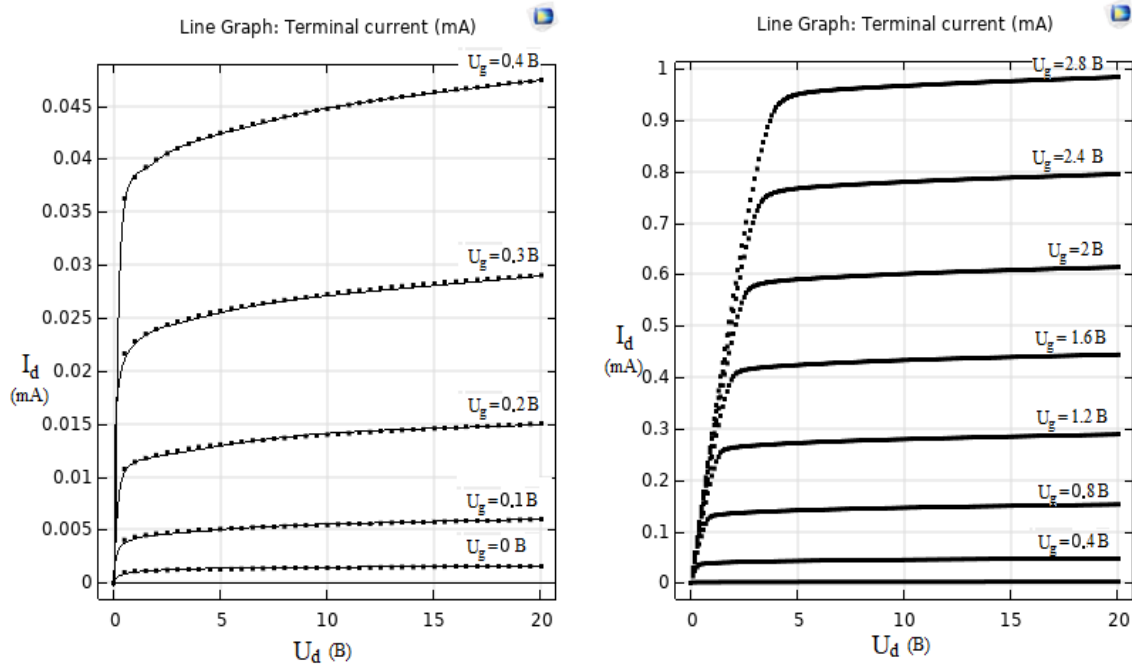


**Рисунок 4 – Входная ВАХ транзистора ( $U_d = 0$ )**

Из графика (рисунок 3) видно, что для полного уничтожения проводимости канала требуется легирование затвора на уровне  $7 - 8 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ . При этом наверно

заметную величину будет иметь туннельный ток затвора, в результате чего заметную величину составит входная проводимость транзистора.

Данная модель не включает в себя физику туннельного эффекта и не учитывает его. На рисунке 4 показан график входной ВАХ транзистора. Как видно, в пределах напряжений на затворе от 0 до 2,5 В – это типичная ВАХ р-n-перехода с исчезающе малыми токами, порядка  $10^{-12}$  А. Таким образом, по величине входной проводимости ГПТ с р-затвором можно отнести к высокоомным приборам.



**Рисунок 5 – Выходные ВАХ, построенные моделью транзистора**

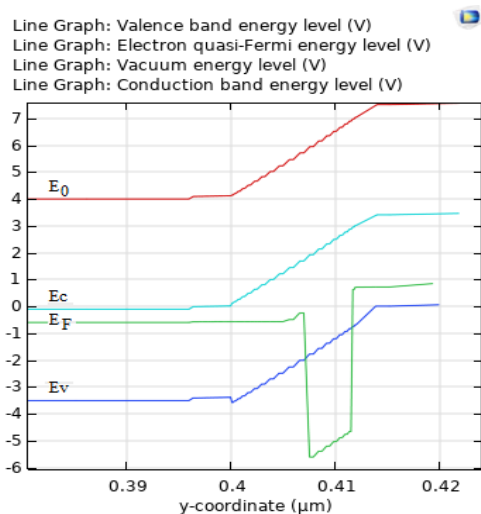
Выходные ВАХ представляют большой интерес у проектировщиков устройств. На рисунке 5 представлены графики построенных моделью выходных вольтамперных характеристик. График слева описывает случай малых напряжений на затворе, а график справа охватывает весь интервал рабочих затворных напряжений. Получаются типичные «транзисторные» ВАХ с крутым в начале и пологим в дальнейшем участками, однако ток стока ( $I_d$ ) при нулевом затворном напряжении хотя и очень мал, но в ноль не обращается.

В такой ситуации не вполне ясно, как определить пороговое напряжение транзистора. Можно использовать распределение границ энергетических зон и определить пороговое напряжение как нормированное на элементарный заряд расстояние между дном зоны проводимости и уровнем Ферми.

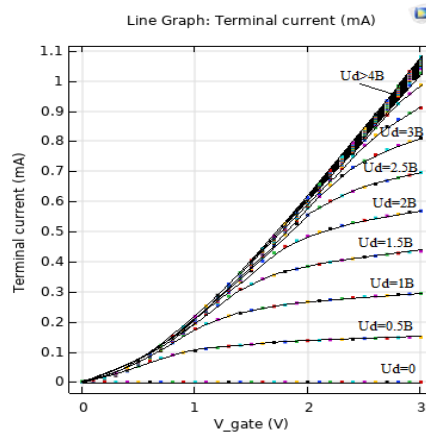
На рисунке 6 приведена диаграмма зонных границ в районе канала транзистора. Если следовать предлагаемой методике, то величина порогового напряжения составит 0,6 В.

Возможно, больше информации о величине порогового напряжения даст вид прямой проходной ВАХ (зависимость стокового тока от напряжения на затворе). График данной зависимости показан на рисунке 7.

Видно, что при небольших величинах стокового напряжения ВАХ имеют точку перегиба приблизительно при  $U_g \sim 0,6$  В. Эту величину и можно принять в качестве порогового напряжения.



**Рисунок 6 – Распределение зонных границ полупроводника в районе канала (0,4 мкм)**



**Рисунок 7 – Графики прямой проходное ВАХ транзистора**

### Заключение

Построенная в COMSOL Multiphysics модель нитридного ГПТ с р-затвором дает правдоподобные результаты. При необходимости ее можно использовать для оптимизации в ходе изготовления таких приборов по параметрам размеров и степени легирования областей. Помимо прочего из полученной модели вытекают и пороки данного типа транзисторов – необходимость сильного легирования затвора, что приводит к малым значениям его пробивного напряжения, низкому значению порогового напряжения и, следовательно, чувствительности к помехам, а также сложности изготовления.

Мультифизичность среды COMSOL Multiphysics должна позволить получать на основе созданной модели электрические, тепловые и др. характеристики ГПТ.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Куэй, Р. Электроника на основе нитрида галлия / Р. Куэй. – М. : Техно-сфера, 2011. – 587 с.
2. Zineddine, T. Design and analysis of 10 nm T-gate enhancement-mode MOS-HEMT for high power microwave applications / T. Zineddine, H. Zahra, M. Zitouni // J. of Sci. Adv. Mater. Devices. – 2019. – № 4. – P. 180–187.
3. Данлэп, У. Введение в физику полупроводников : пер. с англ. / У. Данлэп. – М. : Изд-во иностр. лит., 2011. – 430 с.
4. Исследование поляризаций нитридных соединений (Al, Ga, AlGa)N и зарядовой плотности различных интерфейсов на их основе / И. А. Супрядкина [и др.] // Физика и техника полупроводников. – 2013. – Т. 47, № 12. – С. 1647–1652.
5. Gate leakage suppression and breakdown voltage enhancement in p-GaN GJT transistors using metal / graphene gates / G. Zhou [et al.] // IEEE Trans. Electron Devices. – 2019. – Vol. 67. – P. 875–880.
6. Нормально-закрытый транзистор с затвором р-типа на основе гетероструктур AlGaIn / GaN / В. И. Егоркин [и др.] // Известия вузов. Электроника. – 2020. – Т. 25, № 5. – С. 391–401.
7. Development of UV image intensifier tube with GaN photocathode / I. Mizuno [et al.] // Proc. of SPIE. – 2008. – Vol. 6945. – P. 69451N-1 – 69451N-11.

## REFERENCES

1. Kuei, R. *Ehlektronika na osnove nitrida galliya* / R. Kuei. – M. : Tekhno-sfera, 2011. – 587 s.
2. Zineeddine, T. Design and analysis of 10 nm T-gate enhancement-mode MOS-HEMT for high power microwave applications / T. Zineeddine, H. Zahra, M. Zitouni // *J. of Sci. Adv. Mater. Devices*. – 2019. – № 4. – P. 180–187.
3. Danlep, U. *Vvedenie v fiziku poluprovodnikov : per. s angl.* / U. Danlep. – M. : Izd-vo inostr. lit., 2011. – 430 s.
4. *Issledovanie polarizatsii nitridnykh soedinenii (Al, Ga, AlGa)N i zaryadovoi plotnosti razlichnykh interfeisov na ikh osnove* / I. A. Supryadkina [i dr.] // *Fizika i tekhnika poluprovodnikov*. – 2013. – T. 47, № 12. – С. 1647–1652.
5. Gate leakage suppression and breakdown voltage enhancement in p-GaN GJT transistors using metal / graphene gates / G. Zhou [et al.] // *IEEE Trans. Electron Devices*. – 2019. – Vol. 67. – P. 875–880.
6. *Normal'no-zakrytyi tranzistor s zatvorom p-tipa na osnove geterostruktur AlGaIn / GaN* / V. I. Egorkin [i dr.] // *Izvestiya vuzov. Elektronika*. – 2020. – T. 25, № 5. – S. 391–401.
7. Development of UV image intensifier tube with GaN photocathode / I. Mizuno [et al.] // *Proc. of SPIE*. – 2008. – Vol. 6945. – P. 69451N-1 – 69451N-11.

*Рукапіс пастуніў у рэдакцыю 27.10.2025*

**Григорий Семенович Римский<sup>1</sup>, Юрий Владимирович Радюш<sup>2</sup>,  
Игорь Иванович Макоед<sup>3</sup>, Михаил Алексеевич Буневич<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., зав. отраслевой лаб. радиационных воздействий  
Научно-практического центра Национальной академии наук Беларуси по материаловедению

<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., ведущий науч. сотрудник лаб. радиационных воздействий  
Научно-практического центра Национальной академии наук Беларуси по материаловедению

<sup>3</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>4</sup>науч. сотрудник науч.-исслед. лаб. 5.1

«Многofункциональные металлоксидные композитные материалы»

Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

**Gregory Rymiski<sup>1</sup>, Yuriy Radyush<sup>2</sup>, Igor Makoed<sup>3</sup>, Mikhail Bunevich<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

Head of the Industrial Laboratory of Radiation Effects

of the Scientific-Practical Materials Research Centre of National Academy of Sciences of Belarus

<sup>2</sup>Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Leading Researcher  
of the Industrial Laboratory of Radiation Effects of the Scientific-Practical Materials Research Centre  
of National Academy of Sciences of Belarus

<sup>3</sup>Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics  
of Brest State A. S. Pushkin University

<sup>4</sup>Researcher of the 5.1 Research Laboratory «Multifunctional metal oxide composite materials»  
of Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics  
e-mail: <sup>1</sup>rymsky@physics.by; <sup>3</sup>igmak2010@yandex.ru

## ВЛИЯНИЕ ОБЛУЧЕНИЯ ГАММА-КВАНТАМИ НА СТРУКТУРУ И ДИНАМИКУ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ ФЕРРИТОВ $Co_{1-x}Zn_xFe_2O_4$ ( $x = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1$ )

Модифицированным золь-гель методом получены твердые растворы ферритов  $Co_{1-x}Zn_xFe_2O_4$  ( $x = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1$ ). Методами рентгеновской дифракции, рамановской и диэлектрической спектроскопии проведено исследование влияния  $\gamma$ -облучения дозами (2,5, 5 и 10) кГр на изменение структуры, динамики кристаллической решетки. Установлено, что параметры кристаллической решетки образцов остаются неизменными под действием ионизирующего гамма-излучения. Согласно данным спектроскопии комбинационного рассеяния света, малые дозы облучения способствуют формированию радиационных дефектов и перераспределению катионов о тетра- и октаэдрических положениям в шпинельной структуре.

**Ключевые слова:** феррит кобальта, феррит цинка, кристаллическая структура, рамановская спектроскопия, гамма-облучение.

## *Influence of Gamma irradiation on the Structure and Dynamics of the Crystal Lattice of Solid Solutions of Ferrites $Co_{1-x}Zn_xFe_2O_4$ ( $x = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1$ )*

Solid solutions of  $Co_{1-x}Zn_xFe_2O_4$  ferrites ( $x = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1$ ) were obtained using a modified sol-gel method. X-ray diffraction, Raman, and dielectric spectroscopy were used to study the effect of  $\gamma$ -irradiation at doses of 2,5, 5, and 10 kGy on changes in the structure and dynamics of the crystal lattice. It was found that the crystal lattice parameters of the samples remain unchanged under the influence of ionizing gamma radiation. According to Raman spectroscopy data, low irradiation doses promote the formation of radiation defects and the redistribution of cations among tetra- and octahedral positions in the spinel structure.

**Key words:** cobalt ferrite, zinc ferrite, crystal structure, Raman spectroscopy, gamma irradiation.

### Введение

Нанокристаллические ферриты привлекают особое внимание благодаря уникальным электрическим, оптическим и магнитным свойствам [1–3], что обуславливает

их широкое применение во многих технологических областях, таких как создание и использование фотокатализаторов и фотоактивных материалов, эффективно поглощающих электромагнитное излучение защитных покрытий, адресная доставка магнитных лекарств, гипертермия при лечении онкологических заболеваний и др. [1–4]. Среди широкого класса ферритов-шпинелей, обладающих высоким потенциалом практического использования, выделяют феррит кобальта ( $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ ) и феррит цинка ( $\text{ZnFe}_2\text{O}_4$ ). Соединение  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  обладает высокой величиной намагниченности насыщения и коэрцитивной силы, большой магнитной анизотропией и другими физическими свойствами [5–7]. Оно имеет структуру обращенной шпинели, в которой катионы  $\text{Co}^{2+}$  расположены в тетраэдрических позициях, а катионы  $\text{Fe}^{3+}$  поровну распределены между тетраэдрическими и октаэдрическими позициями в структуре шпинели.  $\text{ZnFe}_2\text{O}_4$  кристаллизуется в структуре нормальной шпинели с катионами  $\text{Zn}^{2+}$ , расположенными в тетраэдрических позициях и катионами железа  $\text{Fe}^{3+}$ , занимающими октаэдрические позиции [8]. Шпинель  $\text{ZnFe}_2\text{O}_4$  проявляет антиферромагнитное упорядочение и релаксационные процессы диэлектрической поляризации недебаевского типа [9; 10]. Замещение катионов  $\text{Co}^{2+}$  катионами  $\text{Zn}^{2+}$  в  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  вызывает перераспределение катионов между тетраэдрическими и октаэдрическими позициями, что приводит к изменениям структурных, оптических, магнитных и других свойств [11–13] и служит основанием для использования системы твердых растворов  $\text{Co}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$  в качестве модельной при исследовании влияния внешних факторов на свойства ферритов.

Интерес к изучению воздействия гамма-квантов на физические свойства ферритов  $\text{Co}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$  определяется их потенциальным применением в условиях высокой радиации и возможностью целенаправленного регулирования свойств ферритов в процессе формирования дефектов, вызванных облучением [14].

В частности, гамма-облучение способно изменять диэлектрические свойства, генерируя дефекты и изменяя динамику носителей заряда [15]. Вместе с тем причины влияния гамма-излучения на кристаллическую структуру и физические свойства системы ферритов  $\text{Co}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$  остаются недостаточно полно изученными.

Целью работы является выяснение влияния радиационно-индуцированных изменений, вызванных гамма-облучением дозами 2,5, 5 и 10 кГр на изменение параметров структуры и динамики кристаллической решетки в твердых растворах наноразмерных ферритов  $\text{Co}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$ .

### **Методы исследований**

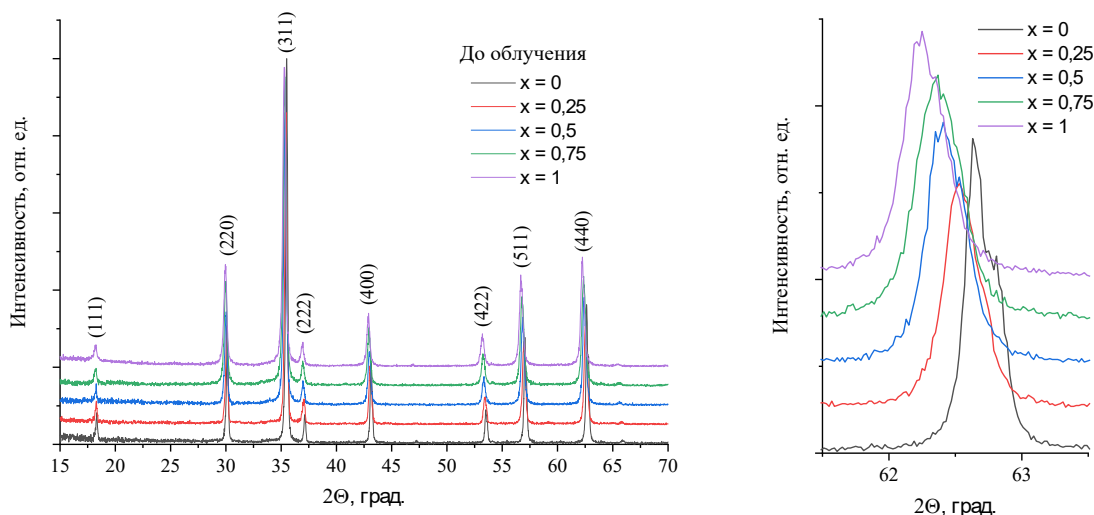
Твердые растворы наночастиц ферритов системы  $\text{Co}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$  ( $x = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ ) были синтезированы модифицированным золь-гель методом с использованием нитратов металлов [ $\text{Co}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ ;  $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$  (все 99,9 %)] взятых в соответствующих стехиометрических соотношениях. Соли растворяли в дистиллированной воде. В качестве хелатирующего агента использовали лимонную кислоту. Осаждающим агентом являлся водный раствор аммиака, с использованием которого рН довели до 9 единиц. Полученный раствор выпаривали при 80 °С при постоянном перемешивании. Образовавшийся гель сжигали в муфельной печи при 350 °С. Полученный таким образом порошковый прекурсор прокаливали при температуре 650 °С в течение 4 часов на воздухе.

Рентгенофазовые и рентгеноструктурные исследования проводили методом рентгеновской дифракции с использованием излучения  $\text{Cu-K}\alpha$  ( $\lambda = 0,154178$  нм) при комнатной температуре в диапазоне углов  $2\theta$  15° – 70° с шагом 0,02°. Полнопрофильный анализ рентгенограмм проводили с использованием метода Ритвельда в программном комплексе FullProf. Средние размеры кристаллитов образцов рассчитывали

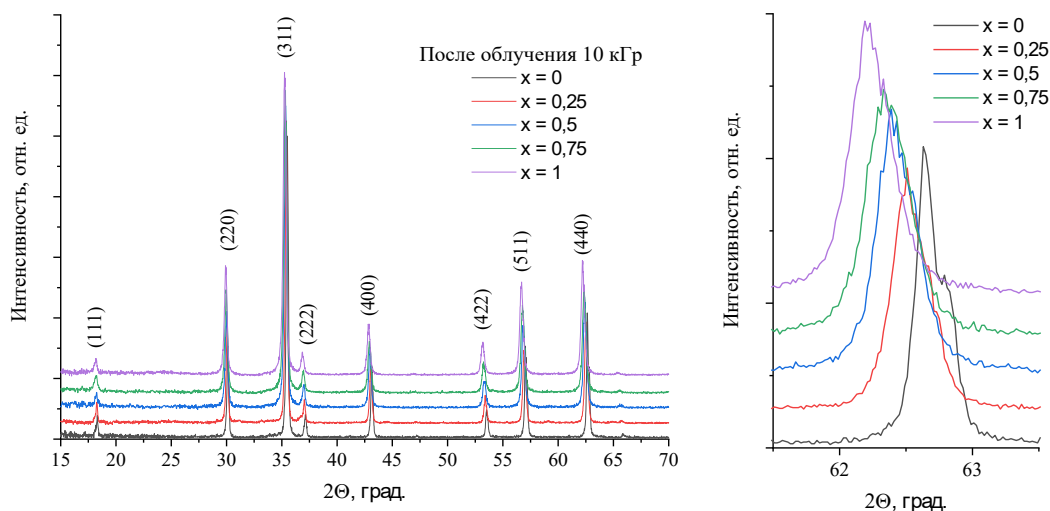
на основе шпинельной структуры нанокристаллов, определяя уширение пика (311) с использованием формулы Шеррера. Спектры комбинационного рассеяния были получены на спектрометре с длиной волны возбуждающего излучения 532 нм и мощностью 1,5 Вт. Облучение образцов проводилось гамма-квантами дозами 5 и 10 кГр, полученными при распаде изотопа  $Co^{60}$ .

### Результаты экспериментов и их обсуждение

На рисунках 1 и 2 представлены рентгенограммы образцов твердых растворов наноразмерных ферритов  $Co_{1-x}Zn_xFe_2O_4$  до и после облучения гамма-квантами дозой 10 кГр.



**Рисунок 1 – Рентгеновские дифрактограммы твердых растворов ферритов  $Co_{1-x}Zn_xFe_2O_4$  до облучения гамма-квантами**



**Рисунок 2 – Рентгеновские дифрактограммы твердых растворов ферритов  $Co_{1-x}Zn_xFe_2O_4$  после облучения гамма-квантами дозой 10 кГр**

По результатам рентгеноструктурного анализа установлено, что рефлексы всех образцов описываются в рамках шпинельной структуры с пространственной группой  $Fd\bar{3}m$ . На спектре не выявлено каких-либо вторичных рефлексов, связанных с примесями, что свидетельствует о полном протекании синтеза. При замещении кобальта

цинком наблюдается линейное изменение параметра решетки  $a$  в соответствии с законом Вегарда. Для  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  параметр кубической ячейки составляет  $a = 8,3768 \text{ \AA}$ , а для  $\text{ZnFe}_2\text{O}_4$   $a = 8,4297 \text{ \AA}$ . Наблюдаемый рост параметра кристаллической решетки  $a$  с увеличением содержания Zn связан с переходом от обращенной шпинели ( $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ ) к нормальной ( $\text{ZnFe}_2\text{O}_4$ ). Это обусловлено тем, что в твердых растворах  $\text{Co}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$  ионы  $\text{Zn}^{2+}$  ( $r_{(\text{тет.})} = 0,600 \text{ \AA}$ ) в основном занимают тетраэдрические позиции. В результате ионы  $\text{Fe}^{3+}$  из тетраэдрических позиций ( $r_{(\text{тет.})} = 0,490 \text{ \AA}$ ) вытесняются в октаэдрические позиции ( $r_{(\text{окт.})} = 0,645 \text{ \AA}$ ) [15].

В таблице 1 приведены параметры кристаллической решетки, полученные путем уточнения соответствующих рентгенограмм по методу Ритвельда. Средний размер кристаллитов ( $D$ ) и микродеформации ( $\epsilon$ ) определяли по данным рентгеновской дифракции с использованием уравнения Уильямсона – Холла:

$$\beta \cos \Theta = \frac{K\lambda}{D} + 4\epsilon \sin \Theta \quad (1)$$

где  $K$  – константа Шеррера (0,9),  $\lambda$  – длина волны рентгеновского излучения,  $\beta$  – ширина пика на полувысоте рентгеновской дифракции (после вычета инструментального уширения), а  $\theta$  – угол Брэгга.

Из уравнения (1), построив зависимость  $\beta \cos \theta$  от  $4 \sin \theta$ , определили величины  $D$  и  $\epsilon$  по точке пересечения графика зависимости  $\beta \cos \theta$  от  $4 \sin \theta$  с вертикальной осью  $\beta \cos \theta$  и его наклону. По результатам расчетов обнаружено уменьшение среднего размера кристаллитов и микродеформации в кристаллической решетке полученных образцов. Это связано со структурной перестройкой типа шпинели. Такая перегруппировка ионов может вызывать релаксацию кристаллической решетки через оптимизацию межатомных расстояний и уменьшение локальных искажений. В результате формируется более сбалансированная структура с пониженными микронапряжениями, несмотря на уменьшение размера кристаллитов, что объясняется установлением нового энергетически выгодного баланса межатомных взаимодействий в шпинельной матрице. Анализ результатов исследований структурных параметров после облучения свидетельствуют о том, что гамма-кванты в исследованном диапазоне доз не вызывают заметных изменений структурных параметров.

Таблица 1 – Параметры кристаллической решетки  $a$ , средние размеры кристаллитов и микродеформации твердых растворов  $\text{Co}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$  до и после облучения дозой  $10 \text{ кГр}$

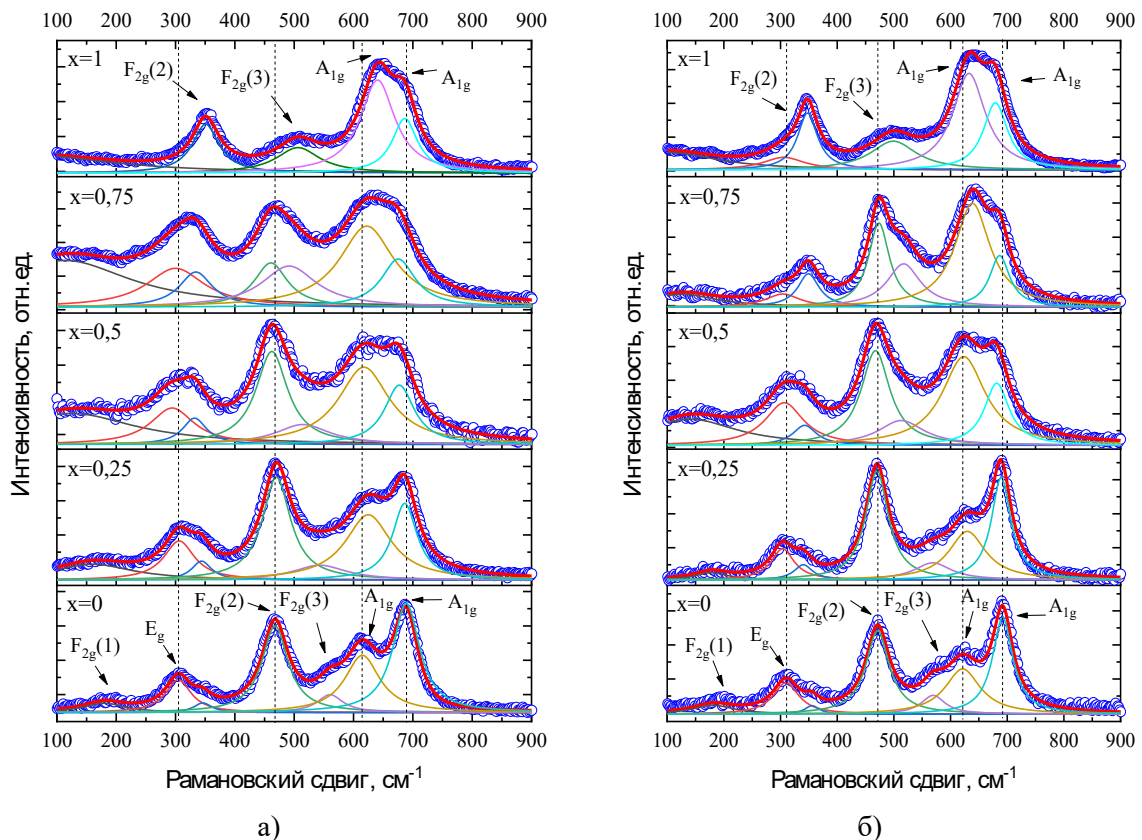
| x    | Параметры структуры |                 |                     |                  |                 |                     |
|------|---------------------|-----------------|---------------------|------------------|-----------------|---------------------|
|      | До облучения        |                 |                     | После облучения  |                 |                     |
|      | $a, \text{ \AA}$    | $D, \text{ нм}$ | $\epsilon, 10^{-3}$ | $a, \text{ \AA}$ | $D, \text{ нм}$ | $\epsilon, 10^{-3}$ |
| 0    | 8,3768              | 55,952          | 0,988               | 8,3761           | 54,416          | 0,603               |
| 0.25 | 8,3939              | 48,518          | 0,920               | 8,3946           | 51,584          | 1,200               |
| 0.5  | 8,4055              | 32,960          | 0,627               | 8,4062           | 30,297          | 0,416               |
| 0.75 | 8,4144              | 29,713          | 0,526               | 8,4148           | 28,670          | 0,616               |
| 1    | 8,4297              | 25,002          | 0,255               | 8,4312           | 27,863          | 0,386               |

Для выявления образующихся в наноразмерных ферритах при облучении гамма-квантами дефектов, которые приводят к изменению формы и интенсивности колебательных мод кристаллической решетки, были получены спектры комбинационного рассеяния света твердых растворов до и после облучения. Результаты представлены на рисунке 3а. В спектре  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  обнаружены шесть активных рамановских мод: три сигнала  $F_{2g}(1-3)$ ,  $E_g$  и два сигнала  $A_{1g}(1, 2)$ . Моды  $E_g$  ( $303 \text{ см}^{-1}$ ),  $F_{2g}$  ( $470 \text{ см}^{-1}$ ),  $A_{1g}(1)$

(615  $\text{cm}^{-1}$ ) и  $A_{1g}(2)$  (680  $\text{cm}^{-1}$ ) соответствуют колебательным модам, связанным с октаэдрическими и тетраэдрическими позициями.

Спектр  $\text{ZnFe}_2\text{O}_4$  демонстрирует четыре активные рамановские моды: два сигнала  $F_{2g}$  (350  $\text{cm}^{-1}$  и 505  $\text{cm}^{-1}$ ) и два сигнала  $A_{1g}$  (640  $\text{cm}^{-1}$  и 689  $\text{cm}^{-1}$ ). Спектры соединений  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  и  $\text{ZnFe}_2\text{O}_4$  хорошо согласуются с данными независимых исследований [16; 17]. По мере увеличения замещения кобальта цинком на спектре наблюдается смешение мод, обусловленное перераспределением катионов. Расщепление линии  $A_{1g}$  в спектрах комбинационного рассеяния света подтверждает формирование в процессе замещения твердых растворов со структурой обращенной шпинели. Изменение соотношения абсолютных величин интенсивностей пиков  $A_{1g}(1)$  и  $A_{1g}(2)$  свидетельствует об изменении распределения катионов  $\text{Co}^{2+}$  и  $\text{Fe}^{3+}$  по тетра- и октаэдрическим положениям с ростом концентрации катионов  $\text{Zn}^{2+}$ .

В твердых растворах с замещением в интервале  $x = 0 - 0,75$  после облучения гамма-квантами на спектрах комбинационного рассеяния света наблюдается небольшое смещение всех рефлексов в область больших волновых чисел, а при  $x = 1$  – небольшое смещение всех рефлексов в область малых волновых чисел. Так как параметры решетки меняются слабо, возможно, это связано с изменением эффективной массы окта- и тетракомплексов, обусловленной локальными дефектами (нарушением стехиометрии) и радиационно обусловленным перераспределением катионов по окта- и тетрапод решеткам.



**Рисунок 3 – Спектры комбинационного рассеяния света твердых растворов ферритов системы  $\text{Co}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$  ( $x = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$ ) до (а) и после (б) облучения гамма-квантами дозой 10 кГр**

**Заключение**

С использованием модифицированного золь-гель метода получены твердые растворы ферритов  $\text{Co}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$  ( $x = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ ). Установлено, что параметр

кристаллической решетки  $a$  увеличивается от 8,3768 Å в  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  до 8,4297 Å в  $\text{ZnFe}_2\text{O}_4$ , что связано с переходом от обращенной ( $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ ) к нормальной ( $\text{ZnFe}_2\text{O}_4$ ) шпинели.

Средний размер кристаллитов и микродеформации уменьшается от  $D = 55,952$  нм и  $\varepsilon = 0,988$  для  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  до  $D = 25,002$  нм и  $\varepsilon = 0,255$  для  $\text{ZnFe}_2\text{O}_4$ . Параметры кристаллических решеток твердых растворов ферритов  $\text{Co}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$  ( $x = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ ) слабо изменяются под действием ионизирующего гамма-излучения. Однако результаты спектроскопии комбинационного рассеяния света подтверждают влияние малых доз облучения на формирование радиационных дефектов и перераспределение катионов по тетра- и октаэдрическим положениям в шпинельной структуре. Результаты исследования представляют интерес в качестве справочного материала, который может быть использован при интерпретации результатов исследования диэлектрических, оптических и магнитных свойств полученных материалов.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ (REFERENCES)

1. Effect of cobalt substitution on structural, elastic, magnetic and optical properties of zinc ferrite nanoparticles / T. R. Tatarchuk [et al.] // *J. Alloy. Compd.* – 2018. – Vol. 731. – P. 1256–1266.
2. Investigation of thermal, structural, morphological and photocatalytic properties of  $\text{Cu}_x\text{Co}_{1-x}\text{Fe}_2\text{O}_4$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) nanoparticles embedded in  $\text{SiO}_2$  matrix / T. Dippong [et al.] // *Mater. Characterization.* – 2020. – Vol. 163. – P. 110268-1 – 110268-10.
3. Cobalt Ferrite Nanospheres as a Potential Magnetic Adsorbent for Chromium(VI) Ions / S. Jovanovic [et al.] // *J. Nanoscience and Nanotechnology.* – 2019. – Vol. 19. – P. 5027–5034.
4. Facile synthesis of  $\text{Co}_{0,5}\text{Zn}_{0,5}\text{Fe}_2\text{O}_4$  nanoparticles decorated reduced graphene oxide hybrid nanocomposites with enhanced electromagnetic wave absorption properties / J. Zhang [et al.] // *Cer. Int.* – 2020. – Vol. 46, nr 10. – P. 15925–15934.
5. Study of  $\text{Co}_{0,5}\text{Zn}_{0,5}\text{Fe}_2\text{O}_4$  Nanoparticles for Magnetic Hyperthermia / A. S. Kamzin [et al.] // *Physics of the Solid State* – 2017. – Vol. 59, nr 1. – P. 156–163.
6. Preparation of Magnetic  $\text{Co}_{0,5}\text{Zn}_{0,5}\text{Fe}_2\text{O}_4$  Nanoparticles and Their Adsorption Performances of Congo Red / S. Li [et al.] // *J. Nanoscience and Nanotechnology.* – 2017. – Vol. 17. – P. 5415–5422.
7. Electrochemical synthesis of  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  porous nanosheets for visible light driven photoelectrochemical applications / H. Yang [et al.] // *New J. Chem.* – 2013. – Vol. 37. – P. 2965–2968.
8. Ayyappan, S. Effect of Digestion Time on Size and Magnetic Properties of Spinel  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  Nanoparticles / S. Ayyappan, J. Philip, B. Raj // *J. Phys. Chem. C.* – 2009. – Vol. 113. – P. 590–596.
9. Effect of preparation conditions on physicochemical, surface and catalytic properties of cobalt ferrite prepared by coprecipitation / G. A. El-Shobaky [et al.] // *J. Alloy. Compd.* – 2010. – Vol. 493. – P. 415–422.
10. Studying the effect of Zn-substitution on the magnetic and hyperthermic properties of cobalt ferrite nanoparticles / V. Marneli [et al.] // *Nanoscale.* – 2016. – Vol. 8. – P. 10124-1 – 10124-14.
11. Dielectric, magnetic and electrical properties of  $\text{ZnFe}_2\text{O}_4$  ceramics / A. Mekap [et al.] // *J. Mater Sci: Mater Electron.* – 2013. – Vol. 24. – P. 4757–4763.
12. Investigation of structural, dielectric and electrical properties of  $\text{ZnFe}_2\text{O}_4$  composite / D. Mohanty [et al.] // *Materials Today : Proceedings.* – 2020. – Vol. 33, nr 8. – P. 4971–4975.
13. Structural, Optical, and Magnetic Properties of Zn-Doped  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  Nanoparticles / T. Tatarchuk [et al.] // *Nanoscale Research Letters.* – 2017. – Vol. 12, nr 1. – P. 141-1 – 141-11.
14. Exploring the Impact of Zn Substitution on the Physicochemical Properties of Cobalt Ferrite Nanoparticles / S. Jovanovic [et al.] // *J. Phys. Chem. C.* – 2025. – Vol. 129, nr 28. – P. 12966–12976.
15. Microwave Dielectric and Magnetic Properties of Co-Zn Ferrites / A. R. Lamani [et al.] // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineeri.* – 2015. – Vol. 73. – P. 012124-1 – 012124-5.
16. Effect of gamma irradiation on the structural and magnetic properties of Co-Zn spinel ferrite nanoparticles / A. V. Raut [et al.] // *Materials Research Bulletin.* – 2015. – Vol. 63. – P. 123–128.
17. Effect of  $^{60}\text{Co}$  gamma irradiation on dielectric and complex impedance properties of  $\text{Dy}^{3+}$  substituted Ni–Zn nanoferrites / M. Veena [et al.] // *J. Magnetism and Magnetic Materials.* – 2016. – Vol. 419. – P. 375–385.

**Александр Евгеньевич Будько**

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. фундаментальной математики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Alexander Budzko**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics  
of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: [budzko@brsu.by](mailto:budzko@brsu.by)

## ТЮРИНГОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ СО СТАНДАРТНОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ ДВИЖЕНИЯ ГОЛОВКИ

*Работа посвящена получению нижних оценок сложности вычислений на машинах Тьюринга. Исследуется машина Тьюринга с одной лентой и одной головкой. Исследование проводится с помощью метода, основанного на специальном графическом представлении траектории движения головки. Доказано, что если емкостной характеристикой работы машины является полиномиальная функция степени  $k$  ( $k \geq 2$ ), а траектория движения головки – стандартной, то нижняя оценка временной характеристики работы машины является полиномиальной функцией степени  $k + 1$ .*

**Ключевые слова:** машина Тьюринга, временная и емкостная характеристики работы машины, полиномиальная функция.

### *Turing Computations with a Standard Head Trajectory*

*This paper is devoted to establishing lower bounds on the computational complexity of Turing machines. The study focuses on a single-tape, single-head Turing machine. The analysis is carried out using a method based on a specific graphical representation of the head movement trajectory. It is proven that if the space complexity of the machine is given by a polynomial function of degree  $k$  ( $k \geq 2$ ), and the head trajectory is standard, then the lower bound of the time complexity of the machine is a polynomial function of degree  $k + 1$ .*

**Key words:** Turing machine, time and capacitive characteristics of the machine, polynomial function.

### **Введение**

Получение нижних оценок временной характеристики вычислений на машинах Тьюринга представляет особый интерес в теории сложности вычислений. Одним из основных методов получения таких оценок является метод следов [1–4], который позволяет находить нижние оценки не более чем квадратичной сложности.

В [5–6] рассматривалась существенная сложность вычислений, под единицей измерения которой понималось либо изменение символа на ленте, либо изменение внутреннего состояния машины. Для данного вида сложности вычислений были получены отдельные нижние оценки. В [7] изложен обобщенный метод нитей, с помощью которого получены некоторые оценки временной и существенной сложности online-вычислений умножения.

В [8] предложена новая техника исследования тьюринговых вычислений, позволяющая получать нижние оценки. Данная техника основана на специальном графическом представлении тьюринговых вычислений. Доказано, что если емкостной характеристикой работы машины является линейная функция, то нижняя оценка временной характеристики работы машины является квадратичной функцией.

Основным результатом настоящей работы является доказательство следующего утверждения: если емкостной характеристикой работы машины является полиномиальная функция степени  $k$  и траектория движения головки – стандартной, то нижняя

оценка временной характеристики работы машины является полиномиальной функцией степени  $k + 1$ .

### Основная часть

В настоящей работе рассматриваются машины Тьюринга с одной лентой, одной головкой и с внешним алфавитом  $\{0,1\}$ . За один такт головка такой машины выполняет три действия: записывает в обозреваемую ячейку символ (может записать тот же); сдвигается влево или вправо к соседней ячейке или остается на месте; переходит в новое внутреннее состояние или остается в том же.

Рассмотрим работу машины  $M$  над начальной конфигурацией с длиной начальной записи  $n$ . Ячейки начальной записи занумеруем слева направо:  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . Будем считать, что слева от  $R_1$  головка не просматривает ни одной ячейки, а ячейки справа от  $R_n$  обозначим через  $R_{n+1}, R_{n+2}, R_{n+3}, \dots$ .

В [8] работа машины определенным образом разбивается на этапы. Каждому этапу будут соответствовать два противоположно направленных отрезка: правый, направленный слева направо, и левый, направленный справа налево. Левый отрезок располагается на строку ниже правого. Каждый отрезок проходит под изображением соответствующих просматриваемых ячеек. Отрезки  $(i + 1)$ -го ( $i \geq 1$ ) этапа располагаются под отрезками  $i$ -го этапа.

Правый и левый отрезки  $i$ -го ( $i \geq 1$ ) этапа обозначим соответственно через  $r_i$  и  $l_i$ . Через  $D_1$  обозначим количество ячеек, отличных от  $R_1, R_2, \dots, R_n$  и просматриваемых головкой с момента, когда она впервые попадает в ячейку  $R_{n+1}$  и до момента, когда она впервые после этого попадает в ячейку  $R_{n-1}$ .

Количество ячеек, отличных от  $R_1, R_2, \dots, R_n, R_{n+1}, \dots, R_{n+D_1}$  и просматриваемых головкой с того момента, когда она впервые попадает в ячейку  $R_{n+D_1+1}$  и до момента, когда она впервые после этого попадает в ячейку с номером  $R_{n+D_1-1}$ , обозначим через  $D_2$ . Значения  $D_3, D_4$  и т. д. определяются аналогично.

Начало отрезка  $r_1$  соответствует ячейке, обозреваемой в начальный момент. Конец отрезка  $r_1$  и начало отрезка  $l_1$  соответствует моменту, когда головка впервые попадает в ячейку  $R_{n+D_1}$ , конец отрезка  $r_2$  и начало отрезка  $l_2$  соответствует моменту, когда головка впервые попадает в ячейку  $R_{n+D_1+D_2}$ , и т. д.

Конец отрезка  $l_1$  и начало отрезка  $r_2$  соответствует моменту, когда головка впервые попадает в самую левую ячейку, просматриваемую в период между тем, как она впервые попала в ячейку  $R_{n+D_1}$  и впервые в ячейку  $R_{n+D_1+D_2}$ .

Конец отрезка  $l_2$  и начало отрезка  $r_3$  соответствует моменту, когда головка впервые попадает в самую левую ячейку, просматриваемую в период между тем, как она впервые попала в ячейку  $R_{n+D_1+D_2}$  и впервые в ячейку  $R_{n+D_1+D_2+D_3}$ , и т. д.

Часть правого отрезка  $r_i$  ( $i \geq 2$ ), проходящую под предшествующим левым отрезком  $l_{i-1}$ , обозначим через  $\gamma(r_i)$ .  $\gamma(r_1)$  определим как часть отрезка  $r_1$ , проходящую под изображением ячеек начальной записи. Часть отрезка  $r_i$  ( $i \geq 1$ ), расположенную правее части  $\gamma(r_i)$ , обозначим через  $\beta(r_i)$ .

**Определение 1.** *Длиной отрезка или его части будем называть количество ячеек, под изображением которых этот отрезок или его часть проходит.*

Длину отрезка или его части  $\alpha \in \{l_i, r_i, \gamma(r_i), \beta(r_i)\}$  будем обозначать через  $|\alpha|$ . Очевидно,  $|\gamma(r_i)| + |\beta(r_i)| = |r_i|$ ,  $|\beta(r_i)| = D_i$ , т. е.  $|r_i| = |\gamma(r_i)| + D_i$ , где  $i \geq 1$ . Через  $\delta$  обозначим количество всех отрезков  $r_i$  ( $i \geq 1$ ).

**Замечание 1.** Пусть  $g(n)$  – емкостная характеристика работы машины  $M$ . Через  $k_j$  ( $j \geq 1$ ) обозначим целое значение, удовлетворяющее условию

$$g(k_j - 1) - (k_j - 1) < \sum_{i=j}^{\delta} D_i \leq g(k_j) - k_j \quad (1)$$

**Замечание 2.** Количество значений  $k_j$ , удовлетворяющих условию  $k_j = i$ , обозначим через  $t_i$ . Очевидно,  $\sum_{i=1}^n t_i = \delta$ .

**Лемма 1** [8]. Пусть в последовательности  $k_1, k_2, \dots, k_{\delta}$  имеются члены  $i + B_1, i, i - B_2$ , где  $B_1 \geq 1, B_2 \geq 1$  и нет членов  $j$ , где  $i - B_2 < j < i + B_1, j \neq i$ . Тогда

$$t_i \geq \frac{1}{D_{max}} (g(i + B_1 - 1) - g(i - B_2) - B_1 - B_2 + 1), \quad (2)$$

где  $D_{max} = \max\{D_j | 1 \leq j \leq \delta\}$ .

Рассмотрим тьюринговые вычисления с емкостной характеристикой, равной

$$g(n) = C_k n^k + C_{k-1} n^{k-1} + C_{k-2} n^{k-2} + \dots + C_1 n + C_0, \quad (3)$$

где  $C_k, C_{k-1}, \dots, C_0$  – некоторые константы, не зависящие от  $n$  и  $C_k > 0$ . Это значит, емкость тьюринговых вычислений выражается полиномом степени  $k$ .

Введем обозначение  $B'_1 = B_1 - 1$ .

**Лемма 2.** Если емкостной характеристикой тьюринговых вычислений является полиномиальная функция (3), то значение  $t_i$  удовлетворяет условию

$$t_i \geq \frac{1}{D_{max}} \left( \sum_{m=1}^k i^{k-m} \sum_{j=1}^m C_{k+1-j} C_{k-j+1}^{m-j+1} \left( (B'_1)^{m-j+1} - (-1)^{m-j+1} (B_2)^{m-j+1} \right) - (B'_1 + B_2) \right), \quad (4)$$

где  $C_k^j = \frac{k!}{(k-j)!j!}$  – биномиальный коэффициент.

*Доказательство.*

Применим формулу (2) к функции (3). Для этого определим вначале значение  $g(i + B_1 - 1)$  в рассматриваемом случае:

$$g(i + B_1 - 1) = g(i + B'_1) = C_k (i + B'_1)^k + C_{k-1} (i + B'_1)^{k-1} + C_{k-2} (i + B'_1)^{k-2} + \dots + C_1 (i + B'_1) + C_0.$$

Аналогично получаем

$$g(i - B_2) = C_k (i - B_2)^k + C_{k-1} (i - B_2)^{k-1} + C_{k-2} (i - B_2)^{k-2} + \dots + C_1 (i - B_2) + C_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} g(i + B_1 - 1) - g(i - B_2) &= (C_k (i + B'_1)^k + C_{k-1} (i + B'_1)^{k-1} + C_{k-2} (i + B'_1)^{k-2} + \dots + \\ &+ C_1 (i + B'_1) + C_0) - (C_k (i - B_2)^k + C_{k-1} (i - B_2)^{k-1} + C_{k-2} (i - B_2)^{k-2} + \dots + \\ &+ C_1 (i - B_2) + C_0) = C_k ((i + B'_1)^k - (i - B_2)^k) + C_{k-1} ((i + B'_1)^{k-1} - (i - B_2)^{k-1}) + \\ &+ C_{k-2} ((i + B'_1)^{k-2} - (i - B_2)^{k-2}) + \dots + C_1 (B'_1 + B_2). \end{aligned}$$

Рассмотрим разность  $(i + B'_1)^k - (i - B_2)^k$ . Каждое из выражений  $(i + B'_1)^k, (i - B_2)^k$  является полиномом степени  $k$ :

$$\begin{aligned} (i + B'_1)^k &= i^k + C_k^1 i^{k-1} B'_1 + C_k^2 i^{k-2} (B'_1)^2 + \dots + (B'_1)^k, \\ (i - B_2)^k &= i^k - C_k^1 i^{k-1} B_2 + C_k^2 i^{k-2} (B_2)^2 + \dots + (-1)^k (B_2)^k. \end{aligned}$$

Тогда разность  $(i + B_1')^k - (i - B_2)^k$  является полиномом степени  $(k - 1)$ :

$$C_k^1(B_1' + B_2) i^{k-1} + C_k^2((B_1')^2 - (B_2)^2) i^{k-2} + \dots + ((B_1')^k - (-1)^k (B_2)^k).$$

Аналогично разность  $(i + B_1')^{k-1} - (i - B_2)^{k-1}$  является полиномом степени  $(k - 2)$ :

$$C_{k-1}^1(B_1' + B_2) i^{k-2} + C_{k-1}^2((B_1')^2 - (B_2)^2) i^{k-3} + \dots + ((B_1')^{k-1} - (-1)^{k-1} (B_2)^{k-1}).$$

Точно также разность  $(i + B_1')^{k-2} - (i - B_2)^{k-2}$  является полиномом степени  $(k - 3)$ :

$$C_{k-2}^1(B_1' + B_2) i^{k-3} + C_{k-2}^2((B_1')^2 - (B_2)^2) i^{k-4} + \dots + ((B_1')^{k-2} - (-1)^{k-2} (B_2)^{k-2}) \text{ и т. д.}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & g(i + B_1 - 1) - g(i - B_2) = C_k((i + B_1')^k - (i - B_2)^k) + \\ & \quad + C_{k-1}((i + B_1')^{k-1} - (i - B_2)^{k-1}) + \\ & \quad + C_{k-2}((i + B_1')^{k-2} - (i - B_2)^{k-2}) + \dots + C_1(B_1' + B_2) = \\ & = C_k(C_k^1(B_1' + B_2) i^{k-1} + C_k^2((B_1')^2 - (B_2)^2) i^{k-2} + \dots + ((B_1')^k - (-1)^k (B_2)^k)) + \\ & \quad + C_{k-1}(C_{k-1}^1(B_1' + B_2) i^{k-2} + C_{k-1}^2((B_1')^2 - (B_2)^2) i^{k-3} + \dots + ((B_1')^{k-1} - \\ & \quad - (-1)^{k-1} (B_2)^{k-1})) + C_{k-2}(C_{k-2}^1(B_1' + B_2) i^{k-3} + C_{k-2}^2((B_1')^2 - (B_2)^2) i^{k-4} + \dots + \\ & \quad + ((B_1')^{k-2} - (-1)^{k-2} (B_2)^{k-2})) + \dots + \\ & \quad + ((B_1')^k - (-1)^k (B_2)^k) + ((B_1')^{k-1} - (-1)^{k-1} (B_2)^{k-1}) \dots + C_1(B_1' + B_2) = \\ & = C_k C_k^1(B_1' + B_2) i^{k-1} + (C_k C_k^2((B_1')^2 - (B_2)^2) + C_{k-1} C_{k-1}^1(B_1' + B_2)) i^{k-2} + \\ & + (C_k C_k^3((B_1')^3 + (B_2)^3) + C_{k-1} C_{k-1}^2((B_1')^2 - (B_2)^2) + C_{k-2} C_{k-2}^1(B_1' + B_2)) i^{k-3} + \dots + \\ & \quad + (C_k C_k^j((B_1')^j + (B_2)^j) + C_{k-1} C_{k-1}^{j-1}((B_1')^{j-1} - (B_2)^{j-1}) + \\ & \quad + C_{k-2} C_{k-2}^{j-2}((B_1')^{j-2} - (B_2)^{j-2}) + \dots + C_{k-j+1} C_{k-j+1}^1(B_1' + B_2)) i^{k-j} + \dots + \\ & + (C_k C_k^{k-1}((B_1')^{k-1} + (B_2)^{k-1}) + C_{k-1} C_{k-1}^{k-2}((B_1')^{k-2} - (B_2)^{k-2}) + C_{k-2} C_{k-2}^{k-3}(((B_1')^{k-3} - \\ & \quad - (B_2)^{k-3}) + \dots + C_2 C_2^1(B_1' + B_2)) i + (C_k((B_1')^k - (-1)^k (B_2)^k) + C_{k-1}((B_1')^{k-1} - \\ & \quad - (-1)^{k-1} (B_2)^{k-1}) + C_{k-2}((B_1')^{k-2} - (-1)^{k-2} (B_2)^{k-2}) + \dots + C_1(B_1' + B_2) = \\ & = i^{k-1} C_k C_k^1(B_1' + B_2) + i^{k-2} \sum_{j=0}^1 C_{k-j} C_{k-j}^{2-j} ((B_1')^{2-j} - (-1)^j (B_2)^{2-j}) + \\ & \quad + i^{k-3} \sum_{j=0}^2 C_{k-j} C_{k-j}^{3-j} ((B_1')^{3-j} - (-1)^{j+1} (B_2)^{3-j}) + \dots + \\ & + \sum_{j=0}^k C_j ((B_1')^j - (-1)^j (B_2)^j) = \sum_{m=1}^{k-1} i^{k-m} \sum_{j=1}^m C_{k+1-j} C_{k-j+1}^{m-j+1} ((B_1')^{m-j+1} - \\ & \quad - (-1)^{m-j+1} (B_2)^{m-j+1}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} t_i & \geq \frac{1}{D_{max}} (g(i + B_1 - 1) - g(i - B_2) - B_1 - B_2 + l) = \\ & = \frac{1}{D_{max}} (g(i + B_1') - g(i - B_2) - (B_1' + B_2)) = \\ & = \frac{1}{D_{max}} (\sum_{m=1}^k i^{k-m} \sum_{j=1}^m C_{k+1-j} C_{k-j+1}^{m-j+1} ((B_1')^{m-j+1} - (-1)^{m-j+1} (B_2)^{m-j+1}) - \\ & \quad - (B_1' + B_2)). \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

**Замечание 3.** Введем следующие обозначения:

$$A_{k-m} = \frac{1}{D_{max}} \sum_{j=1}^m C_{k+1-j} C_{k-j+1}^{m-j+1} \left( (B_1')^{m-j+1} - (-1)^{m-j+1} (B_2)^{m-j+1} \right),$$

где  $1 \leq m \leq k-1$ ;

$$A_0 = \frac{1}{D_{max}} \sum_{j=1}^k C_{k+1-j} \left( (B_1')^{k-j+1} - (-1)^{k-j+1} (B_2)^{k-j+1} \right) - \frac{1}{D_{max}} (B_1' + B_2).$$

Тогда формула (4) примет вид

$$t_i \geq A_{k-1} i^{k-1} + A_{k-2} i^{k-2} + A_{k-3} i^{k-3} + \dots + A_1 i + A_0 \quad (5)$$

**Замечание 4.** Запись  $f(n) = \Omega(h(n))$  означает, что функция  $h(n)$  является нижней оценкой скорости роста функции  $f(n)$ , т. е. имеются такие константы  $c$  и  $n_0$ , что для каждого  $n \geq n_0$  выполняется условие  $f(n) \geq c h(n)$ .

**Лемма 3.** Если емкостной характеристикой тьюринговых вычислений является полиномиальная функция (3), то имеет место оценка

$$\sum_{j=1}^{\delta} k_j = \Omega(n^{k+1}) \quad (6)$$

*Доказательство.*

Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\delta} k_j &= \sum_{i=1}^n t_i i \geq \sum_{i=1}^n (A_{k-1} i^{k-1} + A_{k-2} i^{k-2} + A_{k-3} i^{k-3} + \dots + A_1 i + A_0) i = \\ &= \sum_{i=1}^n (A_{k-1} i^k + A_{k-2} i^{k-1} + A_{k-3} i^{k-2} + \dots + A_1 i^2 + A_0 i) = \\ &= A_{k-1} \sum_{i=1}^n i^k + A_{k-2} \sum_{i=1}^n i^{k-1} + A_{k-3} \sum_{i=1}^n i^{k-2} + \dots + A_0 \sum_{i=1}^n i. \end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое  $A_{k-1} \sum_{i=1}^n i^k$ . Как известно, сумма

$$\sum_{i=1}^n i^k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

является полиномом степени  $k+1$  от  $n$ . Тогда и весь член  $A_{k-1} \sum_{i=1}^n i^k$  является полиномом степени  $k+1$  от  $n$ .

Аналогично член  $A_{k-2} \sum_{i=1}^n i^{k-1}$  является полиномом степени  $k$  от  $n$ , член  $A_{k-3} \sum_{i=1}^n i^{k-2}$  – полиномом степени  $k-1$  от  $n$  и т. д. Тогда сумма полиномов от  $n$  степени  $k+1, k, k-1, \dots, 1$  является полиномом степени  $k+1$ .

Таким образом, для суммы  $\sum_{j=1}^{\delta} k_j$  нижней оценкой является полином от  $n$  степени  $k+1$ , т. е.  $\sum_{j=1}^{\delta} k_j = \Omega(n^{k+1})$ . Лемма 3 доказана.

**Определение 3.** Траектория движения головки, у которой левый конец каждого отрезка  $r_{i+1}$  ( $i \geq 1$ ) находится правее или совпадает с левым концом предшествующего отрезка  $r_i$ , называется стандартной траекторией.

**Лемма 4** [8]. У стандартной траектории для каждого  $i \geq 1$  выполняется условие  $|\gamma(r_i)| \geq k_i$ .

**Теорема 1.** Если емкостной характеристикой работы машины Тьюринга является полиномиальная функция (3), а траектория движения головки – стандартной, то временная характеристика  $T(n)$  работы машины удовлетворяет условию

$$T(n) = \Omega(n^{k+1}) \quad (7)$$

*Доказательство.*

Пусть емкостной характеристикой работы машины является полиномиальная функция (3), а траектория движения головки – стандартной. За время работы машины, соответствующее каждому правому отрезку  $r_i$  ( $i \geq 1$ ), головка совершает количество

тактов не меньше, чем длина этого отрезка. Такая же ситуация и с левыми отрезками  $l_i$  ( $i \geq 1$ ). Поэтому время работы машины будет не меньше, чем сумма длин всех правых и левых отрезков, т. е.  $T(n) \geq \sum_{i=1}^{\delta} (|r_i| + |l_i|)$ .

Так как для каждого  $i \geq 1$  выполняются условия  $|r_i| = |\gamma(r_i)| + D_i$  и  $|\gamma(r_i)| \geq k_i$ , то  $|r_i| \geq k_i + D_i$ . Кроме того, выполняется требование  $|l_i| \geq D_i + 2$  ( $i \geq 1$ ). Тогда

$$T(n) \geq \sum_{i=1}^{\delta} (|r_i| + |l_i|) \geq \sum_{i=1}^{\delta} ((k_i + D_i) + (D_i + 2)) = \sum_{i=1}^{\delta} k_i + 2 \sum_{i=1}^{\delta} D_i + 2\delta.$$

Так как для каждого  $i \geq 1$  выполняется условие  $D_i \geq 1$ , то  $\sum_{i=1}^{\delta} D_i \geq \delta$ . Поэтому

$$T(n) \geq \sum_{i=1}^{\delta} k_i + 4\delta.$$

Поскольку

$$n + \sum_{i=1}^{\delta} D_i = g(n) \text{ и } D_i \leq D_{\max} \text{ для каждого } i \geq 1,$$

$$\text{то } n + \delta D_{\max} \geq g(n).$$

Тогда  $\delta \geq \frac{1}{D_{\max}} (g(n) - n)$ , или

$$\begin{aligned} \delta &\geq \frac{1}{D_{\max}} (C_k n^k + C_{k-1} n^{k-1} + C_{k-2} n^{k-2} + \dots + C_1 n + C_0 - n) = \\ &= \frac{1}{D_{\max}} (C_k n^k + C_{k-1} n^{k-1} + C_{k-2} n^{k-2} + \dots + (C_1 - 1)n + C_0). \end{aligned}$$

Таким образом, для  $\delta$  нижней оценкой является полином от  $n$  степени  $k$ . В лемме 3 было установлено, что нижней оценкой для суммы  $\sum_{i=1}^{\delta} k_i$  является полином от  $n$  степени  $k + 1$ . Тогда из условия  $T(n) \geq \sum_{i=1}^{\delta} k_i + 4\delta$  следует, что нижней оценкой для  $T(n)$  является полином от  $n$  степени  $k + 1$ , т. е.  $T(n) = \Omega(n^{k+1})$ .

Теорема 1 доказана.

### Заключение

Доказано, что если емкостной характеристикой работы машины является полиномиальная функция степени  $k$ , а траектория движения головки – стандартной, то нижняя оценка временной характеристики работы машины является полиномиальной функцией степени  $k + 1$ .

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Барздинь, Я. М. Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга / Я. М. Барздинь // Проблемы кибернетики. – 1965. – Вып. 15. – С. 245–248.
2. Фрейвалд, Р. В. Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга со входом / Р. В. Фрейвалд // Алгебра и логика. Семинар. – 1965. – № 1. – С. 47–58.
3. Трахтенброт, Б. А. Сложность алгоритмов и вычислений / Б. А. Трахтенброт. – Новосибирск : НГУ, 1967. – 198 с.
4. Hartmanis, J. Computational complexity of one tape Turing machine computations / J. Hartmanis // Assoc. Comput. Mach. – 1968. – № 2. – Р. 325–339.
5. Мощенский, В. А. К вопросу о сложности тьюринговых вычислений / В. А. Мощенский // Доклады АН БССР. – 1969. – № 10. – С. 871–878.
6. Мощенский, В. А. Об оценке некоторых функций, характеризующих работу машин Тьюринга / В. А. Мощенский // Кибернетика. – 1971. – № 1. – С. 34–40.
7. Мощенский, В. А. Обобщенный метод нитей и некоторые его применения / В. А. Мощенский. – Мн. : БГУ, 2000. – 69 с.
8. Будько, А. Е. Об одной технике исследования тьюринговых вычислений / А. Е. Будько // Вісник ВДУ. – 2024. – № 1 (122). – С. 14–22.

1. Barzdin', Ya. M. Slozhnost' raspoznavaniya simmetrii na mashinakh T'yuringa / Ya. M. Barzdin' // Problemy kibernetiki. – 1965. – Vyp. 15. – S. 245–248.
2. Freivald, R. V. Slozhnost' raspoznavaniya simmetrii pa mashinakh T'yuringa so vkhodom / R. V. Freivald // Algebra i logika. Seminar. – 1965. – № 1. – S. 47–58.
3. Trakhtenbrot, B. A. Slozhnost' algoritmov i vychislenii / B. A. Trakhtenbrot. – Novosibirsk : NGU, 1967. – 198 s.
4. Hartmanis, J. Computational complexity of one tape Turing machine computations / J. Hartmanis // Assoc. Comput. Mach. – 1968. – Nr 2. – P. 325–339.
5. Moshchenskii, V. A. K voprosu o slozhnosti t'yuringovykh vychislenii / V. A. Moshchenskii // Doklady AN BSSR. – 1969. – № 10. – S. 871–878.
6. Moshchenskii, V. A. Ob otsenke nekotorykh funktsii, kharakterizuyushchikh rabotu mashin T'yuringa / V. A. Moshchenskii // Kibernetika. – 1971. – № 1. – S. 34–40.
7. Moshchenskii, V. A. Obobshchennyi metod nitei i nekotorye ego primeneniya / V. A. Moshchenskii. – Mn. : BGU, 2000. – 69 s.
8. Bud'ko, A. E. Ob odnoi tekhnike issledovaniya t'yuringovykh vychislenii / A. E. Bud'ko // Vesnik VDU. – 2024. – № 1 (122). – S. 14–22.

*Руканіс наступні у редакцію 02.10.2025*

**Дмитрий Владимирович Грицук<sup>1</sup>, Полина Александровна Павлушко<sup>2</sup>,  
Александр Александрович Трофимук<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>2</sup>студент 4-го курса физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>3</sup>д-р физ.-мат. наук, доц., зав. каф. фундаментальной математики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Dmitry Gritsuk<sup>1</sup>, Polina Pavlushko<sup>2</sup>, Alexander Trofimuk<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science

of Brest State A. S. Pushkin University

<sup>2</sup>4-th Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics of Brest State A. S. Pushkin University

<sup>3</sup>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

Head of the Department of Fundamental Mathematics of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: <sup>1</sup>dmitry.gritsuk@gmail.com; <sup>2</sup>polinapavlushko@gmail.com; <sup>3</sup>alexander.trofimuk@gmail.com

### О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ СО СЛАБО ПРОПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Подгруппа  $A$  называется проперестановочной в группе  $G$ , если существует подгруппа  $B$  такая, что  $G = N_G(A)B$  и  $AX$  – подгруппа для каждой подгруппы  $X$  из  $B$ . Говорят, что  $H$  полностью проперестановочна в  $G$ , если  $H$  проперестановочна в каждой подгруппе из  $G$ , содержащей  $H$ . Подгруппа  $H$  называется слабо проперестановочной в  $G$ , если  $H = \langle A, B \rangle$  для некоторой субнормальной в  $G$  подгруппы  $A$  и полностью проперестановочной подгруппы  $B$  из  $G$ . В работе приведены новые свойства слабо проперестановочных подгрупп, а также представлена новая информация о строении группы  $G = AB$  со слабо проперестановочными подгруппами  $A$  и  $B$ . В частности, доказано, что если  $A, B \in \mathfrak{F}$ , то  $G^{\mathfrak{F}} \leq (G')^{\mathfrak{N}}$ , где  $\mathfrak{F}$  – насыщенная формация такая, что  $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$ . Кроме того, исследованы группы  $G = AB$ , у которых силовские (максимальные) подгруппы из  $A$  и из  $B$  слабо проперестановочны в  $G$ .

**Ключевые слова:** сверхразрешимая и нильпотентная группы, слабо проперестановочная подгруппа,  $X$ -корадикал, силовская подгруппа, максимальная подгруппа.

#### **On Finite Groups with Weakly Propermutable Subgroups**

A subgroup  $A$  is called propermutable in  $G$ , if there is a subgroup  $B$  such that  $G = N_G(A)B$  and  $AX$  is a subgroup for every subgroup  $X$  of  $B$ . We say also that  $H$  is completely propermutable in  $G$ , if  $H$  is propermutable in every subgroup of  $G$  including  $H$ . A subgroup  $H$  is called weakly propermutable in  $G$ , if  $H = \langle A, B \rangle$  for some subnormal subgroup  $A$  of  $G$  and completely propermutable subgroup  $B$  of  $G$ . In this paper, we present new properties of weakly subnormal subgroups, and also provide new information on the structure of a group  $G = AB$  with weakly propermutable subgroups  $A$  and  $B$ . In particular, we prove that if  $A, B \in \mathfrak{F}$ , then  $G^{\mathfrak{F}} \leq (G')^{\mathfrak{N}}$ , where  $\mathfrak{F}$  is a saturated formation such that  $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$ . Also we investigate the groups  $G = AB$  when all Sylow (maximal) subgroups of  $A$  and of  $B$  are weakly propermutable in  $G$ .

**Key words:** supersoluble and nilpotent groups, seminormal subgroup, weakly propermutable subgroup, the  $X$ -residual, Sylow subgroup, maximal subgroup.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», номер госрегистрации 20211467).

**Введение**

Исследуются конечные группы. Используемая терминология соответствует [1]. Запись  $Y \leq X$  означает, что  $Y$  – подгруппа группы  $X$ .

Подгруппа  $A$  называется *полуноормальной* в группе  $G$ , если существует подгруппа  $B$  такая, что  $G = AB$  и для каждой подгруппы  $X \leq B$  произведение  $AX$  является подгруппой в  $G$ . В этом случае подгруппу  $B$  называют *супердобавлением* к  $A$ .

Группы с полуноормальными подгруппами интенсивно изучаются (обзор в [2]), что привело к появлению ряда обобщений этого понятия (например, [3]). Одним из таких обобщений является *проперестановочная* подгруппа [4]: подгруппа  $A$  называется *проперестановочной* в  $G$ , если существует подгруппа  $B$  такая, что  $G = N_G(A)B$  и для каждой  $X \leq B$  произведение  $AX$  является подгруппой группы  $G$ . Подгруппу  $B$  в дальнейшем будем называть *продобавлением* к  $A$  в группе  $G$ . Группы с проперестановочными подгруппами исследовались также в работах [4–8].

В группе

$$G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = 2, |c| = 12, c^b = c, (ac^{-1}b)^{-1} = ac^{-1}b, (ab)^3 = ba, c^5a = ac \rangle \simeq (Z_{12} \times Z_2) \rtimes Z_2$$

([9], IdGroup=[48,37]), подгруппа  $A = \langle a \rangle$  является проперестановочной в  $G$ , но не является проперестановочной в максимальной подгруппе  $H \simeq (Z_6 \times Z_2) \rtimes Z_2$  группы  $G$ . Поэтому вполне естественно рассмотреть подгруппы вида: подгруппа  $H$  называется *полностью проперестановочной* в  $G$ , если она проперестановочна в каждой подгруппе, содержащей  $H$  [10].

Очевидно, что каждая полуноормальная подгруппа является полностью проперестановочной подгруппой, а каждая полностью проперестановочная подгруппа является проперестановочной. Обратные включения неверны. Так, в группе

$$G_1 = \langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = 3, |c| = 2, ab = ba, ac = ca, b^c = b^{-1} \rangle \simeq Z_3 \times S_3$$

([9], IdGroup=[18,3]), подгруппа  $A = \langle c \rangle$  является полностью проперестановочной в  $G_1$ , т. к.  $N_{G_1}(A) = \langle ac \rangle$ ,  $B = \langle b \rangle$  и в подгруппах  $S_3$  и  $Z_6$  подгруппа  $A$  является полуноормальной, но  $A$  не является полуноормальной в  $G_1$ .

Еще одно направление обобщений связано с комбинацией свойств подгрупп с субнормальностью. В работе [11] подгруппа  $H$  называется *слабо субнормальной* в  $G$ , если  $H = \langle A, B \rangle$  для некоторой субнормальной подгруппы  $A$  и полуноормальной подгруппы  $B$  из  $G$ . Ясно, что полуноормальная подгруппа слабо субнормальна, но не наоборот (например, в знакопеременной группе  $G = A_4$  максимальная подгруппа порядка 2 из максимальной подгруппы  $V = Z_2 \times Z_2$  является субнормальной в  $G$ , но не полуноормальной в  $G$ ). Среди основных результатов работы [11] стоит отметить следующий: *если  $G = AB$ , где  $A$  и  $B$  – сверхразрешимые слабо субнормальные подгруппы группы  $G$ , то  $G^{\text{sl}} = (G')^{\text{sl}}$ . Более того, если  $G' \in \mathfrak{N}$ , то  $G$  сверхразрешима.*

В настоящей работе мы развиваем этот результат, вводя более общее понятие: подгруппа  $H$  называется *слабо проперестановочной* в  $G$ , если  $H = \langle A, B \rangle$  для некоторой субнормальной в  $G$  подгруппы  $A$  и полностью проперестановочной подгруппы  $B$  из  $G$ .

### Вспомогательные результаты

Приведем известные результаты, которые неоднократно будут использоваться в доказательствах. Группа называется сверхразрешимой, если порядки ее главных факторов являются простыми числами.

Группа с нормальной силовой  $p$ -подгруппой называется  $p$ -замкнутой, а группа с нормальной  $p'$ -холовой подгруппой называется  $p$ -нильпотентной.

Через  $G'$ ,  $Z(G)$ ,  $F(G)$  и  $\Phi(G)$  обозначаются коммутант, центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы  $G$  соответственно;  $O_p(G)$  и  $O_{p'}(G)$  – наибольшие нормальные в  $G$   $p$ - и  $p'$ -подгруппы соответственно;  $\pi(G)$  – множество всех простых делителей порядка группы  $G$ . Элементарная абелева группа порядка  $p^t$  и циклическая группа порядка  $t$  обозначаются  $E_{p^t}$  и  $Z_t$  соответственно, а  $A \rtimes B$  – полупрямое произведение нормальной подгруппы  $A$  и подгруппы  $B$ .

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [12; 13]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – некоторая формация групп и  $G$  – группа. Тогда  $G^{\mathfrak{F}}$  –  $\mathfrak{F}$ -корадикал группы  $G$ , т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп  $N$  из  $G$ , для которых  $G/N \in \mathfrak{F}$ . Произведение  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = \{G \in G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$  формаций  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  состоит из всех групп  $G$ , для которых  $\mathfrak{H}$ -корадикал принадлежит формации  $\mathfrak{F}$  [13, IV. 1.7]. Как обычно,  $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}$ .

Формация  $\mathfrak{F}$  называется насыщенной, если из условия  $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$  следует, что  $G \in \mathfrak{F}$ . Всякая функция  $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$  называется локальным экраном. Формация  $\mathfrak{F}$  называется локальной, если существует локальный экран  $f$  такой, что  $\mathfrak{F}$  совпадает с классом групп  $G$  таких, что  $G/C_G(H/K) \in f(p)$  для любого главного фактора  $H/K$  группы  $G$  и  $p \in \pi(H/K)$  и обозначается через  $\mathfrak{F} = LF(f)$ . По [13, теорема IV. 3.7], для локальной формации  $\mathfrak{F}$  всегда существует локальный экран  $f$  такой, что  $\mathfrak{F} = LF(f)$ ,  $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$  и  $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$  для любого  $p \in \mathbb{P}$ , где  $\mathfrak{N}_p$  – формация всех  $p$ -групп. Такой экран  $f$  называется максимальным внутренним локальным экраном формации  $\mathfrak{F}$ . Из [13, теорема IV. 4.6] следует, что всякая локальная формация является насыщенной формацией и наоборот.

Группа  $G$  называется примитивной, если в  $G$  существует максимальная подгруппа  $M$  с единичным ядром  $\text{Core}_G M = \bigcap_{x \in G} M^x = 1$ . В этом случае подгруппа  $M$  называется примитиватором группы  $G$ .

**Лемма 1.1** ([14, VI. 9]).

- (1) Класс  $\mathfrak{A}$  – наследственная насыщенная формация.
- (2) Каждая минимальная нормальная подгруппа сверхразрешимой группы имеет простой порядок.
- (3) Пусть  $N$  – нормальная в  $G$  подгруппа и  $G/N$  сверхразрешима. Если  $N$  либо циклическая, либо  $N \leq Z(G)$ , либо  $N \leq \Phi(G)$ , то  $G$  сверхразрешима.
- (4) Каждая сверхразрешимая группа имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. В частности, каждая сверхразрешимая группа  $G$   $p$ -замкнута для наибольшего  $p \in \pi(G)$  и  $q$ -нильпотентна для наименьшего  $q \in \pi(G)$ .
- (5) Коммутант сверхразрешимой группы нильпотентен.
- (6) Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая ее максимальная подгруппа имеет простой индекс.

**Лемма 1.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – насыщенная формация и  $G$  – группа. Предположим, что  $G \notin \mathfrak{F}$ , но  $G/N \in \mathfrak{F}$  для всех  $N \triangleleft G$ ,  $N \neq 1$ . Тогда  $G$  – примитивная группа.

*Доказательство.*

Так как  $\mathfrak{F}$  – насыщенная формация, то  $\Phi(G) = 1$  и группа  $G$  содержит единственную минимальную нормальную подгруппу  $N$ . Тогда для некоторой максимальной подгруппы  $M$  группы  $G$  справедливо, что  $G = NM$ , т. к.  $\Phi(G) = 1$ . Следовательно,  $M_G = 1$  и группа  $G$  примитивна.

**Лемма 1.3** ([14, теорема II. 3.2]). Пусть  $G$  – разрешимая неединичная примитивная группа с примитиватором  $M$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

(1)  $\Phi(G) = 1$ ;

(2)  $F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$  и  $F(G)$  есть элементарная абелева подгруппа порядка  $p^n$  для некоторого простого  $p$  и натурального  $n$ ;

(3)  $G$  имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, которая совпадает с  $F(G)$ ;

(4)  $G = F(G) \rtimes M$  и  $O_p(M) = 1$ .

**Лемма 1.4** ([16, лемма 5.8, лемма 5.11]). Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – формации,  $G$  – группа и  $K$  – нормальная в  $G$  подгруппа. Тогда:

(1)  $(G/K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K$ ;

(2)  $G^{\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}} = (G^{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{F}}$ ;

(3) если  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ , то  $G^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{H}}$ .

Напомним, что  $A^G = \langle A^g \mid g \in G \rangle$  – подгруппа, порожденная всеми сопряженными с  $A$  подгруппами группы  $G$ .

**Лемма 1.5.**

(1) если  $A$  – полностью проперестановочна в  $G$  и  $A \leq B$ , то  $A$  полностью проперестановочна в  $B$ ;

(2) если  $A$  – полностью проперестановочная подгруппа группы  $G$  и подгруппа  $N$  нормальна в  $G$ , то  $AN/N$  полностью проперестановочна в  $G/N$ ;

(3) если  $A$  – полностью проперестановочная подгруппа группы  $G$  и подгруппа  $N$  нормальна в  $G$ , то  $AN$  полностью проперестановочна в  $G$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $B_1$  – произвольная подгруппа в  $B$  такая, что  $A \leq B_1$ . Поскольку  $B_1$  – подгруппа группы  $G$ , то по определению следует, что  $A$  проперестановочна в  $B_1$ , а значит,  $A$  полностью проперестановочна в  $B$ .

2. Пусть  $AN/N \leq E/N \leq G/N$ . Так как  $A \leq AN \leq E$ , то по п. 1  $A$  проперестановочна в  $E$ . Тогда  $AN/N$  проперестановочна в  $E/N$  по [7, лемма 3.1 (1)].

3. Пусть  $A \leq E \leq G$ . По условию  $A$  проперестановочна в  $E$ . Тогда найдется такая подгруппа  $B$  из  $E$ , что  $E = N_E(A)B$  и  $A$  перестановочна со всеми подгруппами из  $B$ . Тогда  $AN$  перестановочна со всеми подгруппами из  $B$ . С другой стороны, поскольку  $N_E(A) \leq N_E(AN)$ , то  $E = N_E(AN)B$ . Значит,  $AN$  проперестановочна в  $E$ , и поэтому  $AN$  полностью проперестановочна в  $G$ .

**Лемма 1.6** ([7, лемма 3.3]).

1. Пусть  $A$  – подгруппа группы  $G$ . Если  $A$  проперестановочна в  $G$ , то  $A^G$  разрешима в каждом из следующих случаев:

(1.1)  $A$  2-нильпотентна;

(1.2)  $A$  разрешима и 3 не делит порядок  $A$ .

2. Пусть  $p$  – наименьший простой делитель порядка группы  $G$ . Если  $A$  – проперестановочна в  $G$  и  $p$  не делит порядок  $A$ , то  $p$  не делит порядок подгруппы  $A^G$ .

3. Пусть  $A$  – проперестановочная подгруппа разрешимой группы  $G$  и  $r$  – наибольшее простое число из  $\pi(G)$ . Если  $A$   $r$ -замкнута, то  $A_r$  субнормальна в  $G$ .

**Лемма 1.7** ([7, лемма 3.4]).

1. Пусть в  $G$  существует проперестановочная  $\pi$ -холлова подгруппа  $H$ . Тогда  $G$   $\pi$ -разрешима в каждом из следующих случаев:

(1.1)  $H$  2-нильпотентна;

(1.2)  $H$  разрешима и  $3 \notin \pi$ .

2. Пусть  $P$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ . Если  $P$  проперестановочна в  $G$ , то  $G$   $p$ -разрешима.

3. Пусть  $p$  – наибольшее простое число из  $\pi(G)$  и  $P$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ . Если  $P$  проперестановочна в  $G$ , то  $P$  нормальна в  $G$ .

4. Если в группе  $G$  все силовские подгруппы проперестановочны, то  $G$  сверхразрешима.

5. Если в группе  $G$  все максимальные подгруппы проперестановочны, то  $G$  сверхразрешима.

**Лемма 1.8** ([18, лемма 2.16]).

Пусть  $\mathfrak{F}$  – насыщенная формация, содержащая  $\mathcal{U}$  и  $G$  – группа с нормальной подгруппой  $E$  такой, что  $G/E \in \mathfrak{F}$ . Если  $E$  циклическая, то  $G \in \mathfrak{F}$ .

### Свойства слабо проперестановочных подгрупп

**Лемма 2.1.**

(1) Если  $A$  – слабо проперестановочна в  $G$  и  $A \leq B$ , то  $A$  слабо проперестановочна в  $B$ .

(2) Если  $A$  – слабо проперестановочна в  $G$  и подгруппа  $N$  нормальна в  $G$ , то  $AN/N$  – слабо проперестановочна в  $G/N$ .

*Доказательство.*

Пусть  $A = \langle L, T \rangle$ , где  $L$  – субнормальная и  $T$  – полностью проперестановочна в  $G$ .

1. Утверждение следует из [13, лемма А. 14.1(a)] и леммы 1.5 (1).

2. Очевидно, что  $AN/N = \langle LN/N, TN/N \rangle$ , где  $LN/N$  субнормальна в  $G/N$  по [13, лемма А. 14.1(b)] и  $TN/N$  полностью проперестановочна в  $G/N$  по лемме 1.5 (2). Следовательно,  $AN/N$  слабо проперестановочна в  $G/N$ .

**Лемма 2.2.**

(1) Пусть  $M$  – максимальная подгруппа группы  $G$ . Если  $M$  слабо проперестановочна в  $G$ , то индекс  $M$  в  $G$  есть простое число.

(2) Если в группе  $G$  все максимальные подгруппы слабо проперестановочны, то  $G$  сверхразрешима.

(3) Если индекс подгруппы  $H$  в  $G$  есть простое число, то  $H$  слабо проперестановочна в  $G$ .

*Доказательство.*

1. По условию  $M = \langle A, B \rangle$  для некоторой субнормальной подгруппы  $A$  и полностью проперестановочной подгруппы  $B$  в  $G$ . Более того,  $M/M_G$  слабо проперестановочна в  $G/M_G$  по лемме 2.1 (2). Если  $M_G \neq 1$ , то по индукции для некоторого

простого числа  $p$  имеем  $|G:M| = |G/M_G : M/M_G| = p$ . Предположим, что  $M_G = 1$ , и пусть  $R$  – минимальная нормальная подгруппа в  $G$ . Заметим, что  $R \leq N_G(A)$  [13, лемма А. 14.3], поэтому  $A^G = A^{RM} \leq M_G = 1$ , следовательно,  $M = B$  полностью проперестановочна в  $G$ . По лемме 1.7 (5) индекс  $M$  в  $G$  есть простое число.

2. Согласно теореме Хупперта, сверхразрешимую группу можно определить как группу, в которой все максимальные подгруппы имеют простые индексы. Из п. 1 следует, что группа  $G$  сверхразрешима.

3. По [15, теорема 1]  $H$  полунормальна в  $G$ , а следовательно, слабо проперестановочна в  $G$ .

**Лемма 2.3.**

(1) Пусть в группе  $G$  существует  $\pi$ -холлова подгруппа  $H$ . Если  $H$  слабо проперестановочна в  $G$ , то  $H$  полностью проперестановочна в  $G$ .

(2) Пусть  $p$  – наибольшее простое число из  $\pi(G)$  и  $P$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ . Если  $P$  слабо проперестановочна в  $G$ , то  $P$  нормальна в  $G$ .

(3) Если в группе  $G$  все силовские подгруппы слабо проперестановочны, то  $G$  сверхразрешима.

*Доказательство.*

1. Так как  $H$  слабо проперестановочна в  $G$ , то  $H = \langle H_1, H_2 \rangle$  для некоторой субнормальной в  $G$  подгруппы  $H_1$  и полностью проперестановочной подгруппы  $H_2$ . Тогда  $H_1^G$  –  $\pi$ -подгруппа группы  $G$  по [16, теорема 5.31]. Значит,

$$H = \langle H_1, H_2 \rangle \leq H_1^G H_2 \leq H.$$

Следовательно,  $H = H_1^G H_2$ . Так как  $H_2$  полностью проперестановочна в  $G$ , то  $H = H_1^G H_2$  полностью проперестановочна в  $G$  по лемме 1.5 (3).

2. Из п. 1 следует, что  $P$  полностью проперестановочна в  $G$ . По лемме 1.7 (3)  $P$  нормальна в  $G$ .

3. Из п. 1 следует, что все силовские подгруппы группы  $G$  полностью проперестановочны в  $G$ . По лемме 1.7 (4)  $G$  сверхразрешима.

**Лемма 2.4.**

(1) Если  $H$  – слабо проперестановочная 2-нильпотентная подгруппа группы  $G$ , то  $H^G$  разрешима.

(2) Пусть  $p$  – наименьший простой делитель порядка группы  $G$ . Если  $H$  – слабо проперестановочна в  $G$  подгруппа и  $p$  не делит порядок  $H$ , то  $p$  не делит порядок  $H^G$ .

*Доказательство.*

Докажем два утверждения одновременно. Так как  $H$  слабо проперестановочна в  $G$ , то  $H = \langle A, B \rangle$  для некоторой субнормальной в  $G$  подгруппы  $A$  и полностью проперестановочной подгруппы  $B$  из  $G$ . Поскольку

$$H = \langle A, B \rangle \leq \langle A^G, B^G \rangle = A^G B^G,$$

то  $H^G \leq A^G B^G$ . Так как  $A^G \leq H^G$  и  $B^G \leq H^G$ , то  $H^G = A^G B^G$ . Подгруппа  $B^G$  разрешима (не делится на  $p$ ) по лемме 1.6 (1), (2). Так как  $A$  субнормальна, то  $A^G$  2-нильпотентна (не делится на  $p$ ) по [16, теорема 5.31]. Поэтому  $H^G$  разрешима (не делится на  $p$ ).

### Конечные группы, факторизуемые слабо проперестановочными сомножителями

**Теорема 3.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – насыщенная формация такая, что  $\mathcal{U} \subseteq \mathfrak{F}$ . Пусть  $G = AB$ , где  $A$  и  $B$  – слабо проперестановочные подгруппы группы  $G$ . Если подгруппы  $A$  и  $B$  принадлежат  $\mathfrak{F}$ , то  $G^{\mathfrak{F}} \leq (G')^{\mathfrak{F}}$ .

*Доказательство.*

Рассмотрим случай, когда коммутант  $G'$  нильпотентен. Тогда группа  $G$  разрешима. Предположим противное, что  $G \notin \mathfrak{F}$ . Если  $N$  – неединичная нормальная в  $G$  подгруппа, то подгруппы  $AN/N$  и  $BN/N$  слабо проперестановочны в  $G/N$  по лемме 2.1 (2) и принадлежат  $\mathfrak{F}$  ввиду того, что  $\mathfrak{F}$  – формация. Так как

$$(G/N)' = G'N/N \simeq G'/G' \cap N,$$

то коммутант  $(G/N)'$  нильпотентен. Следовательно, по индукции  $G/N \in \mathfrak{F}$ . Так как формация  $\mathfrak{F}$  насыщенная и группа  $G$  разрешима, то по лемме 1.3  $\Phi(G) = 1$ ,  $N = C_G(N) = F(G) = O_p(G)$  – единственная минимальная нормальная в  $G$  подгруппа.

Так как  $G'$  нильпотентен, то  $N = G'$  и  $G/N$  абелева.

Предположим, что  $AN = G$ . Тогда  $A \cap N = 1$ ,  $A$  – максимальная в  $G$  подгруппа. Так как  $A$  – слабо проперестановочная в  $G$  подгруппа, то по лемме 2.2 (1) индекс подгруппы  $A$  в группе  $G$  будет простым числом. Значит,  $|N| = p$  и группа  $G \in \mathfrak{F}$  по лемме 1.8. Противоречие. Поэтому предположение неверно, и  $AN < G$ . Согласно лемме 2.1 (1) подгруппа  $A$  слабо проперестановочна в  $AN$ . Так как  $N$  абелева, то  $N \in \mathfrak{F}$ . Кроме того,  $(AN)' \leq G'$ , а значит, коммутант  $(AN)'$  нильпотентен. По индукции  $AN \in \mathfrak{F}$ . Аналогично получаем, что  $BN < G$  и  $BN \in \mathfrak{F}$ . Таким образом, группа  $G = (AN)(BN)$  является произведением нормальных подгрупп  $AN$  и  $BN$ , каждая из которых принадлежит формации  $\mathfrak{F}$ .

Так как  $AN$  нормальна в  $G$ , то  $F_p(AN) = N$  и  $AN/F_p(AN) = AN/N \in f(p)$ , где  $f$  – внутренний максимальный локальный экран насыщенной формации  $\mathfrak{F}$  такой, что  $\mathfrak{F} = LF(f)$ ,  $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$  и  $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ . Аналогично можно показать, что  $BN/N \in f(p)$ .

Так как  $G/N$  абелева, то  $[AN/N, BN/N] = 1$  и  $G/N \in f(p)$ , поскольку  $f(p)$  – формация. Так как  $N \in \mathfrak{N}_p$ , то  $G \in \mathfrak{N}_p f(p) = f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ . Значит, предположение неверно.

Пусть  $(G')^{\mathfrak{F}} \neq 1$ . Покажем, что фактор-группа  $G/(G')^{\mathfrak{F}}$  принадлежит формации  $\mathfrak{F}$ . Так как

$$(G/(G')^{\mathfrak{F}})' = G'(G')^{\mathfrak{F}}/(G')^{\mathfrak{F}} = G'/(G')^{\mathfrak{F}},$$

то коммутант  $(G/(G')^{\mathfrak{F}})'$  нильпотентен. Фактор-группа

$$\begin{aligned} G/(G')^{\mathfrak{F}} &= (A(G')^{\mathfrak{F}}/(G')^{\mathfrak{F}})(B(G')^{\mathfrak{F}}/(G')^{\mathfrak{F}}), \\ A(G')^{\mathfrak{F}}/(G')^{\mathfrak{F}} &\simeq A/A \cap (G')^{\mathfrak{F}}, B(G')^{\mathfrak{F}}/(G')^{\mathfrak{F}} \simeq B/B \cap (G')^{\mathfrak{F}}, \end{aligned}$$

поэтому подгруппы  $A(G')^{\mathfrak{F}}/(G')^{\mathfrak{F}}$  и  $B(G')^{\mathfrak{F}}/(G')^{\mathfrak{F}}$  принадлежат формации  $\mathfrak{F}$ , и по лемме 2.1 (2) они слабо проперестановочны в  $G/(G')^{\mathfrak{F}}$ . По доказанному выше, фактор-группа  $G/(G')^{\mathfrak{F}}$  принадлежит формации  $\mathfrak{F}$ . Теорема доказана.

Поскольку  $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}$ , то  $G^{(\mathfrak{N} \circ \mathfrak{A})} = (G^{\mathfrak{A}})^{\mathfrak{N}} = (G')^{\mathfrak{N}} \leq G^{\mathfrak{A}}$  по лемме 1.4 (2), (3). Поэтому при  $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$  справедливо

**Следствие 3.1.** Пусть  $A$  и  $B$  – сверхразрешимые подгруппы группы  $G$  и  $G = AB$ . Тогда  $G^{\mathfrak{A}} = (G')^{\mathfrak{N}}$  в каждом из следующих случаев:

- (1)  $A$  и  $B$  – слабо субнормальны в  $G$  [11, следствие 1.6];
- (2)  $A$  и  $B$  – субнормальны в  $G$  [17, теорема 2];
- (3)  $A$  и  $B$  – полунормальны в  $G$  [2, теорема 2.3];
- (4)  $A$  и  $B$  – проперестановочны в  $G$  [7, теорема 2.3].

### Приложения для системы компьютерной алгебры GAP

Современные исследования в теории конечных групп требуют не только теоретического осмысления новых понятий и выдвижения интуитивных гипотез, но и их тщательной проверки на характерных примерах. Практическая проверка гипотез является важнейшим этапом научного исследования, позволяющим обосновать целесообразность введения новых классов подгрупп и уточнить границы их применения.

В связи с этим в статье разработаны три алгоритма для системы компьютерной алгебры GAP:

- 1) проперестановочность (IsPropermutable);
- 2) полностью проперестановочность (IsCompletelyPropermutable);
- 3) слабая проперестановочность (IsWeaklyPropermutable).

#### Алгоритм функции IsPropermutable:

**Вход:** группа  $G$  и подгруппа  $H \leq G$ .

**Выход:** true, если  $H$  проперестановочна в  $G$ , иначе false.

**Метод:**

- Если  $H$  нормальна в  $G$ , вернуть true.
- Получить все подгруппы  $K \leq G$ .
- Для каждой подгруппы  $K$  проверить:
  - Проверить, что  $G = N_G(H)K$ , где  $N_G(H)$  – нормализатор  $H$  в  $G$ .
  - Проверить перестановочность  $N_G(H)$  и  $K$  в  $G$ .
  - Если да, получить все подгруппы  $m \leq K$ .
  - Для каждой  $m$  проверить перестановочность  $H$  и  $m$ .
  - Если все перестановочности выполняются, вернуть true.
- Если ни для какого  $K$  условия не выполняются, вернуть false.

#### Алгоритм функции IsCompletelyPropermutable:

**Вход:** группа  $G$  и подгруппа  $H \leq G$ .

**Выход:** true, если  $H$  слабо проперестановочна в  $G$ , иначе false.

**Метод:**

- Получить все подгруппы  $C = \{K \leq G \mid H \leq K\}$ .
- Проверить, что для каждой  $K \in C$  подгруппа  $H$  проперестановочна в  $K$  (вызов IsPropermutable( $K, H$ )).
- Если для всех таких  $K$  условие выполнено, вернуть true, иначе false.

#### Алгоритм функции IsWeaklyPropermutable:

**Вход:** группа  $G$  и подгруппа  $H \leq G$ .

**Выход:** true, если  $H$  слабо проперестановочна в  $G$ , иначе false.

**Метод:**

- Получить все субнормальные подгруппы  $A \leq G$  такие, что  $A \leq H$ .
- Для каждой такой подгруппы  $A$  получить все подгруппы  $B \leq G$ , для которых выполняется:
  - $B$  полностью проперестановочна в  $G$ ;
  - $H = \langle A, B \rangle$ .
- Если существует хотя бы одна пара подгрупп  $(A, B)$ , удовлетворяющая условиям, вернуть *true*.
- Если ни одна пара не подходит, вернуть *false*.

**Заклучение**

В данной работе введено и исследовано новое понятие слабо проперестановочной подгруппы, которое обобщает такие известные классы подгрупп, как субнормальные, полунормальные, проперестановочные и полностью проперестановочные подгруппы. Установлены ключевые свойства слабо проперестановочных подгрупп, а также связь со строением конечной факторизуемой группы. Основным результатом является доказательство того, что если группа  $G = AB$  факторизуется двумя слабо проперестановочными подгруппами  $A$  и  $B$ , принадлежащими насыщенной формации  $\mathfrak{F}$ , содержащей все сверхразрешимые группы, то  $\mathfrak{F}$ -корадикал группы  $G$  содержится в нильпотентном корадикале ее коммутанта:  $G^{\mathfrak{F}} \leq (G')^{\mathfrak{F}}$ . Это обобщает ряд ранее известных результатов для полунормальных, субнормальных и проперестановочных подгрупп.

Также изучены группы, у которых все силовские или все максимальные подгруппы являются слабо проперестановочными, и показано, что в этих случаях группа оказывается сверхразрешимой.

Важным практическим аспектом работы является разработка алгоритмов для системы компьютерной алгебры GAP, позволяющих проверять проперестановочность, полную проперестановочность и слабую проперестановочность подгрупп.

Полученные результаты открывают перспективы для изучения неразрешимых групп со слабо проперестановочными подгруппами.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Ballester-Bolinches, A. Products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin : De Gruyter, 2010.
2. Монахов, В. С. О сверхразрешимости группы с полунормальными подгруппами / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2020. – Т. 61, № 1. – С. 148–159.
3. Трофимук, А. А. Конечные факторизуемые группы с ограничениями на сомножители / А. А. Трофимук. – Мн. : Изд. центр БГУ, 2021. – 262 с.
4. Yi, X. On S-propermutable subgroups of finite groups / X. Yi, A. N. Skiba // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2015. – Vol. 38, nr 2. – P. 605–616.
5. Yi, X. Some new characterizations of PST-groups / X. Yi, A. N. Skiba // J. Algebra. – 2014. – Vol. 399. – P. 39–54.
6. Al-Sharo, K. A. Finite groups with given systems of weakly S-propermutable subgroups / K. A. Al-Sharo // J. Group Theory. – 2016. – Vol. 19. – P. 871–887.
7. Trofimuk, A. A. Finite groups with given systems of propermutable subgroups / A. A. Trofimuk // Eurasian Math. J. – 2024. – Vol. 15, nr 1. – P. 91–97.
8. Zubei, E. V. On a finite group with OS-propermutable Sylow subgroup / E. V. Zubei // Acta Math. Hungar. – 2024. – Vol. 174. – P. 570–577.

9. The GAP Group: GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Ver. GAP 4.15.0 released on 28 September 2025. – URL: <http://www.gap-system.org>.
10. Йи, С. Проперестановочные характеристики конечных разрешимых PST-групп и PT-групп / С. Йи // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 2. – С. 377–388.
11. Хуан, Ц. Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами / Ц. Хуан, Б. Ху, А. Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 1. – С. 210–220.
12. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
13. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. – 899 p.
14. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin : Springer-Verlag, 1967.
15. Подгорная, В. В. Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп / В. В. Подгорная // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2000. – № 4. – С. 22–25.
16. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Мн. : Выш. шк., 2006. – 207 с.
17. Монахов, В. С. О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп / В. С. Монахов, И. К. Чирик // Сибирский математический журнал. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 353–364.
18. Skiba, A. N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.

## REFERENCES

1. Ballester-Bolinches, A. Products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin : De Gruyter, 2010.
2. Monakhov, V. S. O sverkhrazreshimosti gruppy s polunormal'nymi podgruppami / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Sibirskii matematicheskii zhurnal. – 2020. – Т. 61, № 1. – S. 148–159.
3. Trofimuk, A. A. Konechnye faktorizuyemye gruppy s ogranicheniyami na somnozhiteli / A. A. Trofimuk. – Mн. : Izd. tsentr BGU, 2021. – 262 s.
4. Yi, X. On S-propermutable subgroups of finite groups / X. Yi, A. N. Skiba // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2015. – Vol. 38, nr 2. – P. 605–616.
5. Yi, X. Some new characterizations of PST-groups / X. Yi, A. N. Skiba // J. Algebra. – 2014. – Vol. 399. – P. 39–54.
6. Al-Sharo, K. A. Finite groups with given systems of weakly S-propermutable subgroups / K. A. Al-Sharo // J. Group Theory. – 2016. – Vol. 19. – P. 871–887.
7. Trofimuk, A. A. Finite groups with given systems of propermutable subgroups / A. A. Trofimuk // Eurasian Math. J. – 2024. – Vol. 15, nr 1. – P. 91–97.
8. Zubei, E. V. On a finite group with OS-propermutable Sylow subgroup / E. V. Zubei // Acta Math. Hungar. – 2024. – Vol. 174. – P. 570–577.
9. The GAP Group: GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Ver. GAP 4.15.0 released on 28 September 2025. – URL: <http://www.gap-system.org>.
10. Ii, S. Properestanovochnye kharakterizatsii konechnykh razreshimykh PST-grupp i PT-grupp / S. Ii // Sibirskii matematicheskii zhurnal. – 2015. – Т. 56, № 2. – S. 377–388.
11. Khuan, Ts. Konechnye gruppy so slabo subnormal'nymi i chastichno subnormal'nymi podgruppami / Ts. Khuan, B. Khu, A. N. Skiba // Sibirskii matematicheskii zhurnal. – 2021. – Т. 62, № 1. – С. 210–220.
12. Shemetkov, L. A. Formatsii konechnykh grupp / L. A. Shemetkov. – М. : Nauka, 1978. – 272 s.
13. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. – 899 p.
14. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin : Springer-Verlag, 1967.

15. Podgornaya, V. V. Polunormal'nye podgruppy i sverkhrazreshimost' konechnykh grupp / V. V. Podgornaya // Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk. – 2000. – № 4. – S. 22–25.

16. Monakhov, V. S. Vvedenie v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Mn. : Vysh. shk., 2006. – 207 с.

17. Monakhov, V. S. O sverkhrazreshimom koradikale proizvedeniya subnormal'nykh sverkhrazreshimykh podgrupp / V. S. Monakhov, I. K. Chirik // Sibirskii matematicheskii zhurnal. – 2017. – T. 58, № 2. – S. 353–364.

18. Skiba, A. N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.

*Рукапіс паступіў у рэдакцыю 04.07.2025*

**Екатерина Владимировна Зубей**

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. фундаментальной математики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Ekaterina Zubey**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics  
of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: [ekaterina.zubey@yandex.ru](mailto:ekaterina.zubey@yandex.ru)

**О РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ  
С ПОЛУСУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА\***

Конечная ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Подгруппа  $A$  называется полунормальной в группе  $G$ , если существует подгруппа  $B$  такая, что  $G = AB$  и  $AB_1$  – собственная в  $G$  подгруппа для всех собственных подгрупп  $B_1$  из  $B$ . Если подгруппа  $A$  субнормальная или полунормальная подгруппа группы  $G$ , то она называется полусубнормальной подгруппой группы  $G$ . В работе установлена частичная разрешимость группы, в которой подгруппы Шмидта четного порядка полусубнормальны, и перечислены неабелевы композиционные факторы такой группы.

**Ключевые слова:** конечная группа, полусубнормальная подгруппа, группа Шмидта,  $p$ -разрешимая группа.

***On the Solvability of a Finite Group with Semisubnormal Schmidt Subgroups***

A finite non-nilpotent group all of whose proper subgroups are nilpotent is called a Schmidt group. A subgroup  $A$  is called seminormal in  $G$  if there exists a subgroup  $B$  such that  $G = AB$  and  $AB_1$  is a proper subgroup in  $G$  for all proper subgroups  $B_1$  of  $B$ . If a subgroup  $A$  is subnormal or seminormal in  $G$ , then it is called a semisubnormal subgroup of  $G$ . In this paper, we establish the partial solvability of a group in which the Schmidt subgroups of even order are semisubnormal, and list the non-Abelian composition factors of such group.

**Key words:** finite group, semisubnormal subgroup, Schmidt group,  $p$ -soluble group.

**Введение**

Рассматриваются только конечные группы. Конечная ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Начало изучения таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [1].

Статья В. С. Монахова [2] содержит развернутый обзор, посвященный свойствам подгрупп Шмидта, вопросу их существования в конечных группах, а также некоторым приложениям этих результатов в теории классов.

Подгруппы Шмидта, будучи минимальными ненильпотентными группами, входят в состав любой ненильпотентной группы, что подчеркивает их фундаментальную роль в теории групп. Следовательно, свойства содержащихся в группе подгрупп Шмидта во многом определяют ее структуру.

Изучению влияния этих свойств на строение конечных групп посвящены работы таких математиков, как Я. Г. Беркович, В. А. Ведерников, В. Д. Мазуров, В. С. Монахов и С. А. Сыскин.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», № госрегистрации 20211467).

**Основная часть**

В работе [3] было предложено следующее понятие.

**Определение 1.** Подгруппа  $A$  называется *полунормальной* в группе  $G$ , если существует подгруппа  $B$  такая, что  $G = AB$  и  $AB_1$  – собственная в  $G$  подгруппа для всех собственных подгрупп  $B_1$  из  $B$ .

Монография [4] содержит систематическое изложение результатов о строении групп с заданными системами полунормальных подгрупп и различных обобщений этого понятия.

А. А. Трофимук и В. С. Монахов [5] предложили следующее понятие:

**Определение 2.** Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется *полусубнормальной* в группе  $G$ , если она субнормальна или полунормальна в группе  $G$ .

В работе [6] рассмотрены конечные группы с полусубнормальными подгруппами Шмидта и доказаны следующие результаты:

**Теорема 1** [6, теорема 2]. *Если все  $\{2, 3\}$  – подгруппы Шмидта полусубнормальны в группе  $G$ , то группа  $G$  3-разрешима.*

**Следствие 1** [6, следствие 1]. *Если все  $\{2, 3\}$  – подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые  $\{2, 5\}$  – подгруппы Шмидта полусубнормальны в группе  $G$ , то группа  $G$  разрешима.*

В настоящей работе продолжены исследования групп, у которых подгруппы Шмидта полусубнормальны. Доказана следующая теорема.

**Теорема А.**

(1) *Если в группе  $G$  все сверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка полусубнормальны в  $G$ , то  $G$  разрешима.*

(2) *Если в группе  $G$  все несверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка полусубнормальны, то неабелевы композиционные факторы группы  $G$  изоморфны  $SL(2, 4)$ . В частности, группа  $G$   $\{2, 3, 5\}'$ -разрешима.*

**Используемые обозначения и результаты**

Все обозначения и используемые определения соответствуют [7; 8].

Пусть  $p$  – простое число. Группа с нормальной силовой  $p$ -подгруппой называется  $p$ -замкнутой. Группа, содержащая нормальную подгруппу, индекс которой совпадает с порядком силовой  $p$ -подгруппы, называется  $p$ -нильпотентной.

Если порядок подгруппы  $X$  делится на простое число  $p$ , то говорят, что  $X$  –  $pd$ -подгруппа. Обозначим через  $H^G = \langle H^x \mid x \in G \rangle$  наименьшую нормальную в  $G$  подгруппу, содержащую подгруппу  $H$ . Центр и коммутант группы  $G$  обозначаются через  $Z(G)$  и  $G'$  соответственно. Симметрическая и знакопеременная группы степени  $n$  обозначаются через  $S_n$  и  $A_n$ ; диэдральная, циклическая и элементарная абелева группы порядков  $k$ ,  $m$  и  $p^t$  обозначаются через  $D_k, Z_m$ , и  $E_{p^t}$  соответственно;  $[A]B$  – полупрямое произведение нормальной подгруппы  $A$  и подгруппы  $B$ .

Пусть  $P$  – множество всех простых чисел, а  $\pi$  – некоторое множество простых чисел. Дополнение к  $\pi$  во множестве  $P$  обозначим через  $\pi'$ .

Итак,  $\pi \subseteq P$  и  $\pi' = P \setminus \pi$ . Символом  $\pi$  обозначается также функция, определенная на множестве  $N$  следующим образом:  $\pi(m)$  – множество простых чисел, делящих натуральное число  $m$ , а  $\pi(G) = \pi(|G|)$ .

Зафиксируем множество простых чисел  $\pi$ . Если  $\pi(m) \subseteq \pi$ , то натуральное число  $m$  называется  $\pi$ -числом. Группа  $G$  называется:  $\pi$ -группой, если  $\pi(G) \subseteq \pi$ ;  $\pi'$ -группой, если  $\pi(G) \subseteq \pi'$ . Если  $|\pi(G)| = 1$ , то группа  $G$  называется примарной, а при  $|\pi(G)| = 2$  – бипримарной.

Субнормальным рядом группы  $G$  называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа  $G_i$  нормальна в группе  $G_{i+1}$  для всех  $i = 0, 1, \dots, m-1$ . Этот ряд называется композиционным, если  $G_i$  является максимальной нормальной подгруппой группы  $G_{i+1}$  для каждого  $i$ ; фактор-группы  $G_{i+1}/G_i$  называются композиционными факторами этого ряда, а числа  $|G_{i+1}/G_i|$ ,  $i = 0, 1, \dots, m-1$ , – индексами композиционного ряда.

Группа называется  $\pi$ -разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо разрешимыми  $\pi$ -группами, либо  $\pi'$ -группами.

Если в цепочке подгрупп (1) подгруппа  $G_i$  нормальна в группе  $G$  для всех  $i = 0, 1, \dots, m-1$ , то цепочка (1) называется нормальным рядом группы  $G$ . Фактор-группы  $G_{i+1}/G_i$  называются факторами этого ряда.

Группа  $G$  называется сверхразрешимой, если существует нормальный ряд такой, что подрядки факторов этого ряда простые числа.

В следующей лемме приведены свойства групп Шмидта, полученные самим О. Ю. Шмидтом в 1924 г.

**Лемма 1** [1]. Пусть  $S$  – группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1)  $S = [P]Q$ , где  $P$  – нормальная силовская  $p$ -подгруппа,  $Q$  – ненормальная силовская  $q$ -подгруппа,  $p$  и  $q$  – различные простые числа;

(2)  $Q = \langle y \rangle$  – циклическая подгруппа и  $y^q \in Z(S)$ ;

(3)  $|P/P'| = p^m$ , где  $m$  – показатель числа  $p$  по модулю  $q$ .

Условимся называть  $S_{\langle p, q \rangle}$ -группой группу Шмидта с нормальной силовской  $p$ -подгруппой  $P$  и циклической силовской  $q$ -подгруппой  $Q$ . Минимальным добавлением к подгруппе  $A$  в группе  $G$  называется такая подгруппа  $B$ , что  $G = AB$  и  $G \neq AB_1$  для всех собственных подгрупп  $B_1$  из  $B$ .

**Лемма 2** [9, лемма 2 (3)]. Если  $H$  – полунормальная подгруппа группы  $G$ , а  $B$  ее супердобавление, то  $H$  перестановочна с подгруппой  $L^g$  для всех  $L \leq B$  и  $g \in G$ . В частности, подгруппа  $B^g$  будет супердобавлением к подгруппе  $H$  для каждого  $g \in G$ .

**Лемма 3** [10, лемма 1].  $S_{\langle p, q \rangle}$ -группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда  $|P| = p$  и  $q$  делит  $p-1$ .

**Лемма 4** [8, IV.5.4]. Каждая не  $p$ -нильпотентная группа содержит  $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппу для некоторого  $q \in \pi(G)$ .

**Лемма 5** [11, 3.1.1]. Каждая не 2-замкнутая группа содержит  $S_{\langle q,2 \rangle}$ -подгруппу для некоторого  $q \in \pi(G)$ .

Проведенные с помощью системы компьютерной алгебры GAP вычисления подтверждают справедливость следующего утверждения.

**Лемма 6.** В группе  $G = SL(2,4)$  подгруппы Шмидта исчерпываются с точностью до сопряженности следующими подгруппами:  $S_1 = A_4$ ,  $S_2 = [Z_5]Z_2$  и  $S_3 = [Z_3]Z_2$ .

**Лемма 7** [8, VI.4.10]. Пусть  $A$  и  $B$  – подгруппы группы  $G$  такие, что  $G \neq AB$  и  $AB^g = B^gA$  для всех  $g \in G$ . Тогда либо  $A^G \neq G$ , либо  $B^G \neq G$ .

**Лемма 8** [6, лемма 7].

(1) Если  $H$  – полусубнормальная подгруппа группы  $G$  и  $H \leq X \leq G$ , то  $H$  полусубнормальна в  $X$ .

(2) Если  $H$  – полусубнормальная подгруппа группы  $G$ ,  $N \triangleleft G$ , то  $HN$  – полусубнормальна в  $G$  и  $HN/N$  полусубнормальна в  $G/N$ .

(3) Если  $H$  – полусубнормальная подгруппа группы  $G$  и  $Y$  непустое множество элементов в  $G$ , то подгруппа

$$H^Y = \langle H^y \mid y \in Y \rangle$$

полусубнормальна в  $G$ . В частности  $H^g$ , полусубнормальна в  $G$  для любых  $g \in G$ .

**Лемма 9** [6, лемма 8]. Пусть в группе  $G$  все  $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппы полусубнормальны. Тогда:

(1) если  $H$  – подгруппа группы  $G$ , то все  $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппы из  $H$  полусубнормальны в  $H$ ;

(2) если  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ , то в фактор-группе  $G/N$  все  $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппы полусубнормальны в  $G/N$ ;

(3) если  $N \leq H \leq G$ ,  $N \triangleleft G$ , то в  $H/N$  все  $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппы полусубнормальны.

**Лемма 10.** Если в простой группе  $G$  существует полусубнормальная подгруппа Шмидта  $A$ , то  $G \cong SL(2,4)$ ,  $A \cong A_4$ ,  $B \cong Z_5$ .

*Доказательство.*

Так как  $G$  – простая группа, то в ней не существует отличных от нее нормальных подгрупп. Следовательно, подгруппа  $A$  может быть только полунормальной. Пусть  $B$  – супердобавление к  $A$  в  $G$ , а  $P$  – силовская  $p$ -подгруппа из  $B$  такая, что  $P$  не содержится в  $A$ . Подгруппа  $P$  существует, иначе  $G = AB = A$  – противоречие с тем, что  $A \neq G$ .

Предположим, что  $G \neq AP$ . По лемме 2 подгруппа  $A$  перестановочна с  $P^g$  для каждого  $g \in G$ , поэтому  $A^G \neq G$  или  $P^G \neq G$  по лемме 7. Но это противоречит простоте группы  $G$ . Поэтому допущение  $G \neq AP$  неверно и  $G = AP$ .

В лемме [12, теорема 3] перечислены неразрешимые группы  $G = AB$ , где  $A$  – группа Шмидта, а  $B$  – нильпотентная группа. При такой факторизации  $G/S(G)$  изоморфна одной из следующих групп:  $PSL(2,7)$ ,  $PGL(2,7)$ ,  $SL(2,2^n)$ ,  $2^n - 1$  – простое

число,  $PGL(2, 2^n)$  для некоторое простого  $n$ . Так как в нашем случае группа  $G$  простая и  $|\pi(G)| = 3$ , то для группы  $SL(2, 2^n)$  возможны только ситуации, когда  $n \in \{2, 3\}$ .

Таким образом,

$$G \in \{PSL(2, 7), PSL(2, 5) = SL(2, 4) = A_5, SL(2, 8)\}.$$

Факторизации этих групп известны. Среди указанных подгрупп только в группе  $SL(2, 4)$  существует полунормальная подгруппа Шмидта  $A \simeq A_4$ , которая имеет супердобавление  $B \simeq Z_5$ .

### Доказательство теоремы А

(1) Предположим, что группа  $G$  неразрешима, и пусть  $H/K$  – неабелевый композиционный фактор группы  $G$ . Тогда  $H/K$  – простая группа четного порядка, она не 2-замкнута. По лемме 5 в  $H/K$  существует  $S_{\langle p, 2 \rangle}$ -подгруппа  $A/K$  для некоторого  $p \in \pi(G)$ . По лемме 3 каждая  $S_{\langle p, 2 \rangle}$ -подгруппа из  $G$  сверхразрешима и по условию полусубнормальна. По лемме 9 (3) подгруппа  $A/K$  полусубнормальна в  $H/K$ , и применима лемма 10. Но там исключается возможность, при которой  $A/K$  является  $S_{\langle p, 2 \rangle}$ -подгруппой. Поэтому предположение, что  $G$  – неразрешимая группа неверно и  $G$  – разрешима.

(2) Предположим, что группа  $G$  неразрешима, и пусть  $H/K$  – неабелевый композиционный фактор группы  $G$ . Тогда  $H/K$  – простая группа четного порядка, поэтому не 2-нильпотентна. Согласно лемме 4, в  $H/K$  существует  $S_{\langle 2, q \rangle}$ -подгруппа  $A/K$  для некоторого  $q \in \pi(G)$ . По лемме 3 каждая  $S_{\langle 2, q \rangle}$ -подгруппа несверхразрешима. По лемме 9 (3) и условию подгруппа  $A/K$  полусубнормальна в  $H/K$ , и применима лемма 10. Тогда  $H/K \simeq SL(2, 4)$  и  $A/K \simeq A_4$ . Среди перечисленных в лемме 6 подгрупп Шмидта группы  $SL(2, 4)$  подгруппы  $[Z_5]Z_2$  и  $[Z_3]Z_2$  сверхразрешимы, подгруппа  $A_4$  несверхразрешима и полунормальна. Поэтому группа  $SL(2, 4)$  может быть композиционным фактором группы  $G$ .

Таким образом, неабелевы композиционные факторы группы  $G$  исчерпываются только группой  $SL(2, 4)$ , которая имеет порядок  $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ . Следовательно, неабелевы композиционные факторы группы  $G$  будут  $\{2, 3, 5\}$ -группами и  $G$  –  $\{2, 3, 5\}'$ -разрешима. Теорема доказана.

### Заключение

Таким образом, в настоящей статье доказана разрешимость и частичная разрешимость конечной группы, в которой некоторые из подгрупп Шмидта полусубнормальны. В частности, доказана разрешимость конечной группы, в которой все сверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка полусубнормальны.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Шмидт, О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О. Ю. Шмидт // Математический сборник. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

2. Монахов, В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В. С. Монахов // Алгебра і теорія чисел : Пр. Укр. мат. конгреса – 2001. / Ін-т математики НАН України. – Київ, 2002. – С. 81–90.
3. Su, X. On seminormal subgroups of finite group / X. Su // J. Math. (Wuhan). – 1988. – Vol. 8, 1. – P. 7–9.
4. Трофимук, А. А. Конечные факторизуемые группы с ограничениями на сомножители / А. А. Трофимук. – Мн. : Изд. центр БГУ, 2021. – 262 с.
5. Monakhov, V. S. On the supersolubility of a group with semisubnormal factors / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // J. Group Theory. – 2020. – Vol. 23. – P. 893–911.
6. Knyagina, V. N. Finite groups with semisubnormal Schmidt subgroups / V. N. Knyagina, V. S. Monakhov // Algebra Discrete Math. – 2020. – Vol. 29, nr 1. – P. 66–73.
7. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Мн. : Выш. шк., 2006. – 207 с.
8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 796 p.
9. Княгина, В. Н. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.
10. Монахов, В. С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В. С. Монахов // Математические заметки. – 1995. – Т. 58, № 5. – С. 717–722.
11. Монахов, В. С. О подгруппах Шмидта конечных групп Шмидта / В. С. Монахов // Вопросы алгебры. – 1998. – Вып. 13. – С. 153–171.
12. Монахов, В. С. О произведении 2-разложимой группы и группы Шмидта / В. С. Монахов // Доклады АН БССР. – 1974. – Т. 18, № 10. – С. 871–874.

## REFERENCES

1. Shmidt, O. Yu. Gruppy, vse podgruppy kotorykh spetsial'nye / O. Yu. Shmidt // Matematicheskii sbornik. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.
2. Monakhov, V. S. Podgruppy Shmidta, ikh sushchestvovanie i nekotorye prilozheniya / V. S. Monakhov // Algebra i teoriya chysel : Pr. Ukr. mat. kongresa – 2001. / In-t matematyky NAN Ukrainy. – Kyiv, 2002. – S. 81–90.
3. Su, X. On seminormal subgroups of finite group / X. Su // J. Math. (Wuhan). – 1988. – Vol. 8, 1. – P. 7–9.
4. Trofimuk, A. A. Konechnye faktorizuemye gruppy s ogranicheniyami na somnozhiteli / A. A. Trofimuk. – Mн. : Izd. tsentr BGU, 2021. – 262 s.
5. Monakhov, V. S. On the supersolubility of a group with semisubnormal factors / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // J. Group Theory. – 2020. – Vol. 23. – P. 893–911.
6. Knyagina, V. N. Finite groups with semisubnormal Schmidt subgroups / V. N. Knyagina, V. S. Monakhov // Algebra Discrete Math. – 2020. – Vol. 29, nr 1. – P. 66–73.
7. Monakhov, V. S. Vvedenie v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Mн. : Vysh. shk., 2006. – 207 s.
8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 796 p.
9. Knyagina, V. N. Konechnye gruppy s polunormal'nymi podgruppami Shmidta / V. N. Knyagina, V. S. Monakhov // Algebra i logika. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.
10. Monakhov, V. S. O konechnykh gruppakh s zadannym naborom podgrupp Shmidta / V. S. Monakhov // Matematicheskie zametki. – 1995. – Т. 58, № 5. – С. 717–722.
11. Monakhov, V. S. O podgruppakh Shmidta konechnykh grupp Shmidta / V. S. Monakhov // Voprosy algebrы. – 1998. – Vyp. 13. – S. 153–171.
12. Monakhov, V. S. O proizvedenii 2-razlozhimoi gruppy i gruppy Shmidta / V. S. Monakhov // Doklady AN BSSR. – 1974. – Т. 18, № 10. – С. 871–874.

**Марина Геннадьевна Кот**

канд. физ.-мат. наук, доц. каф. фундаментальной математики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Marina Kot**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Associate Professor of Department of Fundamental Mathematics  
of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: [mtorkaylo@mail.ru](mailto:mtorkaylo@mail.ru)

## РЕЗОЛЬВЕНТА АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Уравнения и системы, записанные в виде  $L_0 u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$ , встречаются в различных прикладных областях и являются объектом интенсивного изучения. Произведение  $\delta u$ , входящее в это уравнение, не определено в рамках классической теории обобщенных функций, поэтому одной из главных задач является придание смыслового значения этому выражению в левой части уравнения, т. е. фактически создание оператора, соответствующего указанной формальной записи. Для этого используют специальные аппроксимации оператора умножения на  $\delta$ -функцию. Методика исследования уравнений с  $\delta$ -образными коэффициентами включает несколько основных этапов: построение аппроксимаций рассматриваемого выражения операторами конечного ранга; нахождение резольвенты аппроксимирующего семейства; нахождение предела резольвенты и выделение случаев резонанса; описание спектра построенных предельных операторов; исследование поведения собственных значений аппроксимирующих операторов. В работе рассматриваются первые два этапа для систем, состоящих из трех уравнений с дельта-образными коэффициентами.

**Ключевые слова:** обобщенная функция, асимптотика, резонанс, оператор.

### *Resolvency of an Approximating System of Equations with Delta-Shaped Coefficients*

Equations and systems of the form  $L_0 u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$ , appear in various applied fields and are subjects of intensive study. The product  $\delta u$ , involved in these equations, is not defined within the framework of classical theory of generalized functions, making one of the main tasks the assignment of a meaningful interpretation to this expression in the left-hand side of the equation – that is, essentially, the construction of an operator corresponding to the given formal expression. To achieve this, specialized approximations of the operator of multiplication by the  $\delta$ -function are used. The methodology for investigating equations with  $\delta$ -shaped coefficients includes several main stages: construction of approximations of the expression under consideration by operators of finite rank; finding the resolvent of the approximating family; finding the limit of the resolvent and identifying cases of resonance; description of the spectrum of the constructed limit operators; investigation of the behavior of the values of the approximating operators. In this work, the first two stages of the aforementioned approach are considered for systems consisting of three equations with delta-shaped coefficients.

**Key words:** generalized function, asymptotic behavior, resonance, operator.

### Введение

Уравнения, которые записываются в виде

$$L_0 u = -\Delta u + a(\varepsilon)\delta u = f, \quad (1)$$

где  $\delta$  есть  $\delta$ -функция Дирака, возникают в различных приложениях [1] и изучаются очень активно.

Произведение  $\delta u$ , входящее в (1), не определено в рамках классической теории обобщенных функций, поэтому одной из ключевых задач является придание смыслового значения этому выражению в левой части (1), т. е. фактически построение оператора, который бы соответствовал этому формальному выражению.

Один из основных подходов к определению понятия решения уравнения и построению таких решений основан на аппроксимации выражения в левой части (1) семейством корректно заданных операторов  $L_\varepsilon$  и затем нахождении предела резольвент

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (L_\varepsilon - \lambda)^{-1} := R(\lambda).$$

Если такой предел существует, то операторно-значная функция  $R(\lambda)$  оказывается резольвентой некоторого оператора, который соответствует рассматриваемой аппроксимации формального выражения. В случае операторов в пространстве  $L_2(R^3)$  скалярных функций было обнаружено, что в типичных случаях  $R_0(\lambda)$  есть резольвента невозмущенного оператора  $R_0(\lambda) = (-\Delta - \lambda I)^{-1}$ , но возможны случаи *резонанса*, когда  $R_0(\lambda)$  есть резольвента некоторого оператора, отличного от  $-\Delta$ . Резольвента  $R_0(\lambda)$  действует по формуле

$$R_0(\lambda)f = E_\lambda * f,$$

где  $*$  – свертка функций, а  $E_\lambda(x)$  – фундаментальное решение для оператора  $-\Delta u - \lambda u$ , заданное формулой

$$E_\lambda(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|} e^{-\mu\|x\|},$$

где  $\mu^2 = -\lambda$ ,  $\operatorname{Re} \mu > 0$ . Отметим, что  $E_\lambda \in L_2(R^3)$ .

Спектр оператора  $-\Delta$  есть положительная полупрямая, причем спектр не содержит собственных значений, а у предельных операторов, отличных от  $-\Delta$ , имеется одно собственное значение. У аппроксимирующего оператора  $L_\varepsilon$  спектр может содержать (в зависимости от выбранного способа аппроксимации) конечный или даже бесконечный набор собственных значений. Поэтому общая задача заключается в описании поведения собственных значений аппроксимирующих операторов и выяснении того, как в пределе из них получается одно собственное значение.

Анализ систем уравнений обычно оказывается более сложным по сравнению с анализом одного уравнения и содержит большее число возможных вариантов.

Цель работы:

- 1) построение аппроксимаций рассматриваемого выражения операторами конечного ранга;
- 2) нахождение резольвенты аппроксимирующего семейства системы из трех уравнений (1), где  $u = (u_1, u_2, u_3)$ , а коэффициент является матрицей вида

$$A(\varepsilon) = \begin{bmatrix} a_{11}(\varepsilon) & a_{12}(\varepsilon) & a_{13}(\varepsilon) \\ a_{21}(\varepsilon) & a_{22}(\varepsilon) & a_{23}(\varepsilon) \\ a_{31}(\varepsilon) & a_{32}(\varepsilon) & a_{33}(\varepsilon) \end{bmatrix}.$$

### Основная часть

Наиболее простыми являются аппроксимации с помощью операторов конечного ранга. Рассмотрим подход, развитый в [2; 3], для исследования уравнений с  $\delta$ -образными коэффициентами. Основные этапы этого подхода:

- 1) построение аппроксимаций рассматриваемого выражения операторами конечного ранга;
- 2) нахождение резольвенты аппроксимирующего семейства;
- 3) нахождение предела резольвенты и выделение случаев резонанса; описание спектра построенных предельных операторов;
- 4) анализ поведения собственных значений аппроксимирующих операторов.

В данной работе рассматриваются первые два этапа вышеизложенного подхода для систем, состоящих из трех уравнений с  $\delta$ -образными коэффициентами.

**Построение аппроксимации.**

Мы рассматриваем формальную систему

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + a_{11}(\varepsilon)\delta u_1 + a_{12}(\varepsilon)\delta u_2 + a_{13}(\varepsilon)\delta u_3 &= f_1, \\ -\Delta u_2 + a_{21}(\varepsilon)\delta u_1 + a_{22}(\varepsilon)\delta u_2 + a_{23}(\varepsilon)\delta u_3 &= f_2, \\ -\Delta u_3 + a_{31}(\varepsilon)\delta u_1 + a_{32}(\varepsilon)\delta u_2 + a_{33}(\varepsilon)\delta u_3 &= f_3. \end{aligned}$$

Пусть  $\varphi$  – бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем, т. е.  $\varphi \in D(R^3)$  [4] такая, что  $\iiint_{R^3} \varphi(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 1$ . Для краткости записи обозначим  $\iiint_{R^3} \varphi(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int \varphi(x) dx$ . Тогда семейство гладких функций

$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  задает аппроксимацию  $\delta$ -функции как элемента пространства обобщенных функций, а семейство функционалов  $\Phi_\varepsilon(u) = \int u(x)\varphi_\varepsilon(x) dx$  – аппроксимацию  $\delta$ -функции как функционала. Поэтому для гладких функций  $u$  имеем  $\Phi_\varepsilon(u)\varphi_\varepsilon \rightarrow u(0)\delta = \delta u$  [3], т. е. на гладких функциях семейство операторов  $\Phi_\varepsilon(u)\varphi_\varepsilon$  сходится к произведению  $\delta u$  в пространстве  $D'(R^3)$ .

Таким образом, оператор

$$L_\varepsilon u = -\Delta u + a(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u(y)\varphi_\varepsilon(y) dy \tag{2}$$

задает аппроксимацию формального выражения  $-\Delta u + a(\varepsilon)\delta u$ , и в покоординатной записи это семейство имеет вид:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(u)_1 &= -\Delta u_1 + a_{11}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y) dy + \\ &+ a_{12}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y) dy + a_{13}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_3(y)\varphi_\varepsilon(y) dy, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(u)_2 &= -\Delta u_2 + a_{21}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y) dy + \\ &+ a_{22}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y) dy + a_{23}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_3(y)\varphi_\varepsilon(y) dy, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(u)_3 &= -\Delta u_3 + a_{31}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y) dy + \\ &+ a_{32}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y) dy + a_{33}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_3(y)\varphi_\varepsilon(y) dy. \end{aligned} \tag{5}$$

Задача заключается в исследовании поведения решений уравнения  $(L_\varepsilon - \lambda)u = f$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Резольвента аппроксимирующих операторов.**

При фиксированном  $\varepsilon > 0$  найдем для данных аппроксимаций такие решения непосредственно, т. е. построим резольвенту  $(L_\varepsilon - \lambda)^{-1} f = u$  и найдем, для каких  $\lambda$  она определена.

**Теорема.** Если матрица коэффициентов  $A(\varepsilon)$  обратима, то резольвента  $(L_\varepsilon - \lambda)^{-1}$  аппроксимирующего семейства  $L_\varepsilon(u)$  записывается в виде

$$(L_\varepsilon - \lambda)^{-1} = R_0(\lambda)f - S(\varepsilon, \lambda) \cdot \tilde{f} \cdot (R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x), \quad (6)$$

где

$$R_0(\lambda)f = \begin{bmatrix} R_0(\lambda)f_1 \\ R_0(\lambda)f_2 \\ R_0(\lambda)f_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{bmatrix},$$

$$S(\varepsilon, \lambda) = \left( [A(\varepsilon)]^{-1} + B(\varepsilon, \lambda) \right)^{-1}, \quad B(\varepsilon, \lambda) = \begin{bmatrix} b(\varepsilon, \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & b(\varepsilon, \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & b(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{f}_1 = \int (R_0(\lambda)f_1)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy, \quad \tilde{f}_2 = \int (R_0(\lambda)f_2)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$

$$\tilde{f}_3 = \int (R_0(\lambda)f_3)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy, \quad b(\varepsilon, \lambda) = \int (R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy.$$

Резольвента определена, если  $\lambda \in R^+$  и  $\det \left[ [A(\varepsilon)]^{-1} + B(\varepsilon, \lambda) \right] \neq 0$ .

*Доказательство.*

Построение резольвенты эквивалентно нахождению решения системы

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 - \lambda u_1 + a_{11}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy + a_{12}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy + \\ + a_{13}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_3(y)\varphi_\varepsilon(y)dy = f_1, \\ -\Delta u_2 - \lambda u_2 + a_{21}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy + a_{22}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy + \\ + a_{23}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_3(y)\varphi_\varepsilon(y)dy = f_2, \\ -\Delta u_3 - \lambda u_3 + a_{31}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy + a_{32}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy + \\ + a_{33}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_3(y)\varphi_\varepsilon(y)dy = f_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Из системы (7) получаем, если решение существует, то оно имеет вид

$$\begin{aligned} u_1(x) &= R_\lambda f_1 - C_{11}(\varepsilon, \lambda)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x) - \\ &- C_{12}(\varepsilon, \lambda)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x) - C_{13}(\varepsilon, \lambda)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x), \\ u_2(x) &= R_\lambda f_2 - C_{21}(\varepsilon, \lambda)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x) - \\ &- C_{22}(\varepsilon, \lambda)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x) - C_{23}(\varepsilon, \lambda)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x), \\ u_3(x) &= R_\lambda f_3 - C_{31}(\varepsilon, \lambda)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x) - \\ &- C_{32}(\varepsilon, \lambda)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x) - C_{33}(\varepsilon, \lambda)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 C_{11}(\varepsilon) &= a_{11}(\varepsilon) \int u_1(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{12}(\varepsilon) &= a_{12}(\varepsilon) \int u_2(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{13}(\varepsilon) &= a_{13}(\varepsilon) \int u_3(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{21}(\varepsilon) &= a_{21}(\varepsilon) \int u_1(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{22}(\varepsilon) &= a_{22}(\varepsilon) \int u_2(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{23}(\varepsilon) &= a_{23}(\varepsilon) \int u_3(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{31}(\varepsilon) &= a_{31}(\varepsilon) \int u_1(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{32}(\varepsilon) &= a_{32}(\varepsilon) \int u_2(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{33}(\varepsilon) &= a_{33}(\varepsilon) \int u_3(y) \varphi_\varepsilon(y) dy.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Подставив (8) в (9), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 C_{11}(\varepsilon, \lambda) &= a_{11}(\varepsilon) \int \left( (R_0(\lambda) f_1)(y) - C_{11}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - \right. \\
 &\quad \left. - C_{12}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - C_{13}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \right) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{12}(\varepsilon, \lambda) &= a_{12}(\varepsilon) \int \left( (R_0(\lambda) f_2)(y) - C_{21}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - \right. \\
 &\quad \left. - C_{22}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - C_{23}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \right) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{13}(\varepsilon, \lambda) &= a_{13}(\varepsilon) \int \left( (R_0(\lambda) f_3)(y) - C_{31}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - \right. \\
 &\quad \left. - C_{32}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - C_{33}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \right) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{21}(\varepsilon, \lambda) &= a_{21}(\varepsilon) \int \left( (R_0(\lambda) f_1)(y) - C_{11}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - \right. \\
 &\quad \left. - C_{12}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - C_{13}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \right) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{22}(\varepsilon, \lambda) &= a_{22}(\varepsilon) \int \left( (R_0(\lambda) f_2)(y) - C_{21}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - \right. \\
 &\quad \left. - C_{22}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - C_{23}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \right) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{23}(\varepsilon, \lambda) &= a_{23}(\varepsilon) \int \left( (R_0(\lambda) f_3)(y) - C_{31}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - \right. \\
 &\quad \left. - C_{32}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - C_{33}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \right) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{31}(\varepsilon, \lambda) &= a_{31}(\varepsilon) \int \left( (R_0(\lambda) f_1)(y) - C_{11}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - \right. \\
 &\quad \left. - C_{12}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - C_{13}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \right) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{32}(\varepsilon, \lambda) &= a_{32}(\varepsilon) \int \left( (R_0(\lambda) f_2)(y) - C_{21}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - \right. \\
 &\quad \left. - C_{22}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - C_{23}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \right) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{33}(\varepsilon, \lambda) &= a_{33}(\varepsilon) \int \left( (R_0(\lambda) f_3)(y) - C_{31}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - \right. \\
 &\quad \left. - C_{32}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) - C_{33}(\varepsilon, \lambda) (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \right) \varphi_\varepsilon(y) dy.
 \end{aligned}$$

После преобразований получаем

$$\begin{aligned}
 C_{11}(\varepsilon, \lambda) &= a_{11}(\varepsilon) \int (R_0(\lambda) f_1)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{11}(\varepsilon) C_{11}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - \\
 &- a_{11}(\varepsilon) C_{12}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{11}(\varepsilon) C_{13}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{12}(\varepsilon, \lambda) &= a_{12}(\varepsilon) \int (R_0(\lambda) f_2)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{12}(\varepsilon) C_{21}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - \\
 &- a_{12}(\varepsilon) C_{22}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{12}(\varepsilon) C_{23}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{13}(\varepsilon, \lambda) &= a_{13}(\varepsilon) \int (R_0(\lambda) f_3)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{13}(\varepsilon) C_{31}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - \\
 &- a_{13}(\varepsilon) C_{32}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{13}(\varepsilon) C_{33}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{21}(\varepsilon, \lambda) &= a_{21}(\varepsilon) \int (R_0(\lambda) f_1)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{21}(\varepsilon) C_{11}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - \\
 &- a_{21}(\varepsilon) C_{12}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{21}(\varepsilon) C_{13}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{22}(\varepsilon, \lambda) &= a_{22}(\varepsilon) \int (R_0(\lambda) f_2)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{22}(\varepsilon) C_{21}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - \\
 &- a_{22}(\varepsilon) C_{22}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{22}(\varepsilon) C_{23}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{23}(\varepsilon, \lambda) &= a_{23}(\varepsilon) \int (R_0(\lambda) f_3)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{23}(\varepsilon) C_{31}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - \\
 &- a_{23}(\varepsilon) C_{32}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{23}(\varepsilon) C_{33}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{31}(\varepsilon, \lambda) &= a_{31}(\varepsilon) \int (R_0(\lambda) f_1)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{31}(\varepsilon) C_{11}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - \\
 &- a_{31}(\varepsilon) C_{12}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{31}(\varepsilon) C_{13}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{32}(\varepsilon, \lambda) &= a_{32}(\varepsilon) \int (R_0(\lambda) f_2)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{32}(\varepsilon) C_{21}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - \\
 &- a_{32}(\varepsilon) C_{22}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{32}(\varepsilon) C_{23}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\
 C_{33}(\varepsilon, \lambda) &= a_{33}(\varepsilon) \int (R_0(\lambda) f_3)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{33}(\varepsilon) C_{31}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - \\
 &- a_{33}(\varepsilon) C_{32}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{33}(\varepsilon) C_{33}(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy.
 \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$b(\varepsilon, \lambda) = \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy,$$

$$\tilde{f}_1 = \int (R_0(\lambda) f_1)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy,$$

$$\tilde{f}_2 = \int (R_0(\lambda) f_2)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy,$$

$$\tilde{f}_3 = \int (R_0(\lambda) f_3)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{aligned}
 C_{11}(\varepsilon, \lambda) + a_{11}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{11}(\varepsilon, \lambda) + a_{11}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{12}(\varepsilon, \lambda) + a_{11}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{13}(\varepsilon, \lambda) &= a_{11}(\varepsilon)\tilde{f}_1, \\
 C_{12}(\varepsilon, \lambda) + a_{12}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{21}(\varepsilon, \lambda) + a_{12}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{22}(\varepsilon, \lambda) + a_{12}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{23}(\varepsilon, \lambda) &= a_{12}(\varepsilon)\tilde{f}_2, \\
 C_{13}(\varepsilon, \lambda) + a_{13}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{31}(\varepsilon, \lambda) + a_{13}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{32}(\varepsilon, \lambda) + a_{13}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{33}(\varepsilon, \lambda) &= a_{13}(\varepsilon)\tilde{f}_3, \\
 C_{21}(\varepsilon, \lambda) + a_{21}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{11}(\varepsilon, \lambda) + a_{21}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{12}(\varepsilon, \lambda) + a_{21}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{13}(\varepsilon, \lambda) &= a_{21}(\varepsilon)\tilde{f}_1, \\
 C_{22}(\varepsilon, \lambda) + a_{22}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{21}(\varepsilon, \lambda) + a_{22}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{22}(\varepsilon, \lambda) + a_{22}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{23}(\varepsilon, \lambda) &= a_{22}(\varepsilon)\tilde{f}_2, \\
 C_{23}(\varepsilon, \lambda) + a_{23}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{31}(\varepsilon, \lambda) + a_{23}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{32}(\varepsilon, \lambda) + a_{23}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{33}(\varepsilon, \lambda) &= a_{23}(\varepsilon)\tilde{f}_3, \\
 C_{31}(\varepsilon, \lambda) + a_{31}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{11}(\varepsilon, \lambda) + a_{31}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{12}(\varepsilon, \lambda) + a_{31}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{13}(\varepsilon, \lambda) &= a_{31}(\varepsilon)\tilde{f}_1, \\
 C_{32}(\varepsilon, \lambda) + a_{32}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{21}(\varepsilon, \lambda) + a_{32}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{22}(\varepsilon, \lambda) + a_{32}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{23}(\varepsilon, \lambda) &= a_{32}(\varepsilon)\tilde{f}_2, \\
 C_{33}(\varepsilon, \lambda) + a_{33}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{31}(\varepsilon, \lambda) + a_{33}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{32}(\varepsilon, \lambda) + a_{33}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda)C_{33}(\varepsilon, \lambda) &= a_{33}(\varepsilon)\tilde{f}_3.
 \end{aligned}$$

Находим сумму первого, второго и третьего уравнения, а также четвертого с пятым и шестым, а седьмого с восьмым и девятым. Тогда система примет вид

$$\begin{aligned}
 \left( I + \begin{bmatrix} a_{11}(\varepsilon) & a_{12}(\varepsilon) & a_{13}(\varepsilon) \\ a_{21}(\varepsilon) & a_{22}(\varepsilon) & a_{23}(\varepsilon) \\ a_{31}(\varepsilon) & a_{32}(\varepsilon) & a_{33}(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(\varepsilon, \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & b(\varepsilon, \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & b(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} C_{11}(\varepsilon, \lambda) & C_{12}(\varepsilon, \lambda) & C_{13}(\varepsilon, \lambda) \\ C_{21}(\varepsilon, \lambda) & C_{22}(\varepsilon, \lambda) & C_{23}(\varepsilon, \lambda) \\ C_{31}(\varepsilon, \lambda) & C_{32}(\varepsilon, \lambda) & C_{33}(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix} &= \\
 = \begin{bmatrix} a_{11}(\varepsilon) & a_{12}(\varepsilon) & a_{13}(\varepsilon) \\ a_{21}(\varepsilon) & a_{22}(\varepsilon) & a_{23}(\varepsilon) \\ a_{31}(\varepsilon) & a_{32}(\varepsilon) & a_{33}(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{bmatrix}, &
 \end{aligned}$$

т. е. можем записать систему в виде

$$(I + A(\varepsilon)B(\varepsilon, \lambda))C(\varepsilon, \lambda) = A(\varepsilon)F,$$

где

$$\begin{aligned}
 A(\varepsilon) &= \begin{bmatrix} a_{11}(\varepsilon) & a_{12}(\varepsilon) & a_{13}(\varepsilon) \\ a_{21}(\varepsilon) & a_{22}(\varepsilon) & a_{23}(\varepsilon) \\ a_{31}(\varepsilon) & a_{32}(\varepsilon) & a_{33}(\varepsilon) \end{bmatrix}, \\
 B(\varepsilon, \lambda) &= \begin{bmatrix} b(\varepsilon, \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & b(\varepsilon, \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & b(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix}, \\
 C(\varepsilon, \lambda) &= \begin{bmatrix} C_{11}(\varepsilon, \lambda) & C_{12}(\varepsilon, \lambda) & C_{13}(\varepsilon, \lambda) \\ C_{21}(\varepsilon, \lambda) & C_{22}(\varepsilon, \lambda) & C_{23}(\varepsilon, \lambda) \\ C_{31}(\varepsilon, \lambda) & C_{32}(\varepsilon, \lambda) & C_{33}(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix}, \\
 F &= \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\left([A(\varepsilon)]^{-1} + B(\varepsilon, \lambda)\right)C(\varepsilon, \lambda) = F.$$

Поэтому если

$$\det\left|[A(\varepsilon)]^{-1} + B(\varepsilon, \lambda)\right| \neq 0,$$

то

$$C(\varepsilon, \lambda) = \left([A(\varepsilon)]^{-1} + B(\varepsilon, \lambda)\right)^{-1} F.$$

Следовательно, решение представится в виде

$$\begin{bmatrix} u_1(\varepsilon) \\ u_2(\varepsilon) \\ u_3(\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0(\lambda)f_1 \\ R_0(\lambda)f_2 \\ R_0(\lambda)f_3 \end{bmatrix} - S(\varepsilon, \lambda) \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{bmatrix} (R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x), \quad (10)$$

где

$$S(\varepsilon, \lambda) = \left([A(\varepsilon)]^{-1} + B(\varepsilon, \lambda)\right)^{-1}.$$

Выражение вида (10) эквивалентно (6).

Здесь мы предполагаем, что матрица  $A(\varepsilon)$  обратима при  $\varepsilon > 0$ . Это не ограничивает общности, т. к., добавив к этой матрице члены более высокого порядка, всегда можем получить обратимую матрицу. При этом интересующие нас выражения зависят только от нескольких главных членов в разложении  $A(\varepsilon)$ , т. е. члены высокого порядка не влияют на окончательные результаты.

Таким образом, резольвента определена, если

$$\det\left|[A(\varepsilon)]^{-1} + B(\varepsilon, \lambda)\right| \neq 0,$$

а те точки  $\lambda$ , при которых этот определитель равен нулю, являются спектральными значениями этого оператора. Теорема доказана.

### Заклучение

В ходе проведенного исследования были успешно выполнены ключевые этапы анализа систем уравнений с дельта-образными коэффициентами, а именно – построение аппроксимаций рассматриваемого оператора с помощью операторов конечного ранга и нахождение резольвенты соответствующего аппроксимирующего семейства. Эти результаты являются важным шагом в понимании спектральных свойств таких систем и позволяют более глубоко анализировать их поведение в предельных случаях.

Построение аппроксимаций с помощью операторов конечного ранга обеспечивает возможность точно моделировать сложные дельта-образные взаимодействия, что в условиях классической теории функций остается затруднительным или невозможным. Полученные формы аппроксимаций дают ясное представление о структуре решений, позволяют исследовать предельное поведение и выявлять феномен резонанса, возникающего в процессе изменения параметров систем.

Определение резольвенты для аппроксимирующего семейства является важным результатом, т. к. оно дает возможность не только аналитически исследовать спектральные характеристики построенных операторов, но и применять полученные результаты для анализа устойчивости решений и динамики соответствующих систем.

Анализ резольвенты позволяет выявить возможные резонансные ситуации и определить существенные различия между предельными и исходными операторами.

Полученные результаты имеют потенциальное применение в различных областях математики и математической физики, где возникают уравнения с дельта-образными коэффициентами, например в теории квантовых графов, моделях диффузий и волновых процессов с точечными взаимодействиями.

Таким образом, выполненная работа вносит значительный вклад в развитие теории операторов с дельта-образными коэффициентами и предлагает новые методы анализа подобных систем, что в дальнейшем может способствовать решению актуальных задач в математической физике и прикладных науках.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Альбеверно, С. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверно [и др.] ; пер. с англ. В. А. Гейлера [и др.] – М. : Мир, 1991. – 566 с.
2. Антоневиц, А. Б. Аппроксимации операторов с дельта-образными коэффициентами / А. Б. Антоневиц, Т. А. Романчук // Актуальные проблемы математики : сб. науч. тр. ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: Е. А. Ровба [и др.]. – Гродно, 2008. – С. 11–28.
3. Антоневиц, А. Б. Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций / А. Б. Антоневиц, Т. А. Романчук. – Саарбрюккен : LAPLAMBERT, 2012.
4. Березин, Ф. А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 137, № 5. – С. 1011–1014.
5. Кот, М. Г. О резольвентной сходимости операторов, аппроксимирующих систему уравнений с  $\delta$ -образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вестник Белорусского государственного университета. Физика. Математика. Информатика. – 2015. – № 1. – С. 111–117.
6. Кот, М. Г. Асимптотика собственных вектор-функций операторов, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с  $\delta$ -образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вестні Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сeryя фізіка-матэматычных навук. – 2017. – № 3. – С. 15–26.
7. Романчук, Т. А. Явление резонанса для матрично-значных функций / Т. А. Романчук // Вестні Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сeryя фізіка-матэматычных навук. – 2008. – № 2. – С. 8–16.
8. Кащенко, И. С. Асимптотическое разложение решений уравнений : метод указания / И. С. Кащенко ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2011. – 44 с.

#### REFERENCES

1. Al'beverio, S. Reshaemye modeli v kvantovoi mekhanike / S. Al'beverio [i dr.] ; per. s angl. V. A. Geilera [i dr.] – M. : Mir, 1991. – 566 s.
2. Antonevich, A. B. Approksimatsii operatorov s del'ta-obraznymi koeffitsientami / A. B. Antonevich, T. A. Romanchuk // Aktual'nye problemy matematiki : sb. nauch. tr. GrGU im. Ya. Kupaly ; redkol.: E. A. Rovba [i dr.]. – Grodno, 2008. – S. 11–28.
3. Antonevich, A. B. Uravneniya s del'ta-obraznymi koeffitsientami: metod konechno-mernykh approksimatsii / A. B. Antonevich, T. A. Romanchuk. – Saarbryukken : LAPLAMBERT, 2012.
4. Berezin, F. A. Zamechanie ob uravnenii Shredingera s singulyarnym potentsialom / F. A. Berezin, L. D. Faddeev // Doklady AN SSSR. – 1961. – T. 137, № 5. – S. 1011–1014.
5. Kot, M. G. O rezol'ventnoi skhodimosti operatorov, approksimiruyushchikh sistemu uravnenii s  $\delta$ -obraznymi koeffitsientami / M. G. Kot // Vestnik Belorusskogo gosudarsevnenogo universiteta. Fizika. Matematika. Informatika. – 2015. – № 1. – S. 111–117.
6. Kot, M. G. Asimptotika sobstvennykh vektor-funktsii operatorov, approksimiruyushchikh differentsial'nye uravneniya s  $\delta$ -obraznymi koeffitsientami / M. G. Kot // Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belaruci. Seryya fizika-matematychnykh navuk. – 2017. – № 3. – S. 15–26.
7. Romanchuk, T. A. Yavlenie rezonansa dlya matrichno-znachnykh funktsii / T. A. Romanchuk // Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belaruci. Seryya fizika-matematychnykh navuk. – 2008. – № 2. – S. 8–16.
8. Kashchenko, I. S. Asimptoticheskoe razlozhenie reshenii uravnenii : metod ukazaniya / I. S. Kashchenko ; Yarosl. gos. un-t im. P. G. Demidova. – Yaroslavl' : YarGU, 2011. – 44 s.

**Ирина Леонидовна Сохор**

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Irina Sokhor**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics  
of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: [irina.sokhor@gmail.com](mailto:irina.sokhor@gmail.com)

**CP-ПОДГРУППЫ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ\***

Примарным элементом конечной группы называют элемент, порядок которого есть степень некоторого простого числа. Для краткости подгруппу, порожденную примарным элементом, будем называть CP-подгруппой. Установлено строение конечной группы, CP-подгруппы которой субмодулярны или самонормализуемы. Доказано, что в группе с модулярными или самонормализуемыми CP-подгруппами каждая подгруппа, порядок которой не делится на порядок подгруппы Картера группы, перестановочна в группе.

**Ключевые слова:** конечная группа, примарная подгруппа, циклическая подгруппа.

**CP-Subgroups in Finite Groups**

A primary element of a finite group is an element with prime-power order. For brevity, a subgroup generated by a primary element is called a CP-subgroup. We described a structure of a finite group with submodular or self-normalizing CP-subgroups. In particular, we prove that in a finite group  $G$  with modular or self-normalizing CP-subgroups, every subgroup whose order does not divided by the order of a Carter subgroup of  $G$  is permutable in  $G$ .

**Key words:** finite group, primary subgroup, cyclic subgroup.

**Введение**

Рассматриваются только конечные группы.

Примарным элементом группы называют элемент, порядок которого есть степень некоторого простого числа. Для краткости подгруппу, порожденную примарным элементом, будем называть CP-подгруппой. Каждая неединичная группа содержит CP-подгруппы, и способ их вложения существенно влияет на строение всей группы. Так, группа, все CP-подгруппы которой нормальны, дедекиндова (т. е. каждая подгруппа в группе нормальна). Группа с субнормальными CP-подгруппами нильпотентна. Известны также признаки сверхразрешимости и обобщенной сверхразрешимости группы с ограничениями на CP-подгруппы [1–5].

Важным обобщением понятия нормальности является понятие модулярности, которое родом из теории решеток. Напомним [6, с. 43], что подгруппа  $H$  группы  $G$  называется модулярной подгруппой группы  $G$ , если  $H$  является модулярным элементом решетки  $\mathcal{L}(G)$  всех подгрупп группы  $G$ , а значит, выполнены следующие соотношения:

$$(1) \langle A, H \rangle \cap B = \langle A, H \cap B \rangle \text{ для всех } A, B \leq G \text{ таких, что } A \leq B;$$

$$(2) \langle A, H \rangle \cap B = \langle H, A \cap B \rangle \text{ для всех } A, B \leq G \text{ таких, что } H \leq B.$$

Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется перестановочной в  $G$  [7, с. 43], если  $H$  перестановочна с каждой подгруппой группы  $G$ .

В силу тождества Дедекинда каждая перестановочная подгруппа, в частности, каждая нормальная подгруппа, модулярна.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», номер госрегистрации 20211467).

Обратное, вообще говоря, неверно. Так, в неабелевой группе порядка 6 подгруппа порядка 2 модулярна, но непостоянна. Поскольку подгруппа, порожденная модулярными подгруппами, модулярна в группе (лемма 1 ниже), то группа, каждая  $CP$ -подгруппа которой модулярна, является  $M$ -группой [6, с. 41], т. е. группой с модулярной решеткой подгрупп.

Модулярность в общем случае нетранзитивна. Поэтому естественным обобщением понятия модулярности является понятие субмодулярности.

Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется субмодулярной подгруппой группы  $G$ , если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq \dots \leq H_i \leq H_{i+1} \leq \dots \leq H_n = G$$

такая, что подгруппа  $H_i$  модулярна в  $H_{i+1}$  для каждого  $i$  [8, с. 546].

Класс  $\mathcal{C}$  всех групп, в которых каждая  $CP$ -подгруппа субмодулярна, введен в рассмотрение и описан в [9]. В частности, каждая группа из класса  $\mathcal{C}$  имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Свойства групп из класса  $\mathcal{Z}$  всех групп, каждая примарная подгруппа которых субмодулярна, описаны в работах [8–10]. Заметим, что  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{C}$ , причем это включение собственное [9, пример 3].

В настоящей работе исследуются группы с субмодулярными или самонормализуемыми  $CP$ -подгруппами. Отметим, что в общем случае субмодулярность и самонормализуемость не являются альтернативными понятиями. Так, в симметрической группе  $S_4$  степени 4 силовская 2-подгруппа  $D_8$  субмодулярна и самонормализуема. Доказана следующая

**Теорема 1.** *В группе  $G$  каждая  $CP$ -подгруппа субмодулярна или самонормализуема тогда и только тогда, когда либо  $G \in \mathcal{C}$ , либо группа  $G$  представима в виде  $G = G' \rtimes \langle x \rangle$ , где  $\langle x \rangle$  – силовская  $p$ -подгруппа для некоторого  $p \in \pi(G)$  и подгруппа Картера группы  $G$  и  $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{C}$ .*

### Вспомогательные результаты

Если  $H$  – подгруппа (собственная подгруппа) группы  $G$ , то будем писать  $H \leq G$  и  $H < G$  соответственно. Через  $\pi(G)$  будем обозначать множество всех простых делителей порядка группы  $G$ , а через  $A \rtimes B$  – полупрямое произведение нормальной подгруппы  $A$  и подгруппы  $B$ ;  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{N}$  – класс всех абелевых и всех нильпотентных групп соответственно.

Напомним, подгруппой Картера называют нильпотентную самонормализуемую подгруппу ([11, VI.12], [12, IV]). В любой разрешимой группе подгруппы Картера являются  $\mathfrak{N}$ -проекторами, они существуют и сопряжены [12, теорема 15.4]. В неразрешимой группе подгруппы Картера может не быть, но, согласно теореме Е. П. Вдовина [13], в доказательстве которой используется классификация конечных простых групп, подгруппы Картера сопряжены в любой группе, где существуют.

Нам потребуются следующие свойства модулярных и субмодулярных подгрупп.

**Лемма 1** [6, с. 361]. Пусть  $G$  – группа,  $K$  – подгруппа группы  $G$ ,  $H$  – модулярная подгруппа группы  $G$  и  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ . Тогда

- (1) подгруппа  $H^g$  модулярна в группе  $G$  для любого  $g \in G$ ;
- (2) если  $N \leq H$ , то  $H/N$  модулярна в  $G/N$ ;
- (3) если  $N \leq K$  и  $K/N$  модулярна в  $G/N$ , то подгруппа  $K$  модулярна в группе  $G$ ;
- (4) подгруппа  $H \cap K$  модулярна в  $K$ ;
- (5) если подгруппа  $K$  модулярна в группе  $G$ , то  $\langle H, K \rangle$  модулярна в группе  $G$ .

**Лемма 2** [8, лемма 1]. Пусть  $G$  – группа,  $K$  – подгруппа группы  $G$ ,  $H$  – субмодулярная подгруппа группы  $G$ ,  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ . Тогда

- (1) подгруппа  $H^g$  субмодулярна в группе  $G$  для любого  $g \in G$ ;

- (2) если  $N \leq H$ , то  $H/N$  субмодулярна в  $G/N$ ;  
 (3) если  $N \leq K$  и  $K/N$  субмодулярна в  $G/N$ , то подгруппа  $K$  субмодулярна в  $G$ ;  
 (4) подгруппа  $H \cap K$  субмодулярна в  $K$ ;  
 (5) если  $K \leq H$  и подгруппа  $K$  субмодулярна в  $H$ , то  $H$  субмодулярна в группе  $G$ .

**Лемма 3** [6, лемма 5.1.9]. Примарная подгруппа  $A$  группы  $G$  модулярна в  $G$  тогда и только тогда, когда либо  $A$  перестановочна в  $G$ , либо  $G/A_G = A^G/A_G \times B/A_G$ , где  $A^G/A_G$  – холлова неабелева  $P$ -группа.

Здесь и далее  $H_G$  – ядро подгруппы  $H$  в группе  $G$ , т. е. наибольшая нормальная в  $G$  подгруппа, содержащаяся в  $H$ ,  $H^G$  – нормальное замыкание подгруппы  $H$  в группе  $G$ , т. е. наименьшая нормальная в  $G$  подгруппа, содержащая  $H$ . Напомним [6, с. 49], что неабелева  $P$ -группа представима в виде полупрямого произведения элементарной абелевой нормальной подгруппы  $P$  порядка  $p^{n-1}$  и подгруппы  $Q$  простого порядка  $q \neq p$ , которая индуцирует нетривиальный степенной автоморфизм на  $P$ .

**Лемма 4** [6, лемма 5.1.1]. Подгруппа  $H$  группы  $G$  перестановочна в  $G$  тогда и только тогда, когда подгруппа  $H$  модулярна и субнормальна в  $G$ .

Группа, в которой каждая подгруппа перестановочна, называется группой Ивасава [7, с. 24]. Понятно, что группа Ивасава нильпотентна. В силу леммы 4 любая группа Ивасава является  $M$ -группой. Поэтому  $p$ -группа Ивасава либо является дедекиндовой группой, либо содержит абелеву нормальную подгруппу  $N$  такую, что  $G/N$  – циклическая и  $a^x = a^{1+p^s}$  для всех  $a \in N$ , причем  $s \geq 2$  для  $p = 2$  [7, теорема 1.4.3].

### Основной результат

#### Доказательство теоремы 1.

Если в группе  $G$  каждая СР-подгруппа субмодулярна, то  $G \in \mathcal{C}$ . Пусть  $G \notin \mathcal{C}$ . Тогда группа  $G$  содержит СР-подгруппу  $A = \langle x \rangle$ , которая не субмодулярна в  $G$ .

Для определенности будем считать, что  $A$  является  $p$ -группой для некоторого  $p \in \pi(G)$ . По условию подгруппа  $A$  самонормализуема, т. е.  $N_G(A) = A$ , а значит,  $A$  – силовская подгруппа группы  $G$  и подгруппа Картера. В силу [11, IV.2.6] группа  $G$  содержит нормальную подгруппу  $N$  такую, что  $G = N \rtimes A$ . Понятно, что  $p \notin \pi(N)$ . Выберем произвольную СР-подгруппу  $X$  группы  $N$ . Тогда по условию подгруппа  $X$  субмодулярна или самонормализуема в группе  $G$ . Если  $N_G(X) = X$ , то подгруппа  $X$  является подгруппой Картера группы  $G$ . Поэтому подгруппы  $A$  и  $X$  сопряжены – противоречие. Следовательно, каждая СР-подгруппа из  $N$  субмодулярна в группе  $G$ . Поэтому в подгруппе  $N$  все СР-подгруппы субмодулярны по лемме 2 (4), и  $N \in \mathcal{C}$ . Таким образом, группа  $G$  разрешима. Поскольку в разрешимой группе подгруппа Картера является  $\mathfrak{R}$ -проектором [12, теорема 15.4], то  $G = N \rtimes A = G^{\mathfrak{R}}A$ . Отсюда  $N \leq G^{\mathfrak{R}}$ .

Так как  $G/N \simeq \langle x \rangle \in \mathfrak{A}$ , то  $G^{\mathfrak{R}} \leq G' \leq N$ , и  $N = G'$ . Таким образом,  $G = G' \rtimes \langle x \rangle$ . Пусть  $X$  – произвольная СР-подгруппа из  $G' \rtimes \langle x^p \rangle$ . Если подгруппа  $X$  самонормализуема в  $G$ , то подгруппа  $X$  является подгруппой Картера группы  $G$ , и подгруппы  $X$  и  $\langle x \rangle$  сопряжены – противоречие. Поэтому каждая СР-подгруппа из  $G' \rtimes \langle x^p \rangle$  субмодулярна в  $G$ , а значит, и в  $G' \rtimes \langle x^p \rangle$  по лемме 2 (4). Следовательно,  $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{C}$ .

Наоборот, если  $G \in \mathcal{C}$ , то каждая СР-подгруппа группы  $G$  субмодулярна в  $G$ .

Пусть  $G \notin \mathcal{C}$  и  $G = G' \rtimes \langle x \rangle$ , где  $\langle x \rangle$  – силовская  $p$ -подгруппа для некоторого  $p \in \pi(G)$  и подгруппа Картера группы  $G$  и  $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{C}$ . Выберем произвольную СР-подгруппу  $X$  группы  $G$ . Если  $p \notin \pi(X)$ , то  $X \leq G' \in \mathcal{C}$ , а значит,  $X$  субмодулярна в  $G'$ . Отсюда, по лемме 2 (5) подгруппа  $X$  субмодулярна в группе  $G$ . Пусть  $p \in \pi(X)$ . Если  $|X| = |\langle x \rangle|$ , то подгруппы  $\langle x \rangle$  и  $X$  сопряжены. Поэтому  $X$  – подгруппа Картера группы  $G$  и  $X = N_G(X)$ . Если  $|X| \neq |\langle x \rangle|$ , то  $X^g < \langle x \rangle$  для некоторого  $g \in G$ . Следовательно,  $X^g \leq G' \rtimes \langle x^p \rangle$ . Поскольку  $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{C}$ , то  $X^g$  субмодулярна в  $G' \rtimes \langle x^p \rangle$ ,

а значит, по лемме 2 (5) подгруппа  $X^g$  субмодулярна в группе  $G$ , т. к.  $G' \rtimes \langle x^p \rangle$  нормальна в  $G$ . Таким образом, подгруппа  $X$  субмодулярна в группе  $G$  по лемме 2 (1). Теорема доказана.

**Следствие 1.1** [14, теорема 2]. *В группе  $G$  каждая примарная подгруппа субмодулярна или самонормализуема тогда и только тогда, когда  $G$  – группа одного из следующих типов:*

(1)  $G \in \mathcal{Z}$ ;

(2)  $G \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{Z}$ , и группа  $G$  представима в виде  $G = G^{\mathfrak{N}} \rtimes R$ , где  $R$  – несубмодулярная нециклическая силовская  $r$ -подгруппа и подгруппа Картера группы  $G$ ,  $r = \min \pi(G)$ , и  $G^{\mathfrak{N}} \rtimes X \in \mathcal{Z}$  для каждой собственной подгруппы  $X$  из  $R$ ;

(3)  $G \notin \mathcal{C}$ , и группа  $G$  представима в виде  $G = G' \rtimes \langle x \rangle$ , где  $\langle x \rangle$  – силовская  $p$ -подгруппа для некоторого  $p \in \pi(G)$  и подгруппа Картера группы  $G$  и  $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{Z}$ .

*Доказательство.*

Пусть в группе  $G$  каждая примарная подгруппа субмодулярна или самонормализуема. Тогда в группе  $G$  каждая СР-подгруппа субмодулярна или самонормализуема, и, по теореме 1, либо  $G \in \mathcal{C}$ , либо группа  $G$  представима в виде  $G = G' \rtimes \langle x \rangle$ , где  $\langle x \rangle$  – силовская  $p$ -подгруппа для некоторого  $p \in \pi(G)$  и подгруппа Картера группы  $G$  и  $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{C}$ . Если в группе  $G$  все примарные подгруппы субмодулярны, то  $G \in \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}$ . Пусть группа  $G$  содержит несубмодулярную  $r$ -подгруппу  $R$  для некоторого  $r \in \pi(G)$  и группа  $G \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{Z}$ . Тогда подгруппа  $R$  нециклическая, и, по условию,  $N_G(R) = R$ . Следовательно, подгруппа  $R$  является подгруппой Картера группы  $G$ . Поскольку группа  $G$  имеет силовскую башню сверхразрешимого типа в силу [9, лемма 3.2], то  $r = \min \pi(G)$  и в группе  $G$  существует нормальная  $r'$ -холлова подгруппа  $G_{r'}$ . Поэтому  $G = G_{r'} \rtimes R$  и  $G_{r'} \leq G^{\mathfrak{N}}$ . С другой стороны,  $G/G_{r'} \simeq R \in \mathfrak{N}$ , а значит,  $G^{\mathfrak{N}} = G_{r'}$  и  $G = G^{\mathfrak{N}} \rtimes R$ . Пусть  $X$  – собственная подгруппа из  $R$  и  $B$  – произвольная примарная подгруппа из  $G^{\mathfrak{N}} \rtimes X$ . По условию, подгруппа  $B$  самонормализуема или субмодулярна в группе  $G$ . Если  $N_G(B) = B$ , то подгруппы  $R$  и  $B$  сопряжены – противоречие. Поэтому подгруппа  $B$  субмодулярна в группе  $G$ . Отсюда, по лемме 2 (4), подгруппа  $B$  субмодулярна в  $G^{\mathfrak{N}} \rtimes X$ , и  $G^{\mathfrak{N}} \rtimes X \in \mathcal{Z}$ . Пусть теперь  $G \notin \mathcal{C}$  и группа  $G$  представима в виде  $G = G' \rtimes \langle x \rangle$ , где  $\langle x \rangle$  – силовская  $p$ -подгруппа для некоторого  $p \in \pi(G)$  и подгруппа Картера группы  $G$  и  $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{C}$ . Выберем произвольную примарную подгруппу  $B$  группы  $G' \rtimes \langle x^p \rangle$ . Поскольку  $|\langle x \rangle|$  не делит  $|B|$ , то подгруппа  $B$  самонормализуема в группе  $G$ . Отсюда, по условию подгруппа,  $B$  субмодулярна в  $G$ . Следовательно, по лемме 2 (4), подгруппа  $B$  субмодулярна в группе  $G' \rtimes \langle x^p \rangle$ , и  $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{Z}$ .

Наоборот, если  $G \in \mathcal{Z}$ , то каждая примарная подгруппа группы  $G$  субмодулярна в  $G$ . Пусть группа  $G \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{Z}$  и  $G = G^{\mathfrak{N}} \rtimes R$ , где  $R$  – несубмодулярная нециклическая силовская  $r$ -подгруппа и подгруппа Картера группы  $G$ ,  $r = \min \pi(G)$ , и  $G^{\mathfrak{N}} \rtimes X \in \mathcal{Z}$  для каждой собственной подгруппы  $X$  из  $R$ . Выберем произвольную  $q$ -подгруппу  $Q$  группы  $G$ . Если  $q \neq r$ , то  $Q \leq G^{\mathfrak{N}} \in \mathcal{Z}$  и подгруппа  $Q$  субмодулярна в  $G$  (по лемме 2). Пусть  $q = r$ , тогда  $Q^g \leq R$  для некоторого  $g \in G$ . Если  $Q^g = R$ , то  $Q = N_G(Q)$ . Пусть  $Q^g < R$ , тогда  $G^{\mathfrak{N}} \rtimes Q^g \in \mathcal{Z}$  и подгруппа  $Q$  субмодулярна в  $G$  (по лемме 2).

Аналогично можно показать, что если группа  $G = G' \rtimes \langle x \rangle$ , где  $\langle x \rangle$  – силовская  $p$ -подгруппа для некоторого  $p \in \pi(G)$  и подгруппа Картера группы  $G$  и  $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{Z}$ , то в группе  $G$  каждая примарная подгруппа субмодулярна или самонормализуема. Следствие доказано.

**Пример.** В знакопеременной группе  $A_4$  степени 4 каждая СР-подгруппа субмодулярна или самонормализуема, при этом подгруппа  $C_2$  немодулярна и несамонормализуема.

**Следствие 1.2.** Для группы  $G$  следующие утверждения эквивалентны:

- (1) в группе  $G$  каждая СР-подгруппа модулярна или самонормализуема;
- (2) в группе  $G$  каждая примарная подгруппа модулярна или самонормализуема;
- (3) в группе  $G$  каждая подгруппа модулярна или самонормализуема;
- (4) группа  $G$  либо является  $M$ -группой, либо представима в виде  $G = G' \rtimes \langle x \rangle$ ,

где  $\langle x \rangle$  – силовская подгруппа для некоторого  $p \in \pi(G)$  и подгруппа Картера группы  $G$ , и каждая собственная подгруппа группы  $G$ , которая не содержит подгруппу Картера группы  $G$ , перестановочна в  $G$ , в частности,  $G' \rtimes \langle x^p \rangle$  – группа Ивасава.

*Доказательство.*

Пусть в группе  $G$  каждая СР-подгруппа модулярна или самонормализуема и  $A$  – произвольная примарная подгруппа группы  $G$ . Если подгруппа  $A$  содержит некоторую самонормализуемую СР-подгруппу  $X$ , то  $A$  также самонормализуема. Пусть все СР-подгруппы из  $A$  модулярны в  $G$ . Тогда, по лемме 1 (5), подгруппа  $A$  модулярна в  $G$ . Таким образом, в группе  $G$  каждая примарная подгруппа модулярна или самонормализуема, а значит, (1)  $\Rightarrow$  (2). Аналогично можно показать, что (1)  $\Rightarrow$  (3).

Понятно, что если в группе  $G$  каждая примарная подгруппа (каждая подгруппа) субмодулярна или самонормализуема, то и каждая СР-подгруппа субмодулярна или самонормализуема, а значит, (2)  $\Rightarrow$  (1) и (3)  $\Rightarrow$  (1).

Пусть в группе  $G$  каждая СР-подгруппа модулярна или самонормализуема. Если в группе  $G$  все СР-подгруппы модулярны, то  $G$  –  $M$ -группа по лемме 1 (5). Пусть группа  $G$  содержит немодулярную СР-подгруппу  $A = \langle x \rangle$ . Для определенности будем считать, что  $A$  является  $p$ -группой для некоторого  $p \in \pi(G)$ . По условию,  $N_G(A) = A$ , а значит,  $A$  – силовская подгруппа и подгруппа Картера группы  $G$ . Согласно теореме 1, либо  $G \in \mathcal{C}$ , либо  $G = G' \rtimes \langle x \rangle$  и  $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{C}$ .

Если группа  $G \in \mathcal{C}$ , то в силу [9, лемма 3.2] группа  $G$  имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Поэтому  $p = \min \pi(G)$  и в группе  $G$  существует нормальная  $p'$ -холлова подгруппа  $G_{p'}$ , а значит,  $G = G_{p'} \rtimes \langle x \rangle$  и  $G_{p'} \leq G'$ . Так как  $G/G_{p'} \simeq \langle x \rangle \in \mathcal{A}$ , то  $G_{p'} = G'$  и  $G = G' \rtimes \langle x \rangle \in \mathcal{C}$ , в частности,  $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{C}$  в силу [9, предложение 3.3, следствие 3.5]. Пусть  $X$  – произвольная СР-подгруппа группы  $G$ , порядок которой не делится на  $|\langle x \rangle|$ . По условию, подгруппа  $X$  модулярна или самонормализуема в группе  $G$ . Если  $X = N_G(X)$ , то  $X$  – подгруппа Картера группы  $G$  и подгруппы  $X$  и  $\langle x \rangle$  сопряжены – противоречие. Поэтому  $X$  модулярна в  $G$ .

Докажем, что подгруппа  $X$  субнормальна в группе  $G$ .

Предположим обратное. Тогда, в силу леммы 4, подгруппа  $X$  неперестановочна в  $G$  и, по лемме 3,  $G/X_G = X^G/X_G \times B/X_G$ , где  $X^G/X_G$  – холлова неабелева  $P$ -группа. Так как порядок подгруппы  $X$  не делится на  $|\langle x \rangle|$ , то  $G'X$  – собственная подгруппа группы  $G$ . Подгруппа  $\langle x \rangle X_G/X_G$  является подгруппой Картера группы  $G/X_G$ . Поскольку  $(|X^G/X_G|, |B/X_G|) = 1$ , то либо  $\langle x \rangle X_G/X_G \leq X^G/X_G$ , либо  $\langle x \rangle X_G/X_G \leq B/X_G$ . Если  $\langle x \rangle X_G/X_G \leq X^G/X_G$ , то  $G = X^G \leq G'X < G$  – противоречие. Пусть  $\langle x \rangle X_G/X_G \leq B/X_G$ , тогда  $X^G = X_G$  и подгруппа  $X$  нормальна в  $G$  – противоречие. Таким образом, каждая СР-подгруппа группы  $G$ , порядок которой не делится на  $|\langle x \rangle|$ , субнормальна и модулярна в группе  $G$ , а значит, перестановочна (в силу леммы 4). Отсюда, согласно [6, с. 202], каждая подгруппа группы  $G$ , порядок которой не делится на  $|\langle x \rangle|$ , перестановочна в  $G$ , в частности,  $G' \rtimes \langle x^p \rangle$  – группа Ивасава. Поэтому (1)  $\Rightarrow$  (4).

Если группа  $G$  является  $M$ -группой, то каждая ее подгруппа, в частности, каждая СР-подгруппа модулярна. Пусть группа  $G$  представима в виде  $G = G' \rtimes \langle x \rangle$ ,

где  $\langle x \rangle$  – силовская подгруппа для некоторого  $p \in \pi(G)$ , и подгруппа Картера группы  $G$ , и каждая собственная подгруппа группы  $G$ , порядок которой не делится на  $|\langle x \rangle|$ , перестановочна в  $G$ . Выберем произвольную СР-подгруппу  $X$  группы  $G$ . Если  $p \notin \pi(X)$ , то подгруппа  $X$  перестановочна в  $G$ , а значит, модулярна (по лемме 4.)

Пусть  $p \in \pi(X)$ , тогда  $X^g \leq \langle x \rangle$  для некоторого  $g \in G$ . Если  $X^g = \langle x \rangle$ , то подгруппы  $\langle x \rangle$  и  $X$  сопряжены, и  $X$  – подгруппа Картера группы  $G$ , а значит,  $X = N_G(X)$ . Пусть  $X^g < \langle x \rangle$ , тогда подгруппа  $X$  перестановочна в группе  $G$ . Отсюда, по лемме 4, подгруппа  $X$  модулярна в  $G$ . Таким образом, (4)  $\Rightarrow$  (1). Следствие доказано.

Следствие 1.2 дополняет результат, полученный в [14, следствие 3].

**Следствие 1.3.** Пусть в группе  $G$  каждая СР-подгруппа модулярна или самонормализуема,  $K$  – подгруппа Картера группы  $G$  и  $H$  – собственная подгруппа группы  $G$ . Если  $|K|$  делит  $|H|$ , то подгруппа  $H$  абнормальна в группе  $G$ . Если  $|K|$  не делит  $|H|$ , то подгруппа  $H$  перестановочна в группе  $G$ .

### Заключение

В настоящей работе описано строение группы с субмодулярными или самонормализуемыми СР-подгруппами. В такой группе либо все СР-подгруппы субмодулярны, либо она представима в виде полупрямого произведения своего коммутанта и подгруппы Картера, которая является циклической силовской подгруппой.

В качестве следствия установлено, то в группе с модулярными или самонормализуемыми СР-подгруппами каждая подгруппа, порядок которой не делится на порядок подгруппы Картера группы, перестановочна в группе.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Monakhov, V. S. Finite groups with  $\mathbb{P}$ -subnormal subgroups / V. S. Monakhov, V. N. Kniagina // Ricerche di Matematica. – 2013. – Vol. 62. – P. 307–322.
2. Мурашко, В. И. Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами / В. И. Мурашко // Сибирский математический журнал. – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 1353–1367.
3. Монахов, В. С. Конечные группы с абнормальными и  $\mathfrak{U}$ -субнормальными подгруппами / В. С. Монахов // Сибирский математический журнал. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 447–462.
4. Монахов, В. С. О трех формациях над  $\mathfrak{U}$  / В. С. Монахов // Математические заметки. – 2021. – Т. 110, № 3. – С. 358–367.
5. Васильева, Т. И. О конечных группах с  $\mathbb{P}_\pi$ -субнормальными подгруппами / Т. И. Васильева, А. Г. Коранчук // Математические заметки. – 2023. – Т. 114, № 4. – С. 483–496.
6. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin ; New York : Walter De Gruyter, 1994. – 584 p.
7. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin ; New York : De Gruyter, 2010. – 346 p.
8. Zimmermann, I. Submodular subgroups in finite groups / I. Zimmermann // Mathematische Zeitschrift. – 1989. – Vol. 202, nr 4. – P. 545–557.
9. Monakhov, V. S. Finite groups with submodular primary subgroups / V. S. Monakhov, I. L. Sokhor // Archiv der Mathematik. – 2023. – Vol. 121, nr 1. – P. 1–10.
10. Васильев, В. А. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами / В. А. Васильев // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1277–1288.
11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967. – 793 p.
12. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
13. Вдовин, Е. П. Картеровы подгруппы конечных групп / Е. П. Вдовин // Математические труды. – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 20–106.

14. Sokhor, I. L. Finite groups with modular and submodular subgroups / I. L. Sokhor // Сибірские электронные математические известия. – 2024. – Т. 21, № 1. – С. 501–512.

## REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Finite groups with  $\mathbb{P}$ -subnormal subgroups / V. S. Monakhov, V. N. Kniachina // Ricerche di Matematica. – 2013. – Vol. 62. – P. 307–322.
2. Murashko, V. I. Klassy konechnykh grupp s obobshchenno subnormal'nymi tsiklicheskimy primarnymi podgruppami / V. I. Murashko // Sibirskii matematicheskii zhurnal. – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 1353–1367.
3. Monakhov, V. S. Konechnye gruppy s abnormal'nymi i  $\mathcal{U}$ -subnormal'nymi podgruppami / V. S. Monakhov // Sibirskii matematicheskii zhurnal. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 447–462.
4. Monakhov, V. S. O trekh formatsiyakh nad  $\mathcal{U}$  / V. S. Monakhov // Matematicheskie zametki. – 2021. – Т. 110, № 3. – С. 358–367.
5. Vasil'eva, T. I. O konechnykh gruppakh s  $\mathbb{P}_\pi$ -subnormal'nymi podgruppami / T. I. Vasil'eva, A. G. Koranchuk // Matematicheskie zametki. – 2023. – Т. 114, № 4. – С. 483–496.
6. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin ; New York : Walter De Gruyter, 1994. – 584 p.
7. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin ; New York : De Gruyter, 2010. – 346 p.
8. Zimmermann, I. Submodular subgroups in finite groups / I. Zimmermann // Mathematische Zeitschrift. – 1989. – Vol. 202, nr 4. – P. 545–557.
9. Monakhov, V. S. Finite groups with submodular primary subgroups / V. S. Monakhov, I. L. Sokhor // Archiv der Mathematik. – 2023. – Vol. 121, nr 1. – P. 1–10.
10. Vasil'ev, V. A. Konechnye gruppy s submodulyarnymi silovskimi podgruppami / V. A. Vasil'ev // Sibirskii matematicheskii zhurnal. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1277–1288.
11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967. – 793 p.
12. Shemetkov, L. A. Formatsii konechnykh grupp / L. A. Shemetkov. – M. : Nauka, 1978. – 272 s.
13. Vdovin, E. P. Karterovy podgruppy konechnykh grupp / E. P. Vdovin // Matematicheskie trudy. – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 20–106.
14. Sokhor, I. L. Finite groups with modular and submodular subgroups / I. L. Sokhor // Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya. – 2024. – Т. 21, № 1. – С. 501–512.

*Рукапіс пастуніў у рэдакцыю 08.11.2025*

## Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай, рускай ці англійскай мове ў адным экзэмпляры аб'ёмам да 0,5 друкаванага аркуша (да 20 000 знакаў (без уліку метададзеных)), у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (\*.doc, \*.docx ці \*.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармату А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Усе малюнкi і фотаздымкі павінны быць толькі ў чорна-белым выкананні. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 (у рэдакцыі загада ад 13.10.2025 № 206). Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках ([1–4], [1; 3], [1, с. 32], [2, с. 52–54], [3, л. 5], [4, л. 6 об.]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносака.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў (аўтараў не больш за 5) на мове артыкула;
- звесткі пра аўтара/аўтараў (навуковая ступень, званне, пасада, месца працы/вучобы) на мове артыкула;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- звесткі пра аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- e-mail аўтара/аўтараў;
- назва артыкула на мове артыкула;
- анатацыя ў аб'ёме 100–150 слоў і ключавыя словы на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- назва артыкула на англійскай мове;
- анатацыя і ключавыя словы на англійскай мове.

Звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы ўнізе.

Асноўны тэкст структуравецца ў адпаведнасці з патрабаваннямі Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў:

- Уводзіны (пастаноўка мэты і задач даследавання).
- Асноўная частка (матэрыялы і метады даследавання; вынікі і іх абмеркаванне).
- Заклучэнне (фармулююцца асноўныя вынікі даследавання, указваецца іх навізна, магчымасці выкарыстання).
- Спіс выкарыстанай літаратуры; спіс літаратуры павінен уключаць не больш за 20–22 крыніцы і абавязкова ўтрымліваць публікацыі, у тым ліку замежныя, па тэме даследавання за апошнія 10 гадоў.

➤ References – спіс выкарыстанай літаратуры, які прадубліраваны лацінскім алфавітам (колькасць крыніц, прыведзеных у спісе і ў References, павінна супадаць).

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- выпіска з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе (вучыцца) аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў);
- вынікі праверкі тэксту на прадмет арыгінальнасці пры дапамозе інструмента «Антыплагіят».

Усе артыкулы абавязкова праходзяць «сляпое» рэцэнзаванне. Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегія не разглядае і не вяртае. Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Рукапіс артыкула і дакументы дасылаць на адрас: 224016, г. Брэст, бульвар Касманаўтаў, 21, рэдакцыя часопіса «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта», электронны варыянт артыкула накіроўваць на e-mail: vesnik@brsu.by.

Карэктары *А. А. Іванюк, Л. М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *А. В. Кізул*

Падпісана ў друк 29.12.2025. Фармат 60×84/8. Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Рызаграфія.

Ум. друк. арк. 13,49. Ул.-выд. арк. 8,09. Тыраж 50 экз. Заказ № 484.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.