



ВЕСНИК

БРЭСЦКАГА ЎНІВЕРСІТЭТА

Рэдакцыйная калегія

галоўны рэдактар

Ю. П. Голубеў

намеснік галоўнага рэдактара

У. А. Плещохоў

адказны рэдактар

А. А. Трафімук

А. Б. Антаневіч (Беларусь)

А. І. Басік (Беларусь)

А. Я. Будзько (Беларусь)

М. А. Громаў (Расія)

А. М. Ішханян (Арменія)

М. І. Ляўчук (Беларусь)

І. П. Мартынаў (Беларусь)

П. П. Матус (Беларусь)

А. І. Мелькер (Расія)

В. С. Манахаў (Беларусь)

У. А. Плещохоў (Беларусь)

В. М. Радзькоў (Беларусь)

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы на год

Заснавальнік – установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»

№ 2 / 2024

У адпаведнасці з Дадаткам да загада
Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь
ад 06.02.2024 № 30 (са змяненнямі, унесенымі загадам
ад 04.10.2024 № 233) часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта.

Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»

ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў у 2024 г.
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

◇ ◇ ◇

У адпаведнасці з дагаворам паміж установай адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»
і ТАА «Навуковая электронная бібліятэка» (ліцэнзійны дагавор
№ 457-11/2020 ад 03.11.2020) часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта.

Серыя 4. Фізіка. Матэматыка »

размяшчаецца на платформе eLIBRARY.RU
і ўключаны ў Расійскі індэкс навуковага цытавання (РІНЦ)

Пасведчанне аб рэгістрацыі
ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:
224016, г. Брэст,
бульвар Касманаўтаў, 21
тэл.: +375-(162)-21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага
ўніверсітэта» выдаецца
са снежня 1997 г.

ЗМЕСТ

НАШЫ ЮБІЛЯРЫ

80 лет знаний и вдохновения!

(К 80-летию Владимира Анестиевича Плетюхова).....5

ФІЗІКА

Кисель В. В., Бурый А. В., Саченок П. О., Овсюк Е. М.

Частица со спином $1/2$ с аномальным магнитным моментом и поляризуемостью 7

Ворсин Н. Н., Гладышук А. А., Кушнер Т. Л., Луценко Е. В., Яблонский Г. П.

Моделирование AlGaIn гетеропереходного полевого транзистора.....28

Кузьмич А. М., Плетюхов В. А.

Релятивистские волновые уравнения
с расширенным набором представлений группы Лоренца41

Ивашкевич А. В., Редьков В. М.

Частица Дирака – Кэлера во внешнем магнитном поле,
цилиндрическая тетрада и метод Федорова – Гронского62

Макоед И. И., Мельникова И. Н., Римский Г. С.

Простая модель поляризуемости катионзамещенного феррита висмута84

МАТЭМАТЫКА

Матысик О. В.

Априорный выбор параметра регуляризации в итерационной процедуре
явного типа решения линейных некорректных уравнений90

Басик А. И., Грицук Е. В., Болтрушко О. В.

Классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта
для одного класса эллиптических систем в трехмерном пространстве100

Жук А. И., Зашук Е. Н., Каримова Т. И.

Системы дифференциальных уравнений в пространствах Лебега.....112

Зубей Е. В.

О композиционных факторах конечной группы
с OS -проперестановочной силовской подгруппой.....122

Павлушко П. А., Трофимук А. А.

О композиционных факторах конечной группы,
у которой некоторые подгруппы являются tcc -подгруппами.....133



VESNIK

OF BREST UNIVERSITY

Editorial Board

editor-in-chief
Yu. P. Golubeu

deputy editor-in-chief
U. A. Plietsiukhou

managing editor
A. A. Trafimuk

A. B. Antanievich (Belarus)
A. I. Basik (Belarus)
A. Ya. Budzko (Belarus)
M. A. Gromau (Russia)
A. M. Ishkhanian (Armenia)
A. U. Dziamidchyk (Belarus)
M. I. Liauchuk (Belarus)
I. P. Martynau (Belarus)
P. P. Matus (Belarus)
A. I. Melkier (Russia)
V. S. Manakhau (Belarus)
U. A. Plietsiukhou (Belarus)
V. M. Radzkou (Belarus)

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
nr 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224016, Brest,
21, Kosmonavtov Boulevard
tel.: +375-(162)-21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.by

Series 4

PHYSICS MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued twice a year

Founder – Educational Establishment
«Brest State A. S. Pushkin University»

№ 2 / 2024

According to the Supplement to the order of Supreme Certification
Commission of the Republic of Belarus from February 06, 2024 nr 30
(with the amendments made by the order of Supreme Certification
Commission from October 04, 2024 nr 223)
the journal «Vesnik of Brest University.
Series 4. Physics. Mathematics» has been included
to the List of scientific editions of the Republic of Belarus
for publication of the results of scientific research in 2024
in physics-mathematical sciences (Physics)

◇ ◇ ◇

According to the agreement
between Educational Establishment
«Brest State A. S. Pushkin University» and Pvt Ltd «Scientific Electronic
Library» (licence contract № 457-11/2020 from 03.11.2020)
the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics»
is placed on the platform eLIBRARY.RU
and included in the Russian Science Citation Index (RSCI)

CONTENTS

OUR ANNIVERSARIES

80 Years of Knowledge and Inspiration!

(To the 80th Anniversary of Vladimir Pletyukhov)5

PHYSICS

Vasily Kisel, Anton Bury, Polina Sachenok, Elena Ovsiyuk.

Spin 1/2 Particle WITH Anomalous Magnetic Moment and Polarizability7

Nikolai Vorsin, Anatolii Gladyschuk, Tatsiana Kushner,

Evgenii Lutsenko, Gennadii Yablonskii.

Modeling AlGa_N Heterojunction Field-Effect Transistor 28

Anastasia Kuzmich, Vladimir Pletyukhov.

Relativistic Wave Equations with Extended Set of the Lorentz Group Presentations41

Alina Ivashkevich, Viktor Red'kov.

Dirac – Kähler Particle in the External Magnetic Field,

Cylindrical Tetrad and Fedorov – Gronskey Method 62

Igor Makoed, Inna Melnikova, Gregory Rymski.

A Simple Polarizability Model of Cation Substituted Bismuth Ferrite..... 84

MATHEMATICS

Oleg Matysik.

A Priori Choice of the Regularization Parameter

in an Iterative Procedure of an Explicit Type Solution of Linear Ill-Posed Equations90

Aliaxandr Basik, Evgenij Hrytsuk, Olga Boltrushko.

Classification of Regularisable Riemann – Hilbert Boundary Value Problems

for One Class Elliptic Systems in the Three-Dimensional Space.....100

Anastasia Zhuk, Helena Zashchuk, Tatsiana Karymava.

Systems of Differential Equations in the Lebesgue Spaces112

Ekaterina Zubei.

On Composition Factors of a Finite Group with OS -Propermutable Sylow Subgroup122

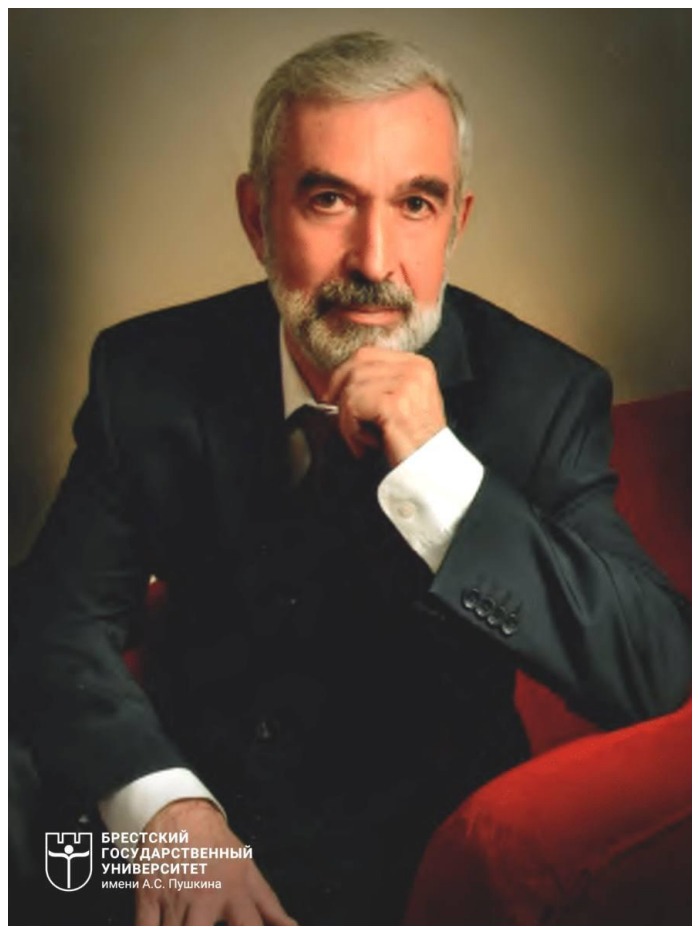
Polina Pavlushko, Alexander Trofimuk.

On Composition Factors of a Finite Group in Which Some Subgroups are tcc -Subgroups133

НАШЫ ЮБІЛЯРЫ

80 ЛЕТ ЗНАНИЙ И ВДОХНОВЕНИЯ!

к 80-летию Владимира Анестиевича Плетюхова



17 декабря 2024 г. исполнилось 80 лет доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Анестиевичу Плетюхову, специалисту в области классической и квантовой теории поля, физики элементарных частиц, ученому, широко известному в Беларуси и за ее пределами.

Родился будущий профессор в 1944 г. в д. Ендовище Воронежской области в семье фронтовиков. Отец был педагогом, но в 1942 г. его из Грузии призвали на фронт. Мать была мобилизована в инженерные части из России. Так во время войны родители и познакомились. В 1946 г. в Бресте расформировали часть, в которой служил отец Владимира Анестиевича, и семья осталась здесь жить. В 1949 г. его отец трудоустроился в Брестский педагогический институт, в котором проработал до 1972 г.

Владимир Анестиевич учился в средней школе № 9 г. Бреста, где в старших классах, как и все, увлекался физикой и математикой. Выпускники 1961 г. мечтали быть летчиками-космонавтами, летчиками-испытателями или физиками-теоретиками, физиками-ядерщиками. Именно одну из этих престижных профессий и выбрал будущий ученый Владимир Плетюхов. Окончив школу с золотой медалью, Владимир Анестиевич поступил на физический факультет Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина. В это время он и начал свой путь в науку. В 1966 г., окончив БГУ по специальности «Теоретическая физика», Владимир Анестиевич поступает в аспирантуру по этой же специальности. Наука – долгий и кропотливый труд, итогом

которого в 1975 г. стала защита кандидатской, а после и докторской диссертации на тему «Релятивистские волновые уравнения с кратными представлениями и внутренние степени свободы частиц».

После окончания аспирантуры в 1970 г. начинается трудовой путь Владимира Анестиевича в Брестском государственном пединституте имени А. С. Пушкина. Приказом ректора № 347-к от 3 августа 1970 г. В. А. Плетюхов был принят на должность старшего преподавателя кафедры физики. В эти годы Владимир Анестиевич, как молодой преподаватель, был куратором студенческих групп, ездил со студентами на картошку, ходил в турпоходы, участвовал в праздничных демонстрациях. «На Владимира Анестиевича мы всегда смотрели как на светило науки. Он являлся образцом для нас. Мы все его любили и до сих пор любим», – делится воспоминаниями выпускник 1977 г. Михаил Михайлович Куиш. С 1976 по 1981 г. Владимир Анестиевич работал заведующим подготовительного отделения Брестского государственного педагогического института имени А. С. Пушкина.

В 1996 г. Владимир Анестиевич был избран депутатом Верховного Совета Республики Беларусь и стал председателем Постоянной комиссии Верховного Совета по образованию, науке, культуре (по 1999 г.). За эти годы Владимир Анестиевич приложил немало усилий для налаживания взаимовыгодных научных, культурных и образовательных связей с научными и учебными учреждениями других стран.

В 1999 г. Владимир Анестиевич стал ректором нашего университета.

В. А. Плетюхов, оставив в 2002 г. пост ректора, продолжил активную и плодотворную работу профессора на кафедре общей и теоретической физики. Он принимал участие в выполнении заданий Государственной программы фундаментальных исследований «Поля и частицы», Государственной программы научных исследований «Конвергенция», Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований по теме «Описание симметрий и эффектов взаимодействия спиновых частиц в многокомпонентном подходе». Владимир Анестиевич является автором и соавтором более 200 научных и методических публикаций, в том числе научных статей в журналах «Ядерная физика», «Теоретическая и математическая физика», «Известия вузов. Физика», «Acta Physica Polonica», «Весці НАН Беларусі», «Доклады НАН Беларусі» и др. Он награжден знаком «Выдатнік адукацыі» (1995, 1999 гг.), нагрудным почетным знаком «За вклад в развитие Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина» (2010 г.), грамотой Министерства народного образования Белорусской ССР (1990 г.), почетными грамотами Министерства образования Республики Беларусь (1983, 2000, 2002, 2013, 2024 гг.), Почетной грамотой Межпарламентской Ассамблеи СНГ (2001 г.), Почетной грамотой Национального собрания Республики Беларусь (2005 г.), грамотой Брестского областного исполнительного комитета (2024 г.). Владимир Анестиевич – действительный член Международной академии наук высшей школы (г. Москва).

На всех этапах своей работы Владимира Анестиевича отличала чуткость, забота и внимание к людям. «Добрый и отзывчивый преподаватель», «Самый любимый наш куратор», «Замечательный человек и преподаватель», «Я очень рад, что именно этот человек стал куратором нашей группы. Он стал для нас защитой и опорой», – именно так отзываются о юбиларе его нынешние студенты.

Сейчас Владимир Анестиевич Плетюхов – это не только известный ученый и прекрасный преподаватель, но и замечательный муж, отец и дедушка.

Желаем Вам, Владимир Анестиевич, крепкого здоровья, благополучия и мира! Пусть радость, оптимизм и удача никогда не покидают Вас!

Сотрудники кафедры общей и теоретической физики

УДК 539.12

Vasily Kisel¹, Anton Bury², Polina Sachenok³, Elena Ovsiyuk⁴

¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Natural Sciences
of Belarusian State Agrarian Technical University

²3-d Postgraduate Student of Fundamental Interaction and Astrophysics Center
of B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus

³3-d Student of the Physics and Engineering Faculty
of Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin

⁴Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Leading Researcher of F. Skorina Gomel State University

Василий Васильевич Кисель¹, Антон Васильевич Бурый²,

Полина Олеговна Саченок³, Елена Михайловна Овсийук⁴

¹канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. естественнонаучных дисциплин
Белорусского государственного аграрного технического университета

²аспирант 3-го года обучения Центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики
Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

³студент 3-го курса физико-инженерного факультета
Мозырского государственного педагогического университета имени И. П. Шамякина

⁴д-р физ.-мат. наук, доц., ведущий научный сотрудник
Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины

e-mail: ¹vasiliy_bspu@mail.ru; ²anton.buryy.97@mail.ru;

³polinasachenok@gmail.com; ⁴e.ovsiyuk@mail.ru

SPIN 1/2 PARTICLE WITH ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT AND POLARIZABILITY

Within the general method by Gel'fand – Yaglom, starting with the extended set of representations of the Lorentz group, we construct a relativistic generalized equation for a spin 1/2 particle with two additional characteristics. We take into account the presence of external electromagnetic fields. After eliminating the accessory variables of the complete wave function, we derive the generalized Dirac-like equation, the last includes two additional interaction terms which are interpreted as related to anomalous magnetic moment, and a second additional characteristics looks as related to polarizability of the particle.

Key words: spin 1/2 particle, external electromagnetic fields, anomalous magnetic moment, polarizability.

Частица со спином 1/2 с аномальным магнитным моментом и поляризуемостью

В рамках общего метода Гельфанда – Яглома, исходя из расширенного набора представлений группы Лоренца, строится релятивистское обобщенное уравнение для частицы со спином 1/2 с двумя дополнительными характеристиками. При этом учитывается наличие внешних электромагнитных полей. После исключения дополнительных переменных полной волновой функции получено обобщенное уравнение типа Дирака, включающее два дополнительных члена взаимодействия, один из которых связан с аномальным магнитным моментом, а второй – с поляризуемостью частицы.

Ключевые слова: частица со спином 1/2, внешние электромагнитные поля, аномальный магнитный момент, поляризуемость.

Introduction

Within the general method by Gel'fand – Yaglom [1–3], starting with the extended set of representations of the Lorentz group, we construct a relativistic generalized equation for a spin 1/2 particle with two additional characteristics. In [4], it was studied the same set of irreducible representations of the Lorentz group, but author restricted themselves only to a free particle theory. In the present paper, we have taken into account the external electromagnetic fields. After eliminating the accessory variables of the complete wave function, we derive the

generalized Dirac-like equation, the last includes two additional interaction terms which are interpreted as related to anomalous magnetic moment [5–8], and a second additional characteristics which seems to be related to polarizability of the particle.

1. Gel'fand – Yaglom formalism

We will construct a P -invariant relativistic first order equation for a particle with the M and the spin $S = 1/2$

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + M)\Psi = 0 \quad (1)$$

by using the set of representations of the Lorentz group with the following linking scheme

$$\begin{array}{ccc} 3(1/2, 0) & - & 3(0, 1/2) \\ | & & | \\ (1, 1/2) & - & (1/2, 1) \end{array}.$$

The corresponding system of spinor equations has the form

$$\partial^{\dot{a}b}(\lambda_1 \psi_b + \lambda_2 \varphi_b + \lambda_3 \Phi_b) + \lambda_4 \partial_{\dot{c}}^b f_b^{(\dot{a}\dot{c})} + M \psi^{\dot{a}} = 0, \quad (2)$$

$$\partial_{\dot{a}b}(\lambda_1 \psi^{\dot{b}} + \lambda_2 \varphi^{\dot{b}} + \lambda_3 \Phi^{\dot{b}}) + \lambda_4 \partial_{\dot{c}}^b f_{(ac)}^{\dot{b}} + M \psi_a = 0, \quad (3)$$

$$\partial^{\dot{a}b}(\lambda_5 \psi_b + \lambda_6 \varphi_b + \lambda_7 \Phi_b) + \lambda_8 \partial_{\dot{c}}^b f_b^{(\dot{a}\dot{c})} + M \varphi^{\dot{a}} = 0, \quad (4)$$

$$\partial_{\dot{a}b}(\lambda_5 \psi^{\dot{b}} + \lambda_6 \varphi^{\dot{b}} + \lambda_7 \Phi^{\dot{b}}) + \lambda_8 \partial_{\dot{c}}^b f_{(ac)}^{\dot{b}} + M \varphi_a = 0, \quad (5)$$

$$\partial^{\dot{a}b}(\lambda_9 \psi_b + \lambda_{10} \varphi_b + \lambda_{11} \Phi_b) + \lambda_{12} \partial_{\dot{c}}^b f_b^{(\dot{a}\dot{c})} + M \Phi^{\dot{a}} = 0, \quad (6)$$

$$\partial_{\dot{a}b}(\lambda_9 \psi^{\dot{b}} + \lambda_{10} \varphi^{\dot{b}} + \lambda_{11} \Phi^{\dot{b}}) + \lambda_{12} \partial_{\dot{c}}^b f_{(ac)}^{\dot{b}} + M \Phi_a = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\partial_{\dot{c}}^{\dot{a}} (\lambda_{13} \psi^{\dot{b}} + \lambda_{14} \varphi^{\dot{b}} + \lambda_{15} \Phi^{\dot{b}}) + \partial_{\dot{c}}^{\dot{b}} (\lambda_{13} \psi^{\dot{a}} + \lambda_{14} \varphi^{\dot{a}} + \lambda_{15} \Phi^{\dot{a}})] + \\ & + \frac{\lambda_{16}}{2} [\partial^{k\dot{a}} f_{(kc)}^{\dot{b}} + \partial^{k\dot{b}} f_{(kc)}^{\dot{a}}] + M f_c^{(\dot{a}\dot{b})} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\partial_a^{\dot{c}} (\lambda_{13} \psi_b + \lambda_{14} \varphi_b + \lambda_{15} \Phi_b) + \partial_b^{\dot{c}} (\lambda_{13} \psi_a + \lambda_{14} \varphi_a + \lambda_{15} \Phi_a)] + \\ & + \frac{\lambda_{16}}{2} [\partial_{\dot{a}b} f_b^{(\dot{a}\dot{c})} + \partial_{\dot{a}b} f_a^{(\dot{a}\dot{c})}] + M f_{(ab)}^{\dot{c}} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

The numerical parameter λ_i will be restricted later on. Below we will use the notations (we will apply the imaginary time coordinate $x_4 = ict$)

$$\partial_{\dot{a}b} = \frac{1}{i} \partial_\mu (\sigma^\mu)_{\dot{a}b}, \quad (\sigma^1)_{\dot{a}b} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (\sigma^2)_{\dot{a}b} = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad (\sigma^3)_{\dot{a}b} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad (\sigma^4)_{\dot{a}b} = \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{vmatrix}$$

The operation of P -reflection is determined by the relations

$$\psi^{\dot{a}} \leftrightarrow \psi_a, \quad \varphi^{\dot{a}} \leftrightarrow \varphi_a, \quad \Phi^{\dot{a}} \leftrightarrow \Phi_a, \quad f_c^{(\dot{a}\dot{b})} \leftrightarrow f_{ab}^{\dot{c}}.$$

$$\psi^{(\text{spinor})} = (\psi^1, \psi^2, \psi_1, \psi_2; \varphi^1, \varphi^2, \varphi_1, \varphi_2; \Phi^1, \Phi^2, \Phi_1, \Phi_2;$$

$$f_{(11)}^1, f_{(12)}^1, f_{(22)}^1, f_{(11)}^2, f_{(12)}^2, f_{(22)}^2, f_1^{(11)}, f_1^{(12)}, f_1^{(22)}, f_2^{(11)}, f_2^{(12)}, f_2^{(22)})_T;$$

the symbol T stands for the matrix transposition. Correspondingly, the matrix Γ_4^{spinor} has the form

[illegible]

$$\begin{array}{cccccccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & -\lambda_4 & 0 & \\
0 & -\lambda_4 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 & -\lambda_8 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 & -\lambda_8 & 0 & \\
0 & -\lambda_8 & 0 & \lambda_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & -\lambda_8 & 0 & \lambda_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{12} & 0 & -\lambda_{12} & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{12} & 0 & -\lambda_{12} & 0 & \\
0 & -\lambda_{12} & 0 & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & -\lambda_{12} & 0 & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{16}}{2} & 0 & \frac{\lambda_{16}}{2} & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{16} & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{16}}{2} & 0 & \frac{\lambda_{16}}{2} & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{16} & \\
\lambda_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & \frac{\lambda_{16}}{2} & 0 & \frac{\lambda_{16}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & \lambda_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & \frac{\lambda_{16}}{2} & 0 & \frac{\lambda_{16}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array} \quad (10)$$

Let us transform the matrix Γ_4 to the modified Gelfand – Yaglom basis (10) [3]; the last is more convenient for obtaining restrictions on parameters λ_i .

To this end, first we find the matrix Γ^4 in canonic basis.

For the use set of representations of the Lorenz group $SO(3,1)$, the wave function in canonical basis has the structure

$$\begin{aligned}
\psi^{canon} = & (\psi_{(1/2,0)}^{(1/2,0)}, \psi_{(-1/2,0)}^{(1/2,0)}, \psi_{(0,1/2)}^{(0,1/2)}, \psi_{(0,-1/2)}^{(0,1/2)}; \varphi_{(1/2,0)}^{(1/2,0)}, \varphi_{(-1/2,0)}^{(1/2,0)}, \varphi_{(0,1/2)}^{(0,1/2)}, \varphi_{(0,-1/2)}^{(0,1/2)}; \\
& \Phi_{(1/2,0)}^{(1/2,0)}, \Phi_{(-1/2,0)}^{(1/2,0)}, \Phi_{(0,1/2)}^{(0,1/2)}, \Phi_{(0,-1/2)}^{(0,1/2)}; f_{(1/2,1)}^{(1/2,1)}, f_{(-1/2,1)}^{(1/2,1)}, f_{(1/2,0)}^{(1/2,1)}, f_{(-1/2,0)}^{(1/2,1)}, f_{(1/2,-1)}^{(1/2,1)}, f_{(-1/2,-1)}^{(1/2,1)}; \\
& f_{(1,1/2)}^{(1,1/2)}, f_{(0,1/2)}^{(1,1/2)}, f_{(-1,1/2)}^{(1,1/2)}, f_{(1,-1/2)}^{(1,1/2)}, f_{(0,-1/2)}^{(1,1/2)}, f_{(-1,-1/2)}^{(1,1/2)})_T.
\end{aligned}$$

Further we get

$$\Gamma_4^{\text{canon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 \\ \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_9 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{10} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_9 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{10} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} \\ \lambda_9 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{10} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_9 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{10} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{13} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{14} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{15} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_{13}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{14}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{15}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda_{13}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda_{14}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda_{15}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{14} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_{13}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda_{14}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda_{15}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{16}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_{16}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{16}}{2} & \frac{\lambda_{16}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\lambda_4}{\sqrt{2}}$	0	$-\lambda_4$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	λ_4	0	$-\frac{\lambda_4}{\sqrt{2}}$	0
0	λ_4	$-\frac{\lambda_4}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{\lambda_4}{\sqrt{2}}$	$-\lambda_4$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\lambda_8}{\sqrt{2}}$	0	$-\lambda_8$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	λ_8	0	$-\frac{\lambda_8}{\sqrt{2}}$	0
0	λ_8	$-\frac{\lambda_8}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$-\frac{\lambda_8}{\sqrt{2}}$	$-\lambda_8$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\lambda_{12}}{\sqrt{2}}$	0	$-\lambda_{12}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	λ_{12}	0	$-\frac{\lambda_{12}}{\sqrt{2}}$	0
0	λ_{12}	$-\frac{\lambda_{12}}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{\lambda_{12}}{\sqrt{2}}$	$-\lambda_{12}$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	λ_{16}	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\lambda_{16}}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\lambda_{16}}{2}$	0	$\frac{\lambda_{16}}{\sqrt{2}}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\lambda_{16}}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{\lambda_{16}}{2}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$\lambda_{16} / 2$	0	$\lambda_{16} / \sqrt{2}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	λ_{16}
λ_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$\frac{\lambda_{16}}{\sqrt{2}}$	$\frac{\lambda_{16}}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{\lambda_{16}}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$\frac{\lambda_{16}}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{\lambda_{16}}{2}$	$\frac{\lambda_{16}}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	λ_{16}	0	0	0	0	0	0

Let us find the matrix Γ_4 in modified Gelfand – Yaglom basis:

$$\psi^{G-Y} = A\psi^{canon};$$

$$\begin{aligned} \psi^{G-Y} = & (\psi_{(1/2,1/2)}^{(1/2,0)}, \psi_{(1/2,-1/2)}^{(1/2,0)}, \psi_{(1/2,1/2)}^{(0,1/2)}, \psi_{(1/2,-1/2)}^{(0,1/2)}; \varphi_{(1/2,1/2)}^{(1/2,0)}, \varphi_{(1/2,-1/2)}^{(1/2,0)}, \varphi_{(1/2,1/2)}^{(0,1/2)}, \varphi_{(1/2,-1/2)}^{(0,1/2)}; \\ & \Phi_{(1/2,1/2)}^{(1/2,0)}, \Phi_{(1/2,-1/2)}^{(1/2,0)}, \Phi_{(1/2,1/2)}^{(0,1/2)}, \Phi_{(1/2,-1/2)}^{(0,1/2)}; f_{(1/2,1/2)}^{(1/2,1)}, f_{(1/2,-1/2)}^{(1/2,1)}, f_{(1/2,1/2)}^{(1,1/2)}, f_{(1/2,-1/2)}^{(1,1/2)}; f_{(3/2,3/2)}^{(1/2,1)}, f_{(3/2,-3/2)}^{(1/2,1)}, \\ & f_{(3/2,3/2)}^{(1,1/2)}, f_{(3/2,-3/2)}^{(1,1/2)}; f_{(3/2,1/2)}^{(1/2,1)}, f_{(3/2,-1/2)}^{(1/2,1)}, f_{(3/2,1/2)}^{(1,1/2)}, f_{(3/2,-1/2)}^{(1,1/2)})_T; \\ & \Gamma_4^{G-Y} = A\Gamma_4^{canon}A^{-1}; \end{aligned}$$

the structure of the matrix A is governed by the formula

$$\psi_{s,m}^{(l,l')} = \sum_{l_3, l_3'} C_{l_3, l_3'}^{sm} \psi_{(l_3, l_3')}^{(l,l')}, \quad m = l_3 + l_3',$$

where $C_{l_3, l_3'}^{sm}$ stand for Clebsch – Gordan coefficients; the summing is done over the parameters l_3, l_3' , related as $l_3 + l_3' = m$; in this way, we get

$$B = \begin{pmatrix} I_4 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & I_4 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & I_4 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & -\frac{1}{\sqrt{3}} & . & \sqrt{\frac{2}{3}} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & -\sqrt{\frac{2}{3}} & . & \frac{1}{\sqrt{3}} & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & \sqrt{\frac{2}{3}} & . & \frac{1}{\sqrt{3}} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \frac{1}{\sqrt{3}} & . & \sqrt{\frac{2}{3}} & . & . & . \end{pmatrix},$$

and

$$A^{-1} = A^+ = \begin{vmatrix} I_4 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & I_4 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & I_4 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & -\sqrt{\frac{2}{3}} & . & . & . & . & . & . & \frac{1}{\sqrt{3}} & . & . & . \\ . & . & . & \frac{1}{\sqrt{3}} & . & . & . & . & . & . & \sqrt{\frac{2}{3}} & . & . & . \\ . & . & . & . & -\frac{1}{\sqrt{3}} & . & . & . & . & . & . & \sqrt{\frac{2}{3}} & . & . \\ . & . & . & . & \sqrt{\frac{2}{3}} & . & . & . & . & . & . & \frac{1}{\sqrt{3}} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & -\frac{1}{\sqrt{3}} & . & . & . & . & . & . & \sqrt{\frac{2}{3}} & . \\ . & . & . & . & . & . & -\sqrt{\frac{2}{3}} & . & . & . & . & . & . & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ . & . & . & . & . & \sqrt{\frac{2}{3}} & . & . & . & . & . & \frac{1}{\sqrt{3}} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & \frac{1}{\sqrt{3}} & . & . & . & . & . & . & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

$$\Gamma_4^{G-Y} =$$
[illegible]

0	0	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_4$	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_8$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_8$	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_8$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_8$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$\frac{1}{2}\lambda_{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{1}{2}\lambda_{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}\lambda_{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$\frac{1}{2}\lambda_{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	λ_{16}	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	λ_{16}	0	0	0	0
0	0	0	0	λ_{16}	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	λ_{16}	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	λ_{16}	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	λ_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	λ_{16}	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	λ_{16}	0	0

This expression may be presented in a short form (which is the result of the use of the modified Gelfand – Yaglom basis):

$$\Gamma_4^{G-Y} = \begin{vmatrix} \beta^{(1/2)} \otimes \gamma_4 & 0 \\ 0 & \beta^{(3/2)} \otimes I_2 \otimes \gamma_4 \end{vmatrix},$$

where

$$\beta^{(1/2)} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_4 \\ \lambda_5 & \lambda_6 & \lambda_7 & -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_8 \\ \lambda_9 & \lambda_{10} & \lambda_{11} & -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{12} \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{13} & \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{14} & \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{15} & \frac{1}{2}\lambda_{16} \end{vmatrix}, \quad \beta^{(3/2)} = \lambda_{16}, \quad \gamma_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

We can readily verify that the P - invariant conditions are satisfied

$$\Gamma_4^{G-Y} P = P \Gamma_4^{G-Y}, P = \begin{vmatrix} P^{(1/2)} \otimes \gamma_4 & 0 \\ 0 & P^{(3/2)} \otimes I_2 \otimes \gamma_4 \end{vmatrix}, P^{(1/2)} = I_4, \quad P^{(3/2)} = -1.$$

2. The Lagrangian form of the theory

In modified Gelfand – Yaglom basis the matrix of the bilinear form has the structure

$$\eta = \begin{vmatrix} \eta^{(1/2)} \otimes \gamma_4 & 0 \\ 0 & \eta^{(3/2)} \otimes I_2 \otimes \gamma_4 \end{vmatrix}, \quad \eta^{(1/2)} = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{vmatrix}, \quad \eta^{(3/2)} = -k_4, k_i = \pm 1.$$

From the constraint $(\eta \Gamma_4)^+ = \eta \Gamma_4$ it follows

$$\begin{aligned} \lambda_1^* &= \lambda_1, \quad \lambda_6^* = \lambda_6, \quad \lambda_{11}^* = \lambda_{11}, \quad \lambda_{16}^* = \lambda_{16}, \\ \lambda_5^* &= k_1 k_2 \lambda_2, \quad \lambda_9^* = k_1 k_3 \lambda_3, \quad \lambda_{10}^* = k_2 k_3 \lambda_7, \\ \lambda_{13}^* &= -k_1 k_4 \lambda_4, \quad \lambda_{14}^* = -k_2 k_4 \lambda_8, \quad \lambda_{15}^* = -k_3 k_4 \lambda_{12}. \end{aligned}$$

For instant, if $k_1 = +1, k_2 = -1, k_3 = -1, k_4 = -1$, then we have

$$\lambda_5^* = -\lambda_2, \quad \lambda_9^* = -\lambda_3, \quad \lambda_{10}^* = \lambda_7, \quad \lambda_{13}^* = \lambda_4, \quad \lambda_{14}^* = -\lambda_8, \quad \lambda_{15}^* = -\lambda_{12};$$

just this variant is considered below.

3. Restrictions on the parameters λ_i

Let us find restrictions on the parameters λ_i , followed from the requirement to have the theory for a particle with single mass state M and single spin $S = 1/2$ state; the last means that the state with spin $S = 3/2$ is absent

$$\lambda_{16} = 0.$$

Thus, the structure of spin blocks is

$$\beta^{(1/2)} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_4 \\ \lambda_5 & \lambda_6 & \lambda_7 & -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_8 \\ \lambda_9 & \lambda_{10} & \lambda_{11} & -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{12} \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{13} & \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{14} & \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_{15} & 0 \end{vmatrix}, \quad \beta^{(3/2)} = 0. \quad (11)$$

Besides, because the matrix $\beta^{(1/2)}$ should have only one proper value (+1), and all remaining ones should be equal to zero, We have additional constraints

$$\lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_{11} = 1, \quad (12)$$

$$\lambda_2\lambda_5 + \lambda_3\lambda_9 + \lambda_7\lambda_{10} - \lambda_1\lambda_6 - \lambda_1\lambda_{11} - \lambda_6\lambda_{11} - \frac{3}{2}(\lambda_4\lambda_{13} + \lambda_8\lambda_{14} + \lambda_{12}\lambda_{15}) = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &(\lambda_1\lambda_6 + \lambda_1\lambda_{11} + \lambda_6\lambda_{11}) - (\lambda_1\lambda_6\lambda_{11} + \lambda_1\lambda_2\lambda_5 + \lambda_1\lambda_3\lambda_9 + \lambda_2\lambda_5\lambda_6 + \\ &+ \lambda_2\lambda_7\lambda_9 + \lambda_3\lambda_5\lambda_{10} + \lambda_3\lambda_9\lambda_{11} + \lambda_6\lambda_7\lambda_{10} + \lambda_7\lambda_{10}\lambda_{11}) + \\ &+ \frac{3}{2}(\lambda_1\lambda_4\lambda_{13} + \lambda_2\lambda_8\lambda_{13} + \lambda_3\lambda_{12}\lambda_{13} + \lambda_4\lambda_5\lambda_{14} + \lambda_4\lambda_9\lambda_{15} + \\ &+ \lambda_6\lambda_8\lambda_{14} + \lambda_7\lambda_{12}\lambda_{14} + \lambda_8\lambda_{10}\lambda_{15} + \lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{15}) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &\lambda_{13}(\lambda_2\lambda_7\lambda_{12} + \lambda_4\lambda_6\lambda_{11} + \lambda_3\lambda_8\lambda_{10} - \lambda_4\lambda_7\lambda_{10} - \lambda_3\lambda_6\lambda_{12} - \lambda_2\lambda_8\lambda_{11}) + \\ &+ \lambda_{14}(\lambda_4\lambda_7\lambda_9 + \lambda_3\lambda_5\lambda_{12} + \lambda_1\lambda_8\lambda_{11} - \lambda_1\lambda_7\lambda_{12} - \lambda_4\lambda_5\lambda_{11} - \lambda_3\lambda_8\lambda_9) + \\ &+ \lambda_{15}(\lambda_1\lambda_6\lambda_{12} + \lambda_4\lambda_5\lambda_{10} + \lambda_2\lambda_8\lambda_9 - \lambda_4\lambda_6\lambda_9 - \lambda_2\lambda_5\lambda_{12} - \lambda_1\lambda_8\lambda_{10}) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

The last are results of two equations

$$Sp(\beta^{(1/2)})^n = 1, \quad \det \beta^{(1/2)} = 0.$$

The relations (12) – (15) looks cumbersome. They may be simplify, if we take into account the possibility to break some links between repeated representations of the Lorentz group. At this, the physical content of the results remains the same. Such a break is reached by imposing the following conditions

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_7 = \lambda_9 = \lambda_{10} = 0. \quad (16)$$

Correspondingly, we obtain

$$\lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_{11} = 1, \quad (17)$$

$$\lambda_1\lambda_6 + \lambda_1\lambda_{11} + \lambda_6\lambda_{11} + \frac{3}{2}(\lambda_4\lambda_{13} + \lambda_8\lambda_{14} + \lambda_{12}\lambda_{15}) = 0, \quad (18)$$

$$(\lambda_1\lambda_6 + \lambda_1\lambda_{11} + \lambda_6\lambda_{11}) - \lambda_1\lambda_6\lambda_{11} + \frac{3}{2}(\lambda_1\lambda_4\lambda_{13} + \lambda_6\lambda_8\lambda_{14} + \lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{15}) = 0, \quad (19)$$

$$\lambda_4\lambda_6\lambda_{11}\lambda_{13} + \lambda_1\lambda_8\lambda_{11}\lambda_{14} + \lambda_1\lambda_6\lambda_{12}\lambda_{15} = 0. \quad (20)$$

Taking in mind restrictions (12) – (15) or (16) – (20), we get the presentation for minimal polynomial of $\beta^{(1/2)}$ (11)

$$(\beta^{1/2})^3[\beta^{(1/2)} - 1] = 0;$$

the minimal polynomial for the matrix Γ_4 is $\Gamma_4^3(\Gamma_4^2 - 1) = 0$.

4. Spin-tensor form of equations

For the following, it is convenient to transform equations to spin-tensor form. At this, we will take into account the known relationships

$$f_m^{(k\dot{n})} = \delta_{(r\dot{s})}^{(k\dot{n})} (\sigma^\mu)^r_{\dot{s}} f_\mu^{\dot{s}}, \quad f_{(kn)}^{\dot{m}} = \delta_{(kn)}^{(rs)} (\sigma^\mu)^r_{\dot{n}} f_{s\mu}^{\dot{m}}, \quad (21)$$

where $\delta_{(r\dot{s})}^{(k\dot{n})}, \delta_{(kn)}^{(rs)}$ are the generalized Kronecker spinorial symbols

$$\delta_{(r\dot{s})}^{(k\dot{n})} = \frac{1}{2}(\delta_r^k \delta_{\dot{s}}^{\dot{n}} + \delta_s^k \delta_{\dot{r}}^{\dot{n}}), \quad \delta_{(kn)}^{(rs)} = \frac{1}{2}(\delta_k^r \delta_n^s + \delta_n^r \delta_k^s).$$

Two first spinor equations may be presented as follows

$$\lambda_1 \partial^{ab} \psi_b + \frac{\lambda_4}{2} [\partial_b^c (\sigma^\mu)^{\dot{a}}_c f_\mu^{\dot{b}} + \partial_b^c (\sigma^\mu)^{\dot{b}}_c f_\mu^{\dot{a}}] + M \psi^{\dot{a}} = 0,$$

$$\lambda_1 \partial_{ab} \psi^{\dot{b}} + \frac{\lambda_4}{2} [\partial_c^b (\sigma^\mu)^{\dot{c}}_a f_{b\mu} + \partial_c^b (\sigma^\mu)^{\dot{c}}_b f_{a\mu}] + M \psi_a = 0,$$

or

$$\frac{\lambda_1}{i} \partial_\mu (\sigma^\mu)^{\dot{a}b} \psi_b + \frac{\lambda_4}{2i} \partial_\nu [-(\sigma^\mu)^{\dot{a}c} (\sigma^\nu)_{cb} f_\mu^{\dot{b}} - (\sigma^\nu)^{\dot{b}c} (\sigma^\mu)_{cb} f_\mu^{\dot{a}}] + M \psi^{\dot{a}} = 0,$$

$$\frac{\lambda_1}{i} \partial_\mu (\sigma^\mu)_{ab} \psi^{\dot{b}} + \frac{\lambda_4}{2i} \partial_\nu [-(\sigma^\mu)_{ac} (\sigma^\nu)^{\dot{c}b} f_{b\mu} - (\sigma^\nu)_{bc} (\sigma^\mu)^{\dot{c}b} f_{a\mu}] + M \psi_a = 0.$$

Taking in mind the identity

$$(\sigma^\mu)^{\dot{a}b} (\sigma^\nu)_{b\dot{a}} = (\sigma^\mu)_{ab} (\sigma^\nu)^{\dot{b}a} = -2\delta_{\mu\nu} \quad (22)$$

we get

$$\frac{\lambda_1}{i} \partial_\mu (\sigma^\mu)^{\dot{a}b} \psi_b + \frac{\lambda_4}{2i} \partial_\nu [-(\sigma^\mu)^{\dot{a}c} (\sigma^\nu)_{cb} f_\mu^{\dot{b}} + 2 f_\mu^{\dot{a}}] + M \psi^{\dot{a}} = 0,$$

$$\frac{\lambda_1}{i} \partial_\mu (\sigma^\mu)_{ab} \psi^{\dot{b}} + \frac{\lambda_4}{2i} \partial_\nu [-(\sigma^\mu)_{ac} (\sigma^\nu)^{\dot{c}b} f_{b\mu} + 2 f_{a\mu}] + M \psi_a = 0.$$

Two last equations may be joined to the one

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1}{i} \partial_\mu \begin{vmatrix} 0 & (\sigma^\mu)^{\dot{a}b} \\ (\sigma^\mu)_{\dot{a}b} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi^{\dot{b}} \\ \psi_b \end{vmatrix} + \\ & + \frac{\lambda_4}{2i} \partial_\nu \begin{vmatrix} -(\sigma^\mu)^{\dot{a}c} (\sigma^\nu)_{cb} + 2\delta_b^{\dot{a}} \delta_{\nu\mu} & 0 \\ 0 & -(\sigma^\mu)_{\dot{a}c} (\sigma^\nu)^{\dot{c}b} + 2\delta_b^{\dot{a}} \delta_{\nu\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_\mu^{\dot{b}} \\ f_{b\mu} \end{vmatrix} + M \begin{vmatrix} \psi^{\dot{a}} \\ \psi_a \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Due to identities

$$(\sigma^\mu)^{\dot{a}b}(\sigma^\nu)_{b\dot{c}} + (\sigma^\nu)^{\dot{a}b}(\sigma^\mu)_{b\dot{c}} = -2\delta_{\mu\nu}\delta_{\dot{c}}^{\dot{a}}, \quad (\sigma^\mu)_{\dot{a}b}(\sigma^\nu)^{b\dot{c}} + (\sigma^\nu)_{\dot{a}b}(\sigma^\mu)^{b\dot{c}} = -2\delta_{\mu\nu}\delta_{\dot{a}}^{\dot{c}}, \quad (23)$$

$$\gamma_\mu = \frac{1}{i} \begin{vmatrix} 0 & (\sigma^\mu)^{\dot{a}b} \\ (\sigma^\mu)_{\dot{a}b} & 0 \end{vmatrix},$$

the previous equation is written as follows

$$\lambda_4 \hat{\partial} \psi + \frac{\lambda_4}{2i} \partial_\nu (\gamma_\mu \gamma_\nu + 2\delta_{\nu\mu}) f_\mu + M \psi = 0 \Rightarrow \lambda_4 \hat{\partial} \psi - \frac{\lambda_4}{2i} (\partial_\mu - \frac{1}{4} \hat{\partial} \gamma_\mu) f_\mu + M \psi = 0, \quad (24)$$

where ψ is a bispinor, and f_μ is a vector-bispinor. Similarly we derive the following two equations

$$\lambda_6 \hat{\partial} \varphi - \frac{\lambda_8}{2i} (\partial_\mu - \frac{1}{4} \hat{\partial} \gamma_\mu) f_\mu + M \varphi = 0, \quad (25)$$

$$\lambda_{11} \hat{\partial} \Phi - \frac{\lambda_{12}}{2i} (\partial_\mu - \frac{1}{4} \hat{\partial} \gamma_\mu) f_\mu + M \Phi = 0. \quad (26)$$

Now consider equation

$$\frac{1}{2} [\partial_c^{\dot{a}} (\lambda_{13} \psi^{\dot{b}} + \lambda_{14} \varphi^{\dot{b}} + \lambda_{15} \Phi^{\dot{b}}) + \partial_c^{\dot{b}} (\lambda_{13} \psi^{\dot{a}} + \lambda_{14} \varphi^{\dot{a}} + \lambda_{15} \Phi^{\dot{a}})] + M f_c^{(\dot{a}\dot{b})} = 0.$$

Allowing for (21), we obtain

$$\frac{1}{2} [\partial_c^{\dot{a}} (\lambda_{13} \psi^{\dot{b}} + \lambda_{14} \varphi^{\dot{b}} + \lambda_{15} \Phi^{\dot{b}}) + \partial_c^{\dot{b}} (\lambda_{13} \psi^{\dot{a}} + \lambda_{14} \varphi^{\dot{a}} + \lambda_{15} \Phi^{\dot{a}})] + \frac{M}{2} [(\sigma^\mu)_c^{\dot{a}} f_\mu^{\dot{b}} + (\sigma^\mu)_c^{\dot{b}} f_\mu^{\dot{a}}] = 0.$$

Let us multiplying the last equation by $(\sigma^\lambda)_a^c$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_{13}}{2} [(\sigma^\lambda)_a^c \partial_c^{\dot{a}} \psi^{\dot{b}} + (\sigma^\lambda)_a^c \partial_c^{\dot{b}} \psi^{\dot{a}}] + \frac{\lambda_{14}}{2} [(\sigma^\lambda)_a^c \partial_c^{\dot{a}} \varphi^{\dot{b}} + (\sigma^\lambda)_a^c \partial_c^{\dot{b}} \varphi^{\dot{a}}] + \\ & + \frac{\lambda_{15}}{2} [(\sigma^\lambda)_a^c \partial_c^{\dot{a}} \Phi^{\dot{b}} + (\sigma^\lambda)_a^c \partial_c^{\dot{b}} \Phi^{\dot{a}}] + \frac{M}{2} [(\sigma^\lambda)_a^c (\sigma^\mu)_c^{\dot{a}} f_\mu^{\dot{b}} + (\sigma^\lambda)_a^c (\sigma^\mu)_c^{\dot{b}} f_\mu^{\dot{a}}] = 0, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_{13}}{2} [-(\sigma^\lambda)^{\dot{a}c} \partial_{c\dot{a}} \psi^{\dot{b}} - \partial^{\dot{b}c} (\sigma^\lambda)_{c\dot{a}} \psi^{\dot{a}}] + \frac{\lambda_{14}}{2} [-(\sigma^\lambda)^{\dot{a}c} \partial_{c\dot{a}} \varphi^{\dot{b}} - \partial^{\dot{b}c} (\sigma^\lambda)_{c\dot{a}} \varphi^{\dot{a}}] + \\ & + \frac{\lambda_{15}}{2} [-(\sigma^\lambda)^{\dot{a}c} \partial_{c\dot{a}} \Phi^{\dot{b}} - \partial^{\dot{b}c} (\sigma^\lambda)_{c\dot{a}} \Phi^{\dot{a}}] + \frac{M}{2} [-(\sigma^\lambda)^{\dot{a}c} (\sigma^\mu)_{c\dot{a}} f_\mu^{\dot{b}} - (\sigma^\mu)^{\dot{b}c} (\sigma^\lambda)_{c\dot{a}} f_\mu^{\dot{a}}] = 0. \end{aligned}$$

Whence taking in mind relations (22), (23), we get

$$\begin{aligned} & \lambda_{13} [\frac{2}{i} \delta_{\lambda\nu} \partial_\nu \psi^{\dot{b}} - \partial^{\dot{b}c} (\sigma^\lambda)_{c\dot{a}} \psi^{\dot{a}}] + \lambda_{14} [\frac{2}{i} \delta_{\lambda\nu} \partial_\nu \varphi^{\dot{b}} - \partial^{\dot{b}c} (\sigma^\lambda)_{c\dot{a}} \varphi^{\dot{a}}] + \\ & + \lambda_{15} [\frac{2}{i} \delta_{\lambda\nu} \partial_\nu \Phi^{\dot{b}} - \partial^{\dot{b}c} (\sigma^\lambda)_{c\dot{a}} \Phi^{\dot{a}}] + M [2\delta_{\alpha\mu} f_\mu^{\dot{b}} - (\sigma^\mu)^{\dot{b}c} (\sigma^\lambda)_{c\dot{a}} f_\mu^{\dot{a}}] = 0, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} & \lambda_{13} \frac{1}{i} \partial_\nu [2\delta_{\lambda\nu} \psi^{\dot{b}} - (\sigma^\nu)^{\dot{b}c} (\sigma^\lambda)_{c\dot{a}} \psi^{\dot{a}}] + \lambda_{14} \frac{1}{i} \partial_\nu [2\delta_{\lambda\nu} \varphi^{\dot{b}} - (\sigma^\nu)^{\dot{b}c} (\sigma^\lambda)_{c\dot{a}} \varphi^{\dot{a}}] + \\ & + \lambda_{15} \frac{1}{i} \partial_\nu [2\delta_{\lambda\nu} \Phi^{\dot{b}} - (\sigma^\nu)^{\dot{b}c} (\sigma^\lambda)_{c\dot{a}} \Phi^{\dot{a}}] + M [2\delta_{\lambda\mu} f_\mu^{\dot{b}} - (\sigma^\mu)^{\dot{b}c} (\sigma^\lambda)_{c\dot{a}} f_\mu^{\dot{a}}] = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Similarly, the equation

$$\frac{1}{2}[\partial_a^{\dot{c}}(\lambda_{13}\psi_b + \lambda_{14}\varphi_b + \lambda_{15}\Phi_b) + \partial_b^{\dot{c}}(\lambda_{13}\psi_a + \lambda_{14}\varphi_a + \lambda_{15}\Phi_a)] + Mf_{(ab)}^{\dot{c}} = 0$$

is reduced to the form

$$\begin{aligned} & \lambda_{13} \frac{1}{i} \partial_\nu [2\delta_{\lambda\nu}\psi_b - (\sigma^\nu)_{b\dot{c}}(\sigma^\lambda)^{\dot{c}a}\psi_a] + \lambda_{14} \frac{1}{i} \partial_\nu [2\delta_{\lambda\nu}\varphi_b - (\sigma^\nu)_{b\dot{c}}(\sigma^\lambda)^{\dot{c}a}\varphi_a] + \\ & + \lambda_{15} \frac{1}{i} \partial_\nu [2\delta_{\lambda\nu}\Phi_b - (\sigma^\nu)_{b\dot{c}}(\sigma^\lambda)^{\dot{c}a}\Phi_a] + M[2\delta_{\lambda\nu}f_{b\mu} - (\sigma^\mu)_{b\dot{c}}(\sigma^\lambda)^{\dot{c}a}f_{a\mu}] = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Equations (27), (28) may be joined into the one

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} \partial_\nu \begin{vmatrix} 2\delta_{\lambda\nu}\delta_a^{\dot{b}} - (\sigma^\nu)^{\dot{b}c}(\sigma^\lambda)_{c\dot{a}} & 0 \\ 0 & 2\delta_{\lambda\nu}\delta_b^a - (\sigma^\nu)_{b\dot{c}}(\sigma^\lambda)^{\dot{c}a} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{13} \left| \begin{smallmatrix} \psi^{\dot{a}} \\ \psi_a \end{smallmatrix} \right| + \lambda_{14} \left| \begin{smallmatrix} \varphi^{\dot{a}} \\ \varphi_a \end{smallmatrix} \right| + \lambda_{15} \left| \begin{smallmatrix} \Phi^{\dot{a}} \\ \Phi_a \end{smallmatrix} \right| \end{bmatrix} + \\ & + M \begin{vmatrix} 2\delta_{\lambda\mu}\delta_a^{\dot{b}} - (\sigma^\mu)^{\dot{b}c}(\sigma^\lambda)_{c\dot{a}} & 0 \\ 0 & 2\delta_{\lambda\mu}\delta_b^a - (\sigma^\mu)_{b\dot{c}}(\sigma^\lambda)^{\dot{c}a} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} f_\mu^{\dot{a}} \\ \Phi_{a\mu} \end{bmatrix} = 0, \end{aligned}$$

or differently

$$\frac{1}{i} \partial_\nu (2\delta_{\lambda\nu} + \gamma_\nu \gamma_\lambda) [\lambda_{13}\psi + \lambda_{14}\varphi + \lambda_{15}\Phi] + M(2\delta_{\lambda\mu} + \gamma_\mu \gamma_\lambda) f_\mu = 0.$$

Thus we arrive at the equation

$$M(2\delta_{\lambda\mu} - \frac{1}{4}\gamma_\lambda \gamma_\mu) f_\mu - i(\partial_\lambda - \frac{1}{4}\gamma_\lambda \hat{\partial}) [\lambda_{13}\psi + \lambda_{14}\varphi + \lambda_{15}\Phi] = 0. \quad (29)$$

So, the system of spin-tensor equations has the form (24)–(26), (29); where we should take into account the constraints on parameters λ_i (16)–(20).

5. Minimal system of equations, the free particle case

From eq. (29) let us express the quantity $(\delta_{\lambda\mu} - \frac{1}{4}\gamma_\lambda \gamma_\mu) f_\mu$:

$$(\delta_{\lambda\mu} - \frac{1}{4}\gamma_\lambda \gamma_\mu) f_\mu = \frac{i}{M} (\partial_\lambda - \frac{1}{4}\gamma_\lambda \hat{\partial}) [\lambda_{13}\psi + \lambda_{14}\varphi + \lambda_{15}\Phi];$$

whence we derive

$$(\partial_\mu - \frac{1}{4}\hat{\partial}\gamma_\mu) f_\mu = \frac{i}{M} \cdot \frac{3}{4} \square (\lambda_{13}\psi + \lambda_{14}\varphi + \lambda_{15}\Phi), \quad \partial_\mu \partial_\mu = \square. \quad (30)$$

Taking into account relations (30) in equations (24)–(26), we obtain

$$(M + \lambda_1 \hat{\partial}\Psi) + \frac{3}{2M} \lambda_4 \square (\lambda_{13}\psi + \lambda_{14}\varphi + \lambda_{15}\Phi) = 0, \quad (31)$$

$$(M + \lambda_6 \hat{\partial})\varphi + \frac{3}{2M} \lambda_8 \square (\lambda_{13}\psi + \lambda_{14}\varphi + \lambda_{15}\Phi) = 0, \quad (32)$$

$$(M + \lambda_{11} \hat{\partial})\Phi + \frac{3}{2M} \lambda_{12} \square (\lambda_{13}\psi + \lambda_{14}\varphi + \lambda_{15}\Phi) = 0. \quad (33)$$

Let us act on equations (31) – (33) correspondingly by the operators,

$$\lambda_{13}(M + \lambda_6 \hat{\partial})(M + \lambda_{11} \hat{\partial}), \quad \lambda_{14}(M + \lambda_1 \hat{\partial})(M + \lambda_{11} \hat{\partial}), \quad \lambda_{15}(M + \lambda_1 \hat{\partial})(M + \lambda_6 \hat{\partial});$$

and then sum the results. In this way, we arrive at the equation

$$\begin{aligned} & \{M^3 + M^2 \hat{\partial} + M(\lambda_1 \lambda_6 + \lambda_1 \lambda_{11} + \lambda_6 \lambda_{11}) \square + \lambda_1 \lambda_6 \lambda_{11} \square \hat{\partial}\} (\lambda_{13} \Psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi) + \\ & + \frac{3}{2M} \{(\lambda_4 \lambda_{13} + \lambda_8 \lambda_{14} + \lambda_{12} \lambda_{15}) M^2 + M[\lambda_4 \lambda_{13} (\lambda_6 + \lambda_{11}) + \lambda_8 \lambda_{14} (\lambda_1 + \lambda_{11}) + \lambda_{12} \lambda_{15} (\lambda_1 + \lambda_6)] \hat{\partial} + \\ & + (\lambda_4 \lambda_6 \lambda_{11} \lambda_{13} + \lambda_1 \lambda_8 \lambda_{11} \lambda_{14} + \lambda_1 \lambda_6 \lambda_{12} \lambda_{15}) \square\} \square (\lambda_{13} \Psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi) = 0. \end{aligned}$$

Allowing for the restrictions (17)–(20), we derive the equation

$$M^2 \{\hat{\partial} + M\} (\lambda_{13} \Psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi) = 0,$$

which coincides with the Dirac equation for a free particle

$$(\hat{\partial} + M) \Psi = 0, \quad \Psi = \lambda_{13} \Psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi.$$

6. The minimal system of equations in presence of electromagnetic fields

Let us start with the first order system in presence of the electromagnetic fields

$$(M + \lambda_1 \hat{D}) \Psi - i2\lambda_4 (D_\mu - \frac{1}{4} \hat{D} \gamma_\mu) f_\mu = 0, \quad (34)$$

$$(M + \lambda_6 \hat{D}) \varphi - i2\lambda_8 (D_\mu - \frac{1}{4} \hat{D} \gamma_\mu) f_\mu = 0, \quad (35)$$

$$(M + \lambda_{11} \hat{D}) \Phi - i2\lambda_{12} (D_\mu - \frac{1}{4} \hat{D} \gamma_\mu) f_\mu = 0, \quad (36)$$

$$M(\delta_{\lambda\mu} - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \gamma_\mu) f_\mu - i(D_\lambda - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{D}) [\lambda_{13} \Psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi] = 0; \quad (37)$$

where $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

From the last equation in the system (34) – (37), let us express the quantity

$$(\delta_{\lambda\mu} - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \gamma_\mu) f_\mu :$$

$$(\delta_{\lambda\mu} - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \gamma_\mu) f_\mu = \frac{i}{M} (D_\lambda - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \hat{D}) (\lambda_{13} \Psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi).$$

Act on this equation by operator D_λ :

$$(D_\mu - \frac{1}{4} \hat{D} \gamma_\mu) f_\mu = \frac{i}{M} (D^2 - \frac{1}{4} \hat{D} \hat{D}) (\lambda_{13} \Psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi), \quad (38)$$

where $D^2 = D_\mu D_\mu$. Allowing for expression (38), we can rewrite equations (34) – (36) differently

$$(M + \lambda_1 \hat{D}) \Psi + \frac{2}{M} \lambda_4 (D^2 - \frac{1}{4} \hat{D} \hat{D}) (\lambda_{13} \Psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi) = 0, \quad (39)$$

$$(M + \lambda_6 \hat{D}) \varphi + \frac{2}{M} \lambda_8 (D^2 - \frac{1}{4} \hat{D} \hat{D}) (\lambda_{13} \Psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi) = 0, \quad (40)$$

$$(M + \lambda_{11} \hat{D}) \Phi + \frac{2}{M} \lambda_{12} (D^2 - \frac{1}{4} \hat{D} \hat{D}) (\lambda_{13} \Psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi) = 0. \quad (41)$$

Act on equations (39)–(41) correspondingly by the following operators

$$\lambda_{13}(M + \lambda_6 \hat{D})(M + \lambda_{11} \hat{D}), \quad \lambda_{14}(M + \lambda_1 \hat{D})(M + \lambda_{11} \hat{D}), \quad \lambda_{15}(M + \lambda_1 \hat{D})(M + \lambda_6 \hat{D});$$

this results in

$$\begin{aligned} & \lambda_{13}\{M^3 + M^2 \hat{D} + M(\lambda_1 \lambda_6 + \lambda_1 \lambda_{11} + \lambda_6 \lambda_{11}) \hat{D} \hat{D} + \\ & + \lambda_1 \lambda_6 \lambda_{11} \hat{D} \hat{D} \hat{D}\} \psi + \frac{2}{M} \lambda_4 \lambda_{13} \{M^2 + M(\lambda_6 + \lambda_{11}) \hat{D} + \\ & + \lambda_6 \lambda_{11} \hat{D} \hat{D}\} (D^2 - \frac{1}{4} \hat{D} \hat{D}) (\lambda_{13} \psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi) = 0, \\ & \lambda_{14}\{M^3 + M^2 \hat{D} + M(\lambda_1 \lambda_6 + \lambda_1 \lambda_{11} + \lambda_6 \lambda_{11}) \hat{D} \hat{D} + \\ & + \lambda_1 \lambda_6 \lambda_{11} \hat{D} \hat{D} \hat{D}\} \varphi + \frac{2}{M} \lambda_8 \lambda_{14} \{M^2 + M(\lambda_1 + \lambda_{11}) \hat{D} + \\ & + \lambda_1 \lambda_{11} \hat{D} \hat{D}\} (D^2 - \frac{1}{4} \hat{D} \hat{D}) (\lambda_{13} \psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi) = 0, \\ & \lambda_{15}\{M^3 + M^2 \hat{D} + M(\lambda_1 \lambda_6 + \lambda_1 \lambda_{11} + \lambda_6 \lambda_{11}) \hat{D} \hat{D} + \\ & + \lambda_1 \lambda_6 \lambda_{11} \hat{D} \hat{D} \hat{D}\} \Phi + \frac{2}{M} \lambda_{12} \lambda_{15} \{M^2 + M(\lambda_1 + \lambda_6) \hat{D} + \\ & + \lambda_1 \lambda_6 \hat{D} \hat{D}\} (D^2 - \frac{1}{4} \hat{D} \hat{D}) (\lambda_{13} \psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi) = 0. \end{aligned}$$

Let us sum this three equations

$$\begin{aligned} & \{M^3 + M^2 \hat{D} + M(\lambda_1 \lambda_6 + \lambda_1 \lambda_{11} + \lambda_6 \lambda_{11}) \hat{D} \hat{D} + \lambda_1 \lambda_6 \lambda_{11} \hat{D} \hat{D} \hat{D}\} (\lambda_{13} \psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi) + \\ & + \frac{2}{M} \{M^2 (\lambda_4 \lambda_{13} + \lambda_8 \lambda_{14} + \lambda_{12} \lambda_{15}) + M[\lambda_4 \lambda_{13} (\lambda_6 + \lambda_{11}) + \\ & + \lambda_8 \lambda_{14} (\lambda_1 + \lambda_{11}) + \lambda_{12} \lambda_{15} (\lambda_1 + \lambda_6)] \hat{D} + [\lambda_4 \lambda_6 \lambda_{11} \lambda_{13} + \lambda_1 \lambda_8 \lambda_{11} \lambda_{14} + \\ & + \lambda_1 \lambda_6 \lambda_{12} \lambda_{15}] \hat{D} \hat{D}\} (D^2 - \frac{1}{4} \hat{D} \hat{D}) (\lambda_{13} \psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi) = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

The last term in eq. (42) vanishes identically due to restriction (20). Thus, we have

$$\begin{aligned} & \{M^3 + M^2 \hat{D} + M(\lambda_1 \lambda_6 + \lambda_1 \lambda_{11} + \lambda_6 \lambda_{11}) \hat{D} \hat{D} + \lambda_1 \lambda_6 \lambda_{11} \hat{D} \hat{D} \hat{D} + \\ & + 2M(\lambda_4 \lambda_{13} + \lambda_8 \lambda_{14} + \lambda_{12} \lambda_{15}) (D^2 - \frac{1}{4} \hat{D} \hat{D}) + \\ & + 2[\lambda_4 \lambda_{13} (\lambda_6 + \lambda_{11}) + \lambda_8 \lambda_{14} (\lambda_1 + \lambda_{11}) + \lambda_{12} \lambda_{15} (\lambda_1 + \lambda_6)] \times \\ & \times \hat{D} (D^2 - \frac{1}{4} \hat{D} \hat{D})\} (\lambda_{13} \psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi) = 0. \end{aligned}$$

Taking in mind the identity

$$\hat{D} \hat{D} = D^2 - ie F_{[\mu\nu]} I_{[\mu\nu]}, \quad \text{where} \quad F_{[\mu\nu]} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad j_{[\mu\nu]} = \frac{1}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu),$$

we transform the previous equation to the following one

$$\begin{aligned}
 & \{M^3 + M^2 \hat{D} + M(\lambda_1 \lambda_6 + \lambda_1 \lambda_{11} + \lambda_6 \lambda_{11}) D^2 + \frac{3}{2} M(\lambda_4 \lambda_{13} + \\
 & + \lambda_8 \lambda_{14} + \lambda_{12} \lambda_{15}) D^2 - ieM(\lambda_1 \lambda_6 + \lambda_1 \lambda_{11} + \lambda_6 \lambda_{11}) F_{[\mu\nu]} j_{[\mu\nu]} + \\
 & + \frac{ie}{2} M(\lambda_4 \lambda_{13} + \lambda_8 \lambda_{14} + \lambda_{12} \lambda_{15}) F_{[\mu\nu]} j_{[\mu\nu]} + \\
 & + [\lambda_1 \lambda_6 \lambda_{11} + \frac{3}{2} (\lambda_4 \lambda_{13} (\lambda_6 + \lambda_{11}) + \lambda_8 \lambda_{14} (\lambda_1 + \lambda_{11}) + \lambda_{12} \lambda_{15} (\lambda_1 + \lambda_6))] \times \\
 & \times \hat{D} D^2 + ie[-\lambda_1 \lambda_6 \lambda_{11} + \frac{1}{2} (\lambda_4 \lambda_{13} (\lambda_6 + \lambda_{11}) + \lambda_8 \lambda_{14} (\lambda_1 + \lambda_{11}) + \\
 & + \lambda_{12} \lambda_{15} (\lambda_1 + \lambda_6))] \hat{D} F_{[\mu\nu]} j_{[\mu\nu]} \} (\lambda_{13} \Psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi) = 0,
 \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
 & \{M^3 + M^2 \hat{D} + 2ieM(\lambda_4 \lambda_{13} + \lambda_8 \lambda_{14} + \lambda_{12} \lambda_{15}) F_{[\mu\nu]} j_{[\mu\nu]} + \\
 & + [(\lambda_1 \lambda_6 + \lambda_1 \lambda_{11} + \lambda_6 \lambda_{11}) + \frac{3}{2} (\lambda_1 \lambda_4 \lambda_{13} + \lambda_6 \lambda_8 \lambda_{14} + \lambda_{11} \lambda_{12} \lambda_{15}) + \\
 & + \frac{3}{2} \lambda_4 \lambda_{13} (\lambda_6 + \lambda_{11}) + \frac{3}{2} \lambda_8 \lambda_{14} (\lambda_1 + \lambda_{11}) + \frac{3}{2} \lambda_{12} \lambda_{15} (\lambda_1 + \lambda_{11})] \hat{D} D^2 + \\
 & + ie[-(\lambda_1 \lambda_6 + \lambda_1 \lambda_{11} + \lambda_6 \lambda_{11}) - \frac{3}{2} (\lambda_1 \lambda_4 \lambda_{13} + \lambda_6 \lambda_8 \lambda_{14} + \lambda_{11} \lambda_{12} \lambda_{15}) + \frac{1}{2} \lambda_4 \lambda_{13} (\lambda_6 + \lambda_{11}) + \\
 & + \frac{1}{2} \lambda_8 \lambda_{14} (\lambda_1 + \lambda_{11}) + \frac{1}{2} \lambda_{12} \lambda_{15} (\lambda_1 + \lambda_6)] \hat{D} F_{[\mu\nu]} j_{[\mu\nu]} \} \cdot (\lambda_{13} \Psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi) = 0.
 \end{aligned}$$

Thus, we arrive at the equation

$$\begin{aligned}
 & \{M^3 + M^2 \hat{D} + 2ieM(\lambda_4 \lambda_{13} + \lambda_8 \lambda_{14} + \lambda_{12} \lambda_{15}) F_{[\mu\nu]} j_{[\mu\nu]} + \\
 & + 2ie[(\lambda_6 + \lambda_{11}) \lambda_4 \lambda_{13} + (\lambda_1 + \lambda_{11}) \lambda_8 \lambda_{14} + (\lambda_1 + \lambda_6) \lambda_{12} \lambda_{15}] \hat{D} F_{[\mu\nu]} j_{[\mu\nu]} \} \times \\
 & \times (\lambda_{13} \Psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi) = 0.
 \end{aligned}$$

Therefore, in presence of the external magnetic fields, we have the generalized Dirac-like equation

$$\begin{aligned}
 & \{\hat{D} + M + 2 \frac{ie}{M} (\lambda_4 \lambda_{13} + \lambda_8 \lambda_{14} + \lambda_{12} \lambda_{15}) F_{[\mu\nu]} j_{[\mu\nu]} + \\
 & + 2 \frac{ie}{M^2} [(\lambda_6 + \lambda_{11}) \lambda_4 \lambda_{13} + (\lambda_1 + \lambda_{11}) \lambda_8 \lambda_{14} + (\lambda_1 + \lambda_6) \lambda_{12} \lambda_{15}] \hat{D} F_{[\mu\nu]} j_{[\mu\nu]} \} \Psi = 0
 \end{aligned} \tag{43}$$

with respect to the bispinor function

$$\Psi = \lambda_{13} \Psi + \lambda_{14} \varphi + \lambda_{15} \Phi;$$

equation (43) contains two addition interaction terms.

The first term

$$2 \frac{ie}{M} (\lambda_4 \lambda_{13} + \lambda_8 \lambda_{14} + \lambda_{12} \lambda_{15}) F_{[\mu\nu]} j_{[\mu\nu]} = ie \mu F_{[\mu\nu]} j_{[\mu\nu]}$$

relates to the anomalous magnetic moment of the particle; the second term

$$2 \frac{ie}{M^2} [(\lambda_6 + \lambda_{11}) \lambda_4 \lambda_{13} + (\lambda_1 + \lambda_{11}) \lambda_8 \lambda_{14} + (\lambda_1 + \lambda_6) \lambda_{12} \lambda_{15}] \hat{D} F_{[\mu\nu]} j_{[\mu\nu]} = ie \sigma \hat{D} F_{[\mu\nu]} j_{[\mu\nu]}$$

may be considered as referring to some additional characteristics of the particle (polarizability).

Conclusions

We have constructed a generalized relativistic equation for a spin 1/2 particle with two additional characteristics in presence of external electromagnetic fields. After eliminating the accessory variables of the complete wave function, we have derived the generalized Dirac-like equation, the last includes two additional interaction terms which are interpreted as related to the anomalous magnetic moment and the polarizability of the particle. This equation may be a base for experimental testing the intrinsic structure of the spin 1/2 particle.

REFERENCES

1. Гельфанд, И. М. Теорема Паули для общерелятивистских инвариантных волновых уравнений / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18. – С. 1096–1104.
2. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Белорус. наука, 2015. – 327 с.
3. Elementary particles with internal structure in external field : in 2 vol. / V. V. Kisel [et al.]. – New York : Nova Science Publishers, 2018. – 2 vol.
4. Santhaman, T. S. Bhabha equations for unique mass and spin / T. S. Santhaman, A. R. Tekumalla // Fortsch. Phys. – 1974. – Vol. 22, nr 8. – P. 431–452.
5. Petras, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 M. Petras // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, nr 3. – P. 418–419.
6. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in a uniform magnetic field, exact solutions / E. M. Ovsiyuk [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, nr 2. – P. 153–165.
7. Ovsiyuk, E. M. Spin 1/2 Particle with Anomalous Magnetic Moment in Presence of External Magnetic Field, Exact Solutions / E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov // Relativity, gravitation, cosmology: beyond foundations. Chapter 5 ; ed. V. V. Dvoeglazov. – New York : Nova Science Publishers, 2018. – P. 65–80.
8. On P-noninvariant wave equation for a spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment / V. V. Kisel [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2019. – Vol. 22, nr 1. – P. 18–40.

REFERENCES

1. Giel'fand, I. M. Tieoriema Pauli dla obshchierelativistskikh invariantnykh volnovykh uravnenij / I. M. Giel'fand, A. M. Yaglom // ZhETF. – 1948. – Т. 18. – С. 1096–1104.
2. Plietukhov, V. A. Rielativistskiye volnovyye uravneniya i vnutrjennije stiepieni svobody / V. A. Plietukhov, V. M. Ried'kov, V. I. Strazhev. – Minsk : Bielorus. nauka, 2015. – 327 s.
3. Elementary particles with internal structure in external field : in 2 vol. / V. V. Kisel [et al.]. – New York : Nova Science Publishers, 2018. – 2 vol.

4. Santhaman, T. S. Bhabha equations for unique mass and spin / T. S. Santhaman, A. R. Tekumalla // Fortsch. Phys. – 1974. – Vol. 22, nr 8. – P. 431–452.
5. Petras, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 M. Petras // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, nr 3. – P. 418–419.
6. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in a uniform magnetic field, exact solutions / E. M. Ovsyuk [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, nr 2. – P. 153–165.
7. Ovsyuk, E. M. Spin 1/2 Particle with Anomalous Magnetic Moment in Presence of External Magnetic Field, Exact Solutions / E. M. Ovsyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov // Relativity, gravitation, cosmology: beyond foundations. Chapter 5 ; ed. V. V. Dvoeglazov. – New York : Nova Science Publishers, 2018. – P. 65–80.
8. On P-noninvariant wave equation for a spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment / V. V. Kisel [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2019. – Vol. 22, nr 1. – P. 18–40.

Рукапис надруковано у редакцію 02.10.2024

УДК 621.383.52

**Николай Николаевич Ворсин¹, Анатолий Антонович Гладышук²,
Татьяна Леонидовна Кушнер³, Евгений Викторович Луценко⁴,
Геннадий Петрович Яблонский⁵**

^{1,2}канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. физики

Брестского государственного технического университета

³канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. физики

Брестского государственного технического университета

⁴канд. физ.-мат. наук, доц., зав. центром «Широкозонная нано- и микроэлектроника»
Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

⁵д-р физ.-мат. наук, проф., науч. руководитель центра
«Широкозонная нано- и микроэлектроника»

Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

Nikolai Vorsin¹, Anatolii Gladyschuk², Tatsiana Kushner³,

Evgenii Lutsenko⁴, Gennadii Yablonskii⁵

^{1,2}Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Physics of Brest State Technical University

³Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Head of the Department of Physics of Brest State Technical University

⁴Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor,
Head of Centre «Wide-band nano and micro-electronics» Stepanov Institute of Physics
of National Academy of Sciences of Belarus

⁵Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Scientific Supervisor of Centre «Wide-band Nano and Microelectronics»
of the Stepanov Institute of Physics
of National Academy of Sciences of Belarus

e-mail: ¹vorsin@gmail.com; ²gaa.phys@tut.by; ³phys@bstu.by;

⁴e.lutsenko@ifanbel.bas-net.by; ⁵g.yablonskii@ifanbel.bas-net.by

МОДЕЛИРОВАНИЕ AlGaN ГЕТЕРОПЕРЕХОДНОГО ПОЛЕВОГО ТРАНЗИСТОРА

Тройное соединение AlGaN с шириной запрещенной зоны от 3,4 до 6,2 эВ является перспективным материалом для построения различных электронных приборов: диодов, транзисторов, лазеров, СВЧ-микросхем. Замена кремния на GaN позволяет в несколько раз повысить рабочую температуру, граничную частоту, уменьшить в несколько раз потери переключения и проводимости в силовых приборах. Необходимым элементом освоения новых электронных устройств является компьютерное моделирование физических процессов в них. В настоящей работе с помощью программного обеспечения COMSOL Multiphysics разработана модель гетеропереходного полевого транзистора (ГПТ) на основе Al_xGa_{1-x}N, включающая его ВАХ и другие параметры.

Ключевые слова: гетеропереходный полевой транзистор, нитрид галлия, нитрид алюминия, диффузионно-дрейфовая модель, метод градиента электронной плотности, поляризация, вольтамперная характеристика.

Modeling AlGaN Heterojunction Field-Effect Transistor

AlGaN ternary alloys with a band gap of 3,4 to 6,2 eV are promising materials for the construction of various electronic devices: diodes, transistors, lasers, microwave circuits. Replacing silicon with GaN allows several times to increase the operating temperature, the cutoff frequency, and to reduce several times the switching and conduction losses in power devices. A necessary element in the development of new electronic devices is computer modeling of physical processes in them. In this work, a model of a heterojunction field-effect transistor (FET) based on Al_xGa_{1-x}N was developed using the COMSOL Multiphysics software, including its CVC and other parameters.

Key words: Heterojunction field-effect transistor, gallium nitride, aluminum nitride, diffusion-drift model, electron density gradient method, polarization, current-voltage characteristic (volt-ampere characteristic).

Введение

Гетеропереходные полевые транзисторы с высокой подвижностью электронов (ГПТ, в англоязычной литературе – HEMT – High Electron Mobility Transistor) на основе нитрида галлия обладают хорошими характеристиками, которые обеспечиваются свойствами материала. Широкая запрещенная зона 3,4 эВ позволяет устройствам на основе GaN работать при высоких температурах. Полупроводник GaN имеет высокое значение напряженности поля пробоя 3,3 МВ/см, что является основой высоковольтных приборов на основе указанного соединения [1; 2]. Гетеропереход на границе AlGaIn/GaN создает двумерный электронный газ (далее – ДЭГ) высокой плотности порядка 10^{13} см^{-2} . Также весьма высока подвижность электронов, образующих ДЭГ. Благодаря этим качествам ГПТ на основе AlGaIn/GaN обладают низким сопротивлением канала, высокой плотностью тока в нем и высоким быстродействием.

Замена кремния (Si) на GaN в силовых приборах уменьшает потери проводимости и переключения в 2–6 раз. Сложные свойства системы материалов на основе нитрида галлия должны быть хорошо поняты, чтобы в полной мере использовать в устройствах преимущества этого полупроводника. Моделирование на основе физики полупроводников помогает в этом, показывая количественную взаимосвязь между основными свойствами материала и поведением устройства. Оптимизация устройства в экспериментальной или производственной среде чрезвычайно дорога и затратна по времени, поэтому должна быть дополнена компьютерным моделированием.

В настоящей работе описана созданная модель ГПТ на основе AlGaIn/GaN с простым плоским затвором и размерами, наиболее подходящими для первых реализаций. Кроме того, выбранные размеры транзистора позволяют использовать хорошо освоенный микронный технологический процесс.

Методика эксперимента

Структура моделируемого транзистора показана на рисунке 1. Она состоит из барьерного слоя AlGaIn толщиной h_2 , канального слоя GaN толщиной h_1 , который через промежуточный слой AlN опирается на подложку. Толщина слоя h_1 должна быть сравнительно большой для уменьшения напряжений в верхней его части, обусловленных рассогласованием в нижней части его решетки с решеткой подложки. Из-за разности ширины запрещенной зоны барьерного и канального слоев на границе их соприкосновения образуется двумерный слой электронного газа, выполняющий роль канала транзистора. На рисунке 1 этот слой обозначен темно-красной линией. Над каналом расположен металлический затвор Шоттки (предположительно, никелевый) с достаточной работой выхода.

Толщина канального слоя нелегированного GaN, обозначенная как h_1 , варьировалась только на первом этапе работы с моделью. При этом выяснилось, что, если $h_1 > 200 \text{ нм}$, ее влияние на параметры транзистора становятся пренебрежимо малыми. Поэтому в дальнейших расчетах использовалось значение $h_1 = 400 \text{ нм}$. Толщина подложки h_3 в расчетах не использовалась. Надо заметить, что на практике от h_1 зависит степень прорастания в вершину канального слоя дефектов, обусловленных рассогласованием его кристаллической решетки с решеткой подложки, в расчетах эти дефекты не рассматривались. На рисунке 1 обозначены параметры, размеры которых использовались при расчетах. Толщина структуры в направлении оси Z принята равной 1 мкм.

Модуль «Полупроводники» программного обеспечения COMSOL Multiphysics базируется на диффузионно-дрейфовой модели процессов в полупроводниках, которая справедлива для микронных размеров описываемых объемов. Кроме того, имеется методика учета квантоворазмерных эффектов – метод градиента электронной плотности, которая позволяет учесть квантовые эффекты в субмикронных областях. В сово-

купности COMSOL Multiphysics является удобным инструментом моделирования полупроводниковых приборов микронных и субмикронных размеров. Рассматриваемая модель сформирована на основе определенных уравнений, представленных далее.

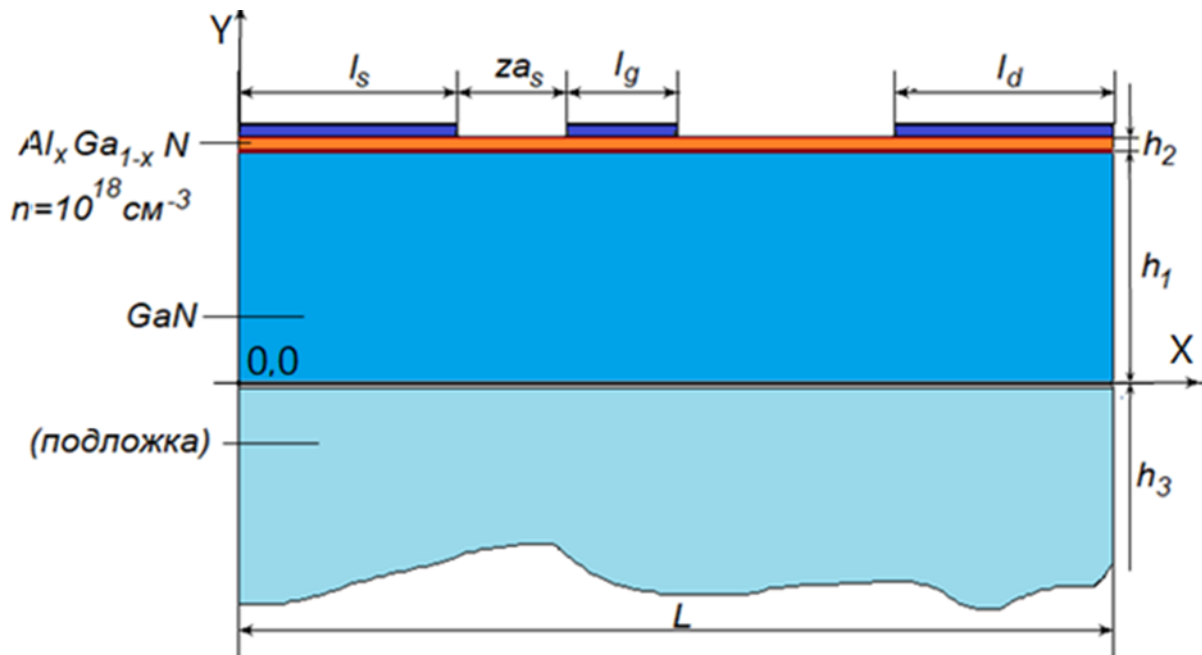


Рисунок 1 – Двумерная (X,Y) структура транзистора

Уравнение Пуассона дает связь между электрическим полем E , плотностью пространственного заряда ρ и электростатическим потенциалом φ [3].

$$\nabla^2 \cdot \varphi = -\nabla E = \rho/\varepsilon, \quad (1)$$

где ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость.

Плотность заряда ρ определяется вкладом концентраций дырок p , электронов n , ионизированных атомов донора N_d и ионизированных атомов акцептора N_a соответственно:

$$\rho = q(p + n + N_d - N_a). \quad (2)$$

Перенос носителей заряда описывается соотношениями, заданными в виде уравнений непрерывности тока:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dn}{dt} = \frac{-\nabla \cdot \vec{j}_n}{-q} - R_n + G_n \\ \frac{dp}{dt} = \frac{-\nabla \cdot \vec{j}_p}{+q} - R_p + G_p \end{array} \right., \quad (3)$$

где t – время, j_n и j_p – плотности тока электронов и дырок соответственно, R_n , G_n , R_p и G_p – скорости рекомбинации и генерации электронов и дырок соответственно.

Плотности тока электронов j_n и дырок j_p выражаются в компактной форме через квазиуровни Ферми электронов и дырок E_{fn} и E_{fp} :

$$\left\{ \begin{array}{l} j_n = qn\mu_n \nabla E_{fn} + qn \left((E_c - E_{fn})\mu_n + Q_n \right) \frac{\nabla T}{T} \\ j_p = -qp\mu_p \nabla E_{fp} - qp \left((E_v - E_{fp})\mu_p + Q_p \right) \frac{\nabla T}{T}, \end{array} \right. \quad (4)$$

где μ_n и μ_p – подвижности электронов и дырок, E_c, E_v – дно зоны проводимости и потолок валентной зоны соответственно, Q_n, Q_p являются неравновесным вкладом электронов и дырок в коэффициент термодиффузии, T – абсолютная температура.

Дно зоны проводимости E_c и потолок валентной зоны E_v , в свою очередь, связаны с электрическим потенциалом φ , сродством к электрону χ и шириной запрещенной зоны E_g следующими соотношениями:

$$E_c = -V - \chi \quad E_v = E_c - E_g. \quad (5)$$

Необходимо заметить, что в полупроводниковом модуле COMSOL Multiphysics все переменные уровней энергии ($E_{fn}, E_{fp}, E_c, E_v, \chi, E_g$) масштабируются по элементарному заряду и выражаются в единицах электрического потенциала.

Как следует из системы уравнений (4), для вычисления плотностей токов необходимо иметь значения концентраций свободных носителей заряда. В теории дрейфа-диффузии концентрации свободных носителей n, p связаны с квазиуровнями Ферми E_{fn}, E_{fp} следующими соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = N_c F_{1/2} \left(\frac{E_{fn} - E_c}{U_T} \right) \\ p = N_v F_{1/2} \left(\frac{-E_{fp} + E_v}{U_T} \right), \end{array} \right. \quad (6)$$

где N_c, N_v – эффективная плотность состояний зоны проводимости и валентной зоны, $F_{1/2}$ – интеграл Ферми – Дирака, U_T – температурный потенциал ($U_T = \frac{k_B T}{q}$), здесь k_B – постоянная Больцмана. Таким образом, система уравнений (1–5) замыкается и позволяет вычислить плотности токов и токи всех электродов транзистора при заданной его геометрии и потенциалах электродов.

На степень точности такого расчета влияет то обстоятельство, что в нитридном ГПТ область вблизи перехода, содержащая свободные электроны, очень узкая. Совокупность находящихся в такой области свободных электронов, называемая двумерным электронным газом, при вычислении концентрации электронов в нем требует учета квантовых явлений. Наиболее экономной вычислительной процедурой этого учета в COMSOL Multiphysics является метод градиента электронной плотности, при котором в рассмотрение вводятся так называемые квантовые потенциалы для электронов V_n и дырок V_p , изменяющие систему уравнений (6). С учетом введенных параметров система примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = N_c F_{1/2} \left(\frac{E_{fn} - E_c + V_n}{U_T} \right) \\ p = N_v F_{1/2} \left(\frac{-E_{fp} + E_v + V_p}{U_T} \right). \end{array} \right. \quad (7)$$

Расчет квантовых потенциалов выполняется COMSOL Multiphysics в виде линейной процедуры, не требующей циклических итераций, что и обеспечивает экономию вычислений, в сравнении с поиском самосогласованного решения уравнений Пуассона и Шредингера.

В процессе моделирования были учтены процессы поляризации. Известно, что нитриды алюминия и галлия являются поляризованными материалами. При этом действуют два механизма поляризации: спонтанная, характеризуемая вектором P_{sp} , и пьезоэлектрическая, выражаемая вектором P_{pz} .

На рисунке 2 показаны направления этих векторов. Эффекты поляризации играют важную роль в образовании ДЭГ, и меры по их учету в модели являются ключевыми.

Для этого использован имеющийся в COMSOL Multiphysics инструмент задания поверхностного заряда.

В обоих слоях, образующих гетеропереход, действуют оба механизма поляризации. Но поскольку толщины слоев отличаются более чем в 20 раз, можно принять толстый слой GaN «ненапряженным», а слой AlGaN – «напряженным».

Это напряжение является растягивающим, при котором направление векторов спонтанной и пьезоэлектрической поляризации совпадают, как показано на рисунке 2. Модуль суммарного вектора поляризации, численно равный поверхностному заряду, определится равенством

$$P = P_{AlGaN}^{sp} + P_{GaN}^{pz} - P_{GaN}^{sp}. \quad (8)$$

Для векторов поляризации, согласно [4,] имеются упрощенные формулы, выражающие их как функцию относительной доли алюминия в материале.

Подстановка данных формул в (8) дает используемое в модели выражение для величины поверхностного заряда, которая численно равна модулю вектора поляризации:

$$\sigma = [0.06095 \cdot x - 0.019 \cdot x \cdot (1 - x)]. \quad (9)$$

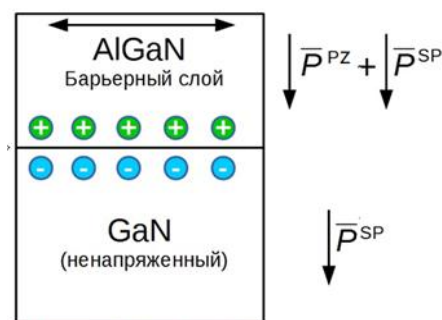


Рисунок 2 – Суммирование векторов поляризации на гетеропереходе

Легирование слоев учтено следующим образом. Барьерный слой $Al_xGa_{1-x}N$ толщиной h_2 является источником свободных электронов для канала транзистора, поэтому он легируется донорной примесью кремния до концентрации $n_+ = 10^{17} - 10^{18} \text{ см}^{-3}$.

Канальный слой, имеющий толщину h_1 , должен быть максимально чистым, что диктуется требованием сохранения подвижности электронов.

Этот слой полагается нелегированным. Однако чистый GaN имеет небольшую исходную электронную проводимость, поэтому в расчетах он полагается легированным донорной примесью, дающей концентрацию свободных электронов $n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$.

Модуль «Полупроводники» программного обеспечения COMSOL Multiphysics содержит мини-модели контактов металла с полупроводником, что избавляет от специального их моделирования.

Использованы два типа контактов: невыпрямляющие контакты для истока и стока и контакт Шоттки – для затвора.

Однако высота барьера Шоттки для гетероструктуры AlGaIn/GaN с «напряженным» слоем AlGaIn отличается от значений, измеренных для их соответствующих объемных «ненапряженных» аналогов.

В гетероструктурах AlGaIn/GaN происходит снижение высоты барьера Шоттки за счет поляризационных эффектов.

Более того, обычная теория термоэлектронной эмиссии не может быть применена из-за сильной пьезоэлектрической поляризации в напряженном слое AlGaIn.

Высота барьера Шоттки для контакта Ni-Al_xGa_{1-x}N, выражаемая в электрон-вольтах, вычисляется для гетероструктуры AlGaIn/GaN по следующей формуле:

$$\varphi_B(\text{Ni-Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}) = 0,917 + 1,784 \cdot x. \quad (10)$$

Для моделирования рассматриваемого гетероперехода должна быть задана величина электронного сродства χ – разность энергии нулевого уровня (вакуума) и дна зоны проводимости полупроводника.

Его значение для AlGaIn зависит от доли алюминия и в модели определяется в электрон-вольтах по эмпирической формуле, приведенной в [5]:

$$\chi = (4,1 - x). \quad (11)$$

Толщина слоя ДЭГ на гетеропереходе AlGaIn/GaN сравнима или даже меньше длины волны де Бройля электронов, формирующих ДЭГ. Как уже отмечалось, это обстоятельство требует учета квантовых эффектов в расчетах.

COMSOL Multiphysics имеет для этого два встроенных средства. Первое из них – подмодель системы уравнений Пуассона и Шредингера, второе – метод градиента электронной плотности.

В нашем случае движение электронов в канале транзистора может происходить только вдоль слоя ДЭГ. Поэтому результатом работы этих подмоделей должна быть только величина концентрации электронов в ДЭГ, входящая в уравнения (3) – (5).

Согласно первой подмодели, квантование энергии движения в направлении, поперечном каналу, приводит к ее дискретизации и разделению зоны квантовой ямы на счетное множество подзон.

Обычно учитывается только вклад 2–3 нижних подзон.

Механизм первой подмодели можно применить отдельно, определив концентрацию электронов в ДЭГ, например, для нулевых напряжений на электродах транзистора. Затем полученное осредненное значение концентрации подставляется в уравнения для ВАХ.

Второй инструмент – метод градиента электронной концентрации – значительно более экономный по требуемым вычислительным ресурсам и легко встраивается в единую программу вычисления характеристик транзистора.

На рисунке 3 показан график зависимости концентрации свободных электронов от координаты по оси Y в модели центральной части затвора.

Более высокая кривая относится к случаю пренебрежения эффектами квантования, более низкая – получена по методу градиента плотности.

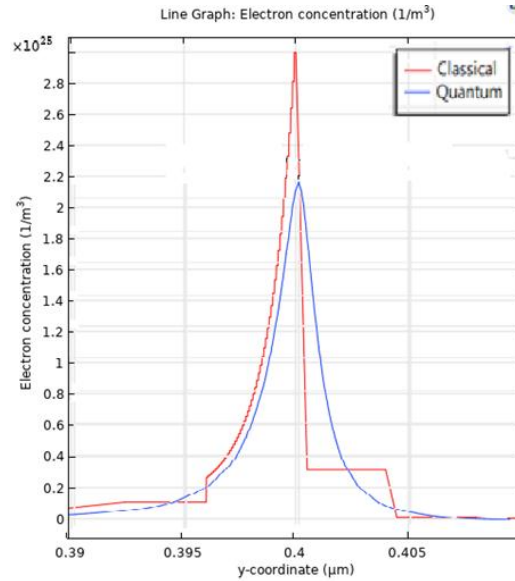


Рисунок 3 – Зависимости концентрации свободных электронов от координаты по оси Y в центральной части затвора

Видно, что учет квантовых эффектов приводят к уменьшению пика концентрации и расширению зоны ДЭГ на барьерный слой. Однако на величину канального тока это не окажет влияния, поскольку подвижность электронов в барьерном слое более чем на порядок хуже, чем в канальном. В то же время разность концентрации электронов ДЭГ, получаемых без и с учетом квантовых эффектов оказывается небольшой и имеющей тенденцию к уменьшению с улучшением точности расчетов квантования. Из этого можно сделать вывод, что расчет параметров ГПТ может проводиться даже без учета квантовых эффектов в слое ДЭГ.

Модель подвижности имеет большое значение при расчетах характеристик транзистора, оказывая влияние не только на динамические, но и на статические параметры. Нами использована модель подвижности Коги – Томаса, которая отражает насыщение скорости носителей заряда под действием электрического поля простой формулой для подвижности носителей. Данная формула содержит всего два параметра: низкополевая подвижность – μ_{lf} и скорость насыщения – v_{sat} . Формула для динамической подвижности имеет следующий вид:

$$\mu_d = \frac{\mu_{lf}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu_{lf} E_{\leftrightarrow}}{v_{sat}}\right)^2}} \quad (12)$$

Символом $E_{\leftrightarrow}$ обозначена компонента вектора напряженности электрического поля, параллельная скорости носителей. Модель Коги – Томаса также учитывает рассеяние носителей поверхностью канала. Если обозначить объемную подвижность материала как μ_{ss} , то приповерхностная подвижность определится формулой:

$$\mu_s = \frac{\mu_{ss}}{\left(\frac{E_y}{E_{ss}}\right)^4}, \quad (13)$$

где E_y – перпендикулярная каналу компонента напряженности поля, E_{ss} – общая напряженность поля в области канала. Таким образом, в знаменателе формулы (13) стоит косинус наклона вектора напряженности к нормали поверхности в четвертой степени.

Полная подвижность, как обычно, определится следующей формулой:

$$\mu = \frac{\mu_d \mu_s}{\mu_d + \mu_s}. \quad (14)$$

Поверхностные состояния. Влияние поверхностных состояний на распределение заряда в структуре устройства может быть учтено с использованием соответствующей статистики распределения при расчете плотности заряда в уравнении Пуассона (путем включения поверхностных состояний через легированный слой). Поверхностные состояния обычно моделируются феноменологическим образом на основе предположения о существовании их в виде акцептора и донора с определенной энергией ионизации. Возможно, их ионизация на самом деле не следует предполагаемой Ферми-статистике. В рассматриваемой модели мы пренебрегли особыми состояниями поверхности.

Дискретизация по конечным объемам. На поверхности раздела материалов гетероперехода имеется скачок их параметров. Разрыв может вызвать числовые проблемы, особенно для пространственной производной поляризации P_x . В нашем случае это может быть исправлено введением плавного изменения доли $Al(y)$. Вместо этого можно использовать для дискретизации и решения уравнений метод конечных объемов, имеющийся в COMSOL Multiphysics, и выбрать прямоугольную форму сеточных элементов со стороны, параллельной границе раздела материалов.

Результаты и их обсуждение

В ходе расчета COMSOL Multiphysics содержит огромные массивы результатов моделирования, из которых затем можно сформировать наглядные графики зависимости одних величин от других. Показанная на рисунке 1 двумерная модель ГПТ предполагает, что зависимость всех характеристик от третьей координаты Z отсутствует. Ширина транзистора по третьей координате принималась равной 1 мкм. Распределение плотности свободных электронов по оси Y в центре исследуемой структуры ($x = 2$ мкм) иллюстрирует образование двумерного электронного газа. График данной зависимости показан на рисунке 4. Видно, что в очень узкой области, вблизи гетероперехода, концентрация свободных электронов возрастает до $3,9 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Это является свидетельством правильного отражения моделью физических процессов в гетероструктуре.

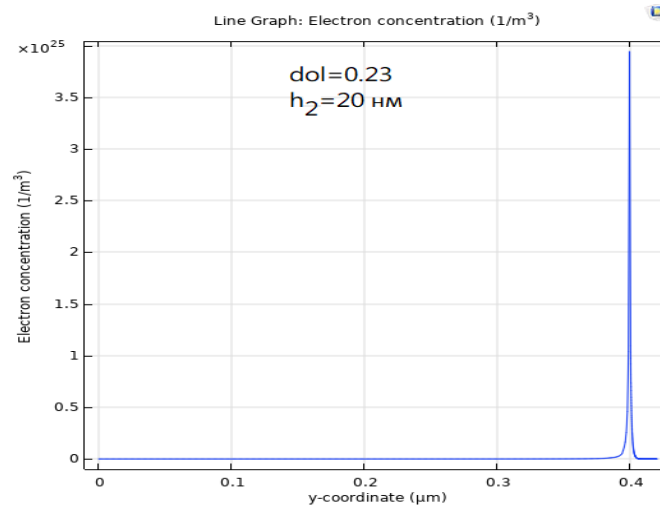


Рисунок 4 – Зависимость плотности электронного газа от вертикальной координаты при $h_1 = 0,4$ мкм, $h_2 = 0,02$ мкм, доли Al в барьерном слое $dol = 0,23$

Двумерная картина распределения электронной плотности при нулевых напряжениях стока и затвора приведена на рисунке 5. Из данного распределения видно, что барьерный слой легирован донором до получения концентрации свободных электронов 10^{18} см^{-3} . По всей длине структуры (оси X) имеется область повышенной концентрации свободных электронов – узкая темно-красная область, в которой концентрация электронов превышает величину 10^{19} см^{-3} . Именно эта область содержит двумерный электронный газ. В области расположения затвора имеется узкая область, помеченная синим цветом, соответствующая концентрации свободных электронов 10^{12} см^{-3} . Таково действие контакта Шоттки. Существенная часть свободных электронов перешла из полупроводника в никелевый затвор, имеющий большую работу выхода из него электронов. Ближняя подзатворная область окрашена желтым цветом, соответствующим концентрации свободных электронов 10^{16} см^{-3} . Однако проводящий канал, образованный ДЭГ, полностью не перекрыт: под слоем желтого цвета сохранился красный слой, в котором концентрация электронов имеет значение около 10^{18} см^{-3} .

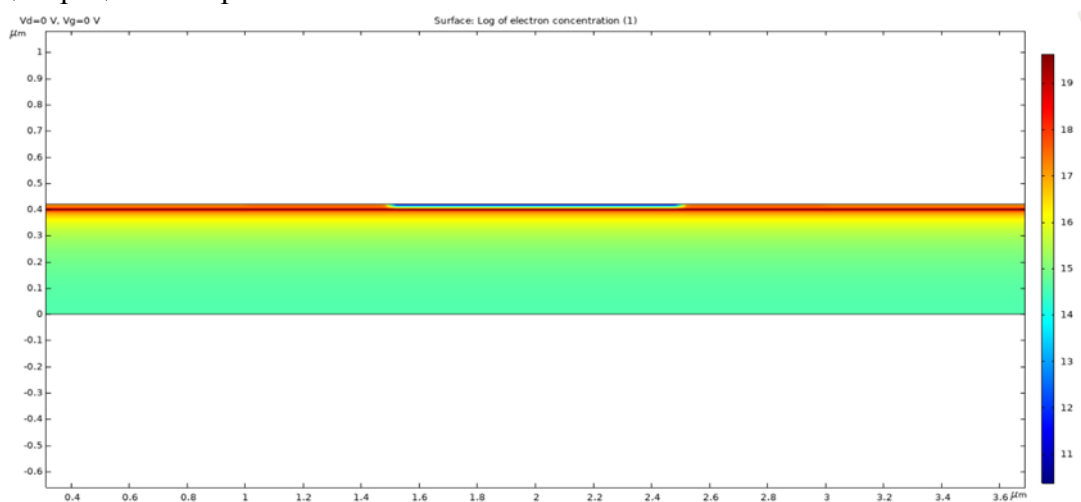


Рисунок 5 – Цветовая картина распределения концентрации свободных электронов по структуре ГПТ при нулевых напряжениях смещения

Картина распределения электронной плотности изменится после приложения к электродам транзистора напряжений стока и затвора. Рисунок 6 показывает результат подачи стокового напряжения 10 В. Вблизи правого края затвора, обращенного к стоку, произошло расширение обедненной до желтого цвета области, которая перекрыла канал транзистора.

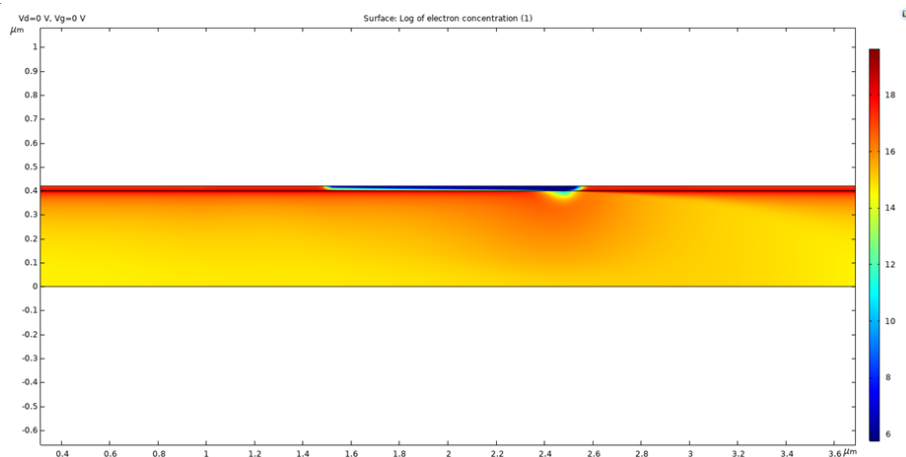


Рисунок 6 – Распределение электронной плотности при нулевом напряжении затвора и напряжении стока 10 В

Однако концентрация электронов в этой области составляет $10^{15} - 10^{16} \text{ см}^{-3}$, что соответствует заметной проводимости канала. При увеличении стокового напряжения эта область расширяется, вследствие чего стоковый ток почти не увеличивается. Это объясняется эффектом насыщения стокового тока.

На рисунке 7 показана цветовая картина распределения электронной плотности при стоковом напряжении 15 В и подаче на затвор напряжения –2 В. Видно почти полное перекрытие канала в правой части подзатворной области. При этом ток канала и ток стокового электрода будут почти нулевым.

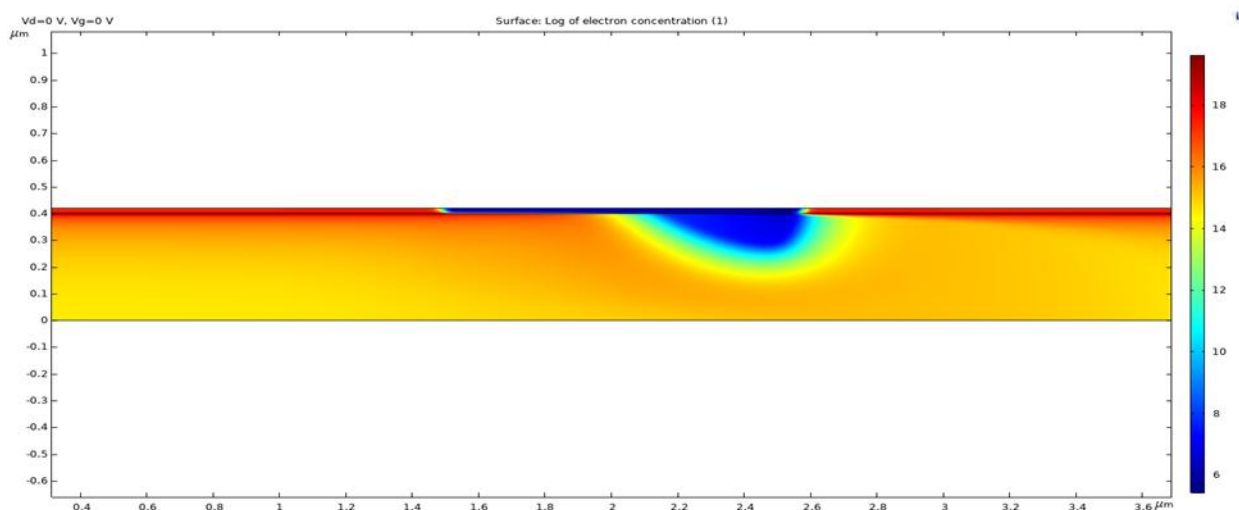


Рисунок 7 – Распределение электронной плотности при напряжении затвора –2 В и напряжении стока 15 В

Приведенные результаты расчетов свидетельствуют о работоспособности модели ГПТ и возможности получения из нее количественных характеристик транзистора при варьировании его материалов и размеров.

Возникает вопрос о распределении плотности тока по высоте структуры (по оси Y). На рисунке 8 показан соответствующий график распределения плотности тока по высоте структуры транзистора, из которого видно, что весь ток сосредоточен в узкой области существования ДЭГ. Таким образом, построенная модель ГПТ правильно отражает физику процессов в нем и может быть использована для получения технических параметров транзистора или обнаружения зависимостей между параметрами.

Одними из таких зависимостей являются статические вольт-амперные характеристики (ВАХ), которые применяются в практике проектирования устройств, использующих транзисторы. Все ВАХ подразделяются на выходные, в которых выражается зависимость тока выходного электрода от напряжения на нем, входные и проходные. Последние выражают зависимость тока выходного электрода от напряжения (или тока) другого электрода. На рисунке 9 приведено семейство графиков выходных ВАХ (выходным электродом принят сток). Выходные ВАХ имеют типичную для транзисторов форму, которая характеризуется быстрым увеличением тока на начальном участке (при малых напряжениях выходного электрода) и слабой зависимостью тока от напряжения при больших напряжениях на выходном электроде (в области насыщения выходного тока). Почти горизонтальный ход кривых зависимости тока от напряжения в области насыщения дополнительно обусловлен выбранной моделью подвижности, при которой увеличение стокового напряжения приводит к увеличению напряженности электрического поля в канале и уменьшению в нем подвижности электронов.

Построенная модель нитридного ГПТ дает ВАХ транзистора без дополнительных искусственных приемов и сшивок, используемых в других системах моделирования, например Silvaco [6]. Видимо, это приводит не только к бóльшим затратам вычислительных ресурсов при работе модели, но и к более достоверным результатам.

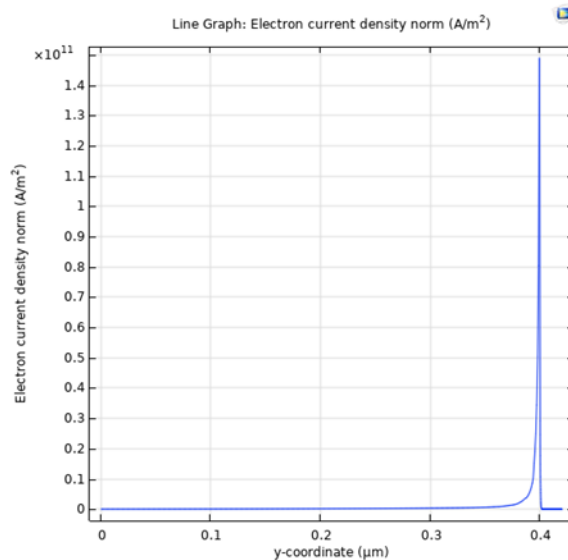


Рисунок 8 – График распределения плотности тока по глубине (оси Y) структуры транзистора

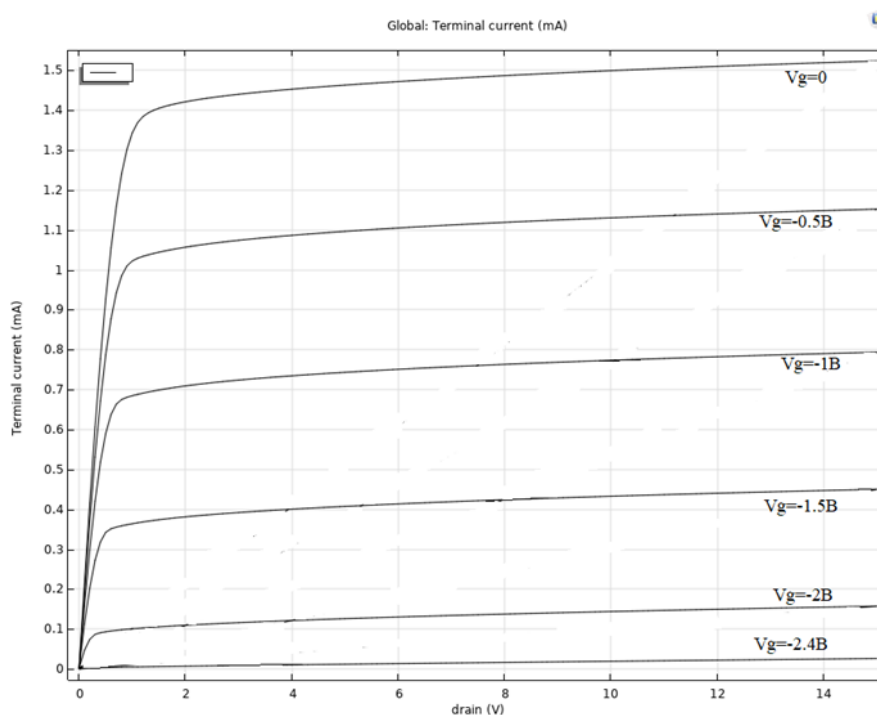


Рисунок 9 – Семейство выходных ВАХ моделируемого гетеропереходного транзистора при $h_2 = 0,02$ мкм, доле алюминия $d_{01} = 0,22$

Наличие графиков или таблиц ВАХ транзистора позволяет легко вычислить какой-либо малосигнальный параметр в заданной рабочей точке. Например, величина прямой проходной проводимости g_{21} , называемой крутизной проходной ВАХ, опреде-

ленная по рисунку 9 в точке $V_g = -1$ В – напряжение затвора, $V_d = 10$ В – напряжение стока составляет $g_{21} = 0,55$ мА/В. Столь скромная величина g_{21} не должна приводить к скептическим выводам. Дело в том, что рассматривается транзистор с толщиной по оси Z равной 1 мкм. При увеличении толщины, например до 1 мм, стоковый ток и крутизна проходной ВАХ увеличатся в 1 000 раз.

На рисунке 10 показано семейство графиков проходных ВАХ моделируемого ГПТ. Управляющим электродом считается затвор.

Полученная модель нитридного ГПТ позволяет оценивать его характеристики при различных геометрических параметрах структуры. В частности, представляют интерес влияние толщины барьерного слоя h_2 , длины затвора l_g и положения затвора в пространстве между стоком и истоком – z_{as} , других факторов.

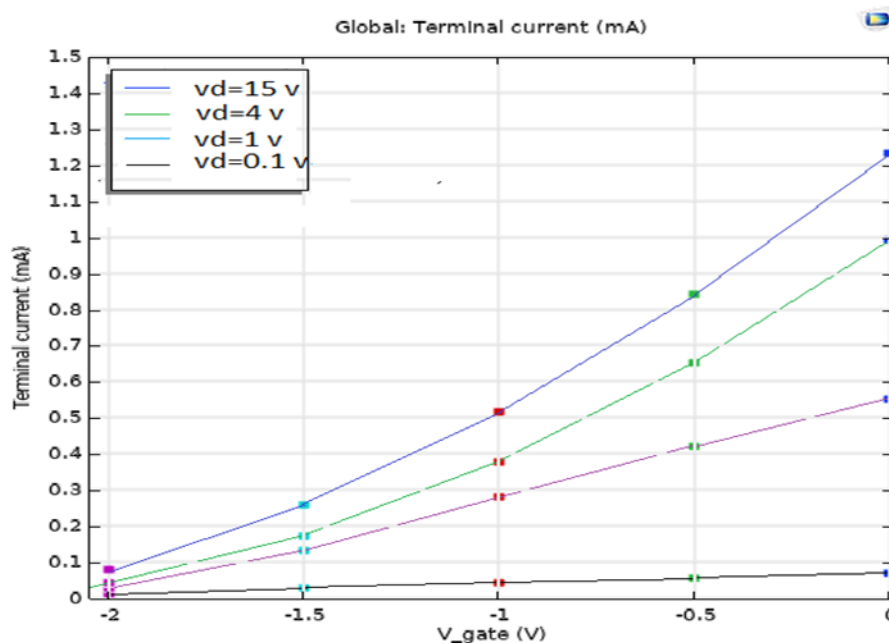


Рисунок 10 – Семейство проходных ВАХ моделируемого гетеропереходного транзистора при $h_2 = 0,02$ мкм, доле алюминия $do1 = 0,22$

Заключение

Созданная в COMSOL Multiphysics модель нитридного ГПТ дает правдоподобные результаты и позволяет оптимизировать изготовление таких приборов по параметрам размеров и степени легирования областей. Мультифизичность среды COMSOL Multiphysics должна позволить получать на основе созданной модели электрические, тепловые и другие характеристики ГПТ. В настоящей работе не затрагивается вопрос частотных параметров транзистора, поскольку не задаются необходимые для этого величины: скорость движения электронов под затвором, сопротивления контактов, статистика дефектов решетки канального слоя. По мере накопления данных об этих параметрах они могут вводиться в модель и давать соответствующие результаты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Куэй, Р. Электроника на основе нитрида галлия : пер. с англ. / Р. Куэй ; под ред. А. Г. Васильева. – М. : Техносфера, 2011. – 592 с.

2. Zine-eddine, T. Design and analysis of 10 nm T-gateenhancement-mode MOS-HEMT for high power microwave applications. / T. Zine-eddine, H. Zahra, M. Zitouni // J. of Sci.: Adv. Mater. Devices. – 2019. – Nr 4. – P. 180–187.

3. Данлэп, У. Введение в физику полупроводников : пер. с англ. / У. Данлэп ; под ред. В. Л. Бонч-Бруевича. – М. : Изд-во иностр. лит., 2011. – 430 с.

4. Исследование поляризаций нитридных соединений (Al,Ga,AlGa)N и зарядовой плотности различных интерфейсов на их основе / И.А. Супрядкина [и др.] // Физика и техника полупроводников. – 2013. – Т. 47, вып. 12. – С. 1647–1652.

5. Development of UV image intensifier tube with GaN photocathode / I. Mizuno [et al.] // Proc. of SPIE. Optics and Photonics in Global Homeland Security IV. – 2008. – Vol. 69451N.

6. SILVACO International ATLAS : User's Manual. Simulation of an SEU Event in 2D. Copyright 2019 [Electronic resource]. – Mode of access: <https://dokumen.tips/documents/atlas-users-manual.html?page=1>. – Date of access: 06.10.2024.

REFERENCES

1. Kuej, R. Eliektronika na osnovie nitrida gallija : pier. s angl. / R. Kuej ; pod ried. A. G. Vasil'jeva. – M. : Tiekhnosfiera, 2011. – 592 s.

2. Zine-eddine, T. Design and analysis of 10 nm T-gateenhancement-mode MOS-HEMT for high power microwave applications. / T. Zine-eddine, H. Zahra, M. Zitouni // J. of Sci.: Adv. Mater. Devices. – 2019. – Nr 4. – P. 180–187.

3. Danlep, U. Vviedienije v fiziku poluprovodnikov : pier. s angl. / U. Danlep ; pod ried. V. L. Bonch-Brujevicha. – M. : Izd-vo inostr. lit., 2011. – 430 с.

4. Issliedovaniye poliarizacij nitridnikh sojedinenij (Al,Ga,AlGa)N i zariadovoj plotnosti razlichnykh interfejsov na ikh osnovie / I. A. Supriadkina [i dr.] // Fizika i tiekhnika poluprovodnikov. – 2013. – T. 47, vyp. 12. – S. 1647–1652.

5. Development of UV image intensifier tube with GaN photocathode / I. Mizuno [et al.] // Proc. of SPIE. Optics and Photonics in Global Homeland Security IV. – 2008. – Vol. 69451N.

6. SILVACO International ATLAS : User's Manual. Simulation of an SEU Event in 2D. Copyright 2019 [Electronic resource]. – Mode of access: <https://dokumen.tips/documents/atlas-users-manual.html?page=1>. – Date of access: 06.10.2024.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 18.10.2024

УДК 539.12:530.145

Anastasia Kuzmich¹, Vladimir Pletyukhov²,¹*Teacher of the Department of General and Theoretical Physics
of Brest State A. S. Pushkin University*²*Doctor of Physics and Mathematical Sciences, Professor,
Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of Brest State A. S. Pushkin University***Анастасия Михайловна Кузьмич¹, Владимир Анестиевич Плетюхов²**¹*преподаватель каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*
²*д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*e-mail: pletyukhov@yandex.by**RELATIVISTIC WAVE EQUATIONS
WITH EXTENDED SET OF THE LORENTZ GROUP PRESENTATIONS**

It is shown that the use of extended sets of irreducible representations of the Lorentz group opens new possibilities for the theory of relativistic wave equations from the point of view of the space-time description of both the internal structure and the isospin degrees of freedom of elementary particles. The approach developed in this work also makes it possible to apply the methods of the theory of relativistic wave equations in superstring and gauge models of fundamental interactions.

Key words: relativistic wave equations, quantization, spin, statistics.

**Релятивистские волновые уравнения
с расширенным набором представлений группы Лоренца**

Показано, что использование расширенных наборов неприводимых представлений группы Лоренца открывает новые возможности теории релятивистских волновых уравнений с точки зрения пространственно-временного описания как внутренней структуры, так и изоспиновых степеней свободы элементарных частиц. Развиваемый в работе подход позволяет также применять методы теории релятивистских волновых уравнений в суперструнных и калибровочных моделях фундаментальных взаимодействий.

Ключевые слова: релятивистские волновые уравнения, квантование, спин, статистика.

Introduction

The Dirac equation served as the starting model for the creation of the general theory of relativistic wave equations (RWE) – first-order relativistic quantum-mechanical equations written in matrix-differential form.

The fundamental idea of this theory is the governing of any RWE with a corresponding set of irreducible representations of the group of geometric (space-time) symmetries of the Minkowski space.

We can formulate the following postulate basis for this theory [1; 2]:

- 1) any RWE must satisfy the invariance requirements with respect to the transformations of the proper Lorentz group and operation of the spatial reflection, also possibility of the Lagrangian formulation of the theory is assumed;
- 2) RWE describing a single physical micro-object should not be decayed in the sense of the full Lorentz group;
- 3) among the states of the micro-object, there cannot be those which correspond to zero energy;
- 4) the correct RWE must lead to a positive definite density of energy (charge) in the case of a whole (half-integer) spin;

5) fields with integral (and half-integral) spins are described on the basis of tensor (spinor) representations of the Lorentz group;

6) usually when constructing for a particle with spin a corresponding RWE we restrict ourselves to the minimally necessary set of irreducible representations of the Lorentz group.

The listed provisions of the theory of RWE were formulated in the 20s – 50s of the last century. They were based on the idea that elementary particles are nonstructural point-like micro objects with a single internal degree of freedom (spin), the latter has a spatio-temporal interpretation.

However, with the establishment of new experimental facts (the existence of internal structure for some particles, the presence of additional internal degrees of freedom besides spin, etc.), the above ideas have undergone significant changes. The very concept of «elementary particle» has also changed.

There arose the idea of existence of fundamentally new physical objects that unify the qualities of micro-particles (fields) with nonzero and zero mass (for example, the electroweak fields) and the properties of massless micro-objects with different helicity values (fields interacting with non-closed strings).

The Dirac – Kähler [3] and Petrash [4] equations were the first successful attempts to go beyond the postulates 1) – 6) and thereby greatly expanded the capabilities of the theory of RWE. They showed that if the postulate 6) is abandoned, the possibility of a spatio-temporal description of both the internal structure and the isospin degrees of freedom of particles appears. Since the middle of the 1960s, this direction began to develop actively in a number of scientific centers of the Republic of Belarus on the initiative and under the leadership of Academician of the Academy of Sciences of Belarus F. I. Fedorov.

Over the past decade, a wealth of results in the theory of RWE with an extended set of representations of the Lorentz group had been accumulated. In this paper, we present some significant results that can be adapted to modern experimental achievements and theoretical trends in high-energy physics.

1. RWEs with an extended set of the Lorentz group representations and internal structure of microobjects

A characteristic feature of all RWE considered above consists in the fact that they are based on the sets of the Lorentz group irreducible representations which are minimally necessary for constructing theory for a given spin. Along with that, in accordance with the ideology of the relativistic quantum mechanics, which interprets elementary particles as point-like structureless objects, such RWEs take into account only spin properties of particles. A possibility of describing other internal properties of particles in the orthodox version of the RWE theory is not provided.

Relaxing the requirement of minimality in usage of sets of the Lorentz group irreducible representations opens new possibilities of the RWE theory approach for a spatio-temporal (geometrized) description of internal properties of particles. To obtain equations which do not disintegrate with respect to the Lorentz group and which are capable of reflecting an internal structure of a particle with spin s , one can use the following possibilities: Either to include into a linking scheme representations with higher weights or to employ multiple representations of the Lorentz group. In the present chapter we show how to describe an internal electromagnetic structure of particles with lowest spins in the framework of the RWE theory with extended sets of the Lorentz group representations.

For the first time, the RWE for a particle with spin $s = 1/2$, which arises after involving additional – with respect to the bispinor – irreducible components in the representation space of a wavefunction, was proposed by Petras and Ulegla [5].

Here we give a brief description of the theory of the Petras equation in the Gel'fand – Yaglom approach. To this end, we consider the following linking scheme

$$\begin{array}{ccc} (0, \frac{1}{2})^{\boxplus} & - & (\frac{1}{2}, 0)^{\boxplus} \\ | & & | \\ (\frac{1}{2}, 1) & - & (1, \frac{1}{2}) \\ | & & | \\ (0, \frac{1}{2}) & - & (\frac{1}{2}, 0) \end{array} \quad (1.1)$$

Let us enumerate the irreducible representations contained in (1.1):

$$\begin{aligned} (0, \frac{1}{2}) \sim 1, \quad (0, \frac{1}{2})^{\boxplus} \sim 2, \quad (1, \frac{1}{2}) \sim 3, \\ (\frac{1}{2}, 0) \sim 4, \quad (\frac{1}{2}, 0)^{\boxplus} \sim 5, \quad (\frac{1}{2}, 1) \sim 6, \end{aligned} \quad (1.2)$$

Then, we for the spin blocks $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ of the matrix

$$\Gamma_4 = (C^{1/2} \otimes I_2) \oplus (C^{3/2} \otimes I_4) \quad (1.3)$$

we obtain the following expressions

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{14}^{1/2} & 0 & c_{16}^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{25}^{1/2} & c_{26}^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & c_{34}^{1/2} & c_{35}^{1/2} & c_{36}^{1/2} \\ c_{41}^{1/2} & 0 & c_{43}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{52}^{1/2} & c_{53}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ c_{61}^{1/2} & c_{62}^{1/2} & c_{63}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{36}^{3/2} \\ c_{63}^{3/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

To exclude spin $s = 3/2$, we impose constraints

$$c_{36}^{3/2} = c_{63}^{3/2} = 0 \text{ or } C^{3/2} = 0, \quad (1.5)$$

from whence it follows

$$c_{36}^{1/2} = c_{63}^{1/2} = 0. \quad (1.6)$$

The condition of the P -invariance leads to the relations

$$\begin{aligned} c_{14}^{1/2} = c_{14}^{1/2}, c_{25}^{1/2} = c_{52}^{1/2}, c_{16}^{1/2} = c_{43}^{1/2}, \\ c_{26}^{1/2} = c_{53}^{1/2}, c_{34}^{1/2} = c_{61}^{1/2}, c_{35}^{1/2} = c_{62}^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

A possibility of the Lagrangian formulation implies

$$c_{14}^{1/2}, c_{25}^{1/2} \in R; \quad c_{34}^{1/2} = \frac{\eta_{63}^{1/2}}{\eta_{14}^{1/2}} (c_{16}^{1/2})^*, c_{35}^{1/2} = \frac{\eta_{63}^{1/2}}{\eta_{25}^{1/2}} (c_{26}^{1/2})^*. \quad (1.8)$$

With account of the constraints (1.5) – (1.8) the spin block $C^{1/2}$ acquires the form

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_3 \\ 0 & c_2 & c_4 \\ f_1 c_3^* & f_2 c_4^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

where the notations

$$c_1 = c_{14}^{1/2}, \quad c_2 = c_{25}^{1/2}, \quad c_3 = c_{16}^{1/2}, \quad c_4 = c_{26}^{1/2},$$

$$f_1 = \frac{\eta_{63}^{1/2}}{\eta_{14}^{1/2}}, \quad f_2 = \frac{\eta_{63}^{1/2}}{\eta_{25}^{1/2}} \quad (1.10)$$

are introduced for brevity.

A characteristic equation for the block C reads

$$\lambda^3 - (c_1 + c_2)\lambda^2 + (c_1c_2 - f_1|c_3|^2 - f_2|c_4|^2)\lambda + f_1c_2|c_3|^2 + f_2c_1|c_4|^2 = 0 \quad (1.11)$$

To obtain a single mass value, it is necessary to impose

$$c_1c_2 - f_1|c_3|^2 - f_2|c_4|^2 = 0,$$

$$f_1c_2|c_3|^2 + f_2c_1|c_4|^2 = 0. \quad (1.12)$$

Without loss of generality, we choose the only nonzero eigenvalue of the block C to be

$$\lambda = c_1 + c_2 = 1. \quad (1.13)$$

Such a choice yields the following minimal polynomials for the $C^{1/2}$ and the matrix Γ_4 :

$$(C^{1/2})^2 \left[(C^{1/2})^2 - 1 \right] = 0, \quad \Gamma_4^2 (\Gamma_4^2 - 1) = 0. \quad (1.14)$$

It remains to impose the condition of the charge definiteness, which in the present case ($C^{3/2}$, $n = 2$) acquires the form

$$\text{Sp} ((C^{1/2})^3 \eta^{1/2}) \neq 0, \quad (1.15)$$

where

$$\eta^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{\boxplus} \\ \eta^{\boxplus} & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta^{\boxplus} = \begin{pmatrix} \eta_{14}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{25}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{36}^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

It follows with account of (1.15) that

$$\eta_{14}^{1/2} c_1^3 + \eta_{25}^{1/2} c_2^3 + (2\eta_{63}^{1/2} + \eta_{14}^{1/2})c_1|c_3|^2 + (2\eta_{63}^{1/2} + \eta_{25}^{1/2})c_2|c_4|^2 \neq 0. \quad (1.17)$$

A simultaneous fulfillment of the conditions (1.12), (1.13), (1.17) is ensured, e. g., by the choice

$$c_1 = \frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{2}{3}, \quad c_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad c_4 = \frac{2}{3}, \quad (1.18)$$

$$\eta_{14}^{1/2} = -1, \quad \eta_{25}^{1/2} = 1, \quad \eta_{36}^{1/2} = 1, \quad (1.19)$$

giving the following matrices C and $\eta^{\boxplus}$

$$C = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & \sqrt{2}/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \\ -\sqrt{2}/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta^{\boxplus} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Thus, we obtained the 20-component RWE with the linking scheme (1.1) featuring the nondiagonalizable matrix Γ_4 .

This equation describes a spin-1/2 particle and obeys all physical requirements.

Let us now show that on the basis of the linking scheme (3.1) it is also possible to construct a RWE for a particle with spin $s = 3/2$ [6].

Sticking with the previous labelling of the irreducible representations contained in (1.1), we again arrive at the general form (1.4) of the spin blocks $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ of the matrix Γ_4 in the Gel'fand – Yaglom basis.

The condition of the relativistic invariance leads to the following constraints

$$c_{36}^{3/2} = 2c_{36}^{1/2}, \quad c_{63}^{3/2} = 2c_{63}^{1/2}. \quad (1.21)$$

The RWE invariance with respect to spatial reflections gives besides (1.7) the relations

$$c_{36}^{1/2} = c_{63}^{1/2}, \quad c_{36}^{3/2} = c_{63}^{3/2}. \quad (1.22)$$

A possibility of the Lagrangian formulation of the theory completes the relations (1.7) by the condition

$$c_{36}^{1/2} \in R. \quad (1.23)$$

Since in the present case we are interested in spin $3/2$, we can set without loss of generality

$$c_{36}^{3/2} = c_{63}^{3/2} = 1. \quad (1.24)$$

Under this choice the conditions (1.21) – (1.23) yield the following spin blocks $C^{1/2}$ and $C^{3/2}$:

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_3 \\ 0 & c_2 & c_4 \\ f_1 c_3^* & f_2 c_4^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

$$C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

where the notations (1.10) are used.

A characteristic equation for the spin block C has the form

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \left(c_1 + c_2 + \frac{1}{2}\right) \lambda^2 + \left(\frac{c_1 c_2}{2} + c_1 c_2 - f_1 |c_3|^2 - f_2 |c_4|^2\right) \lambda \\ - \frac{c_1 c_2}{2} + f_1 c_2 |c_3|^2 + f_2 c_1 |c_4|^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

To exclude states with spin $1/2$ we must claim that all eigenvalues of the block $C^{1/2}$ are equal to zero. This requirement leads to the conditions

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \frac{1}{2} &= 0, \\ \frac{c_1 c_2}{2} + c_1 c_2 - f_1 |c_3|^2 - f_2 |c_4|^2 &= 0, \\ -\frac{c_1 c_2}{2} + f_1 c_2 |c_3|^2 + f_2 c_1 |c_4|^2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.28)$$

where the numbers f_1 and f_2 may independently of each other take values either $+1$ or -1 .

$$(C^{1/2})^3 = 0, \quad (C^{3/2})^2 - 1 = 0, \quad (1.29)$$

$$\Gamma_4^3 (\Gamma_4^2 - 1) = 0. \quad (1.30)$$

For example, let us choose

$$f_1 = -1, \quad f_2 = -1, \quad (1.31)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad |c_4| = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad (1.32)$$

realizing one of the admissible possibilities.

This choice leads to the matrix of the bilinear form having blocks

$$\eta^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

as well as to the spin block $C^{1/2}$ of the matrix Γ_4

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

By virtue of (1.30) the charge definiteness condition for $n = 3$ acquires the form

$$(\text{Sp}(\Gamma_4^4 \eta))^2 - (\text{Sp}(\Gamma_4^3 \eta))^2 < 0. \quad (1.35)$$

Using the explicit form of the matrices Γ_4 and η , we obtain the relations

$$\text{Sp}(\Gamma_4^4 \eta) = 0, \quad \text{Sp}(\Gamma_4^3 \eta) = 8, \quad (1.36)$$

which ensure a fulfillment of the inequality (1.35).

To construct RWEs describing microobjects with spins $s = 0$ and $s = 1$ and differing from the well-known Duffin – Kemmer equations, we consider the following set of the Lorentz group irreducible representations [7; 8]:

$$(0, 0) \oplus 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus (0, 1) \oplus (1, 0), \quad (1.37)$$

which constitute the linking scheme

$$\begin{array}{c} (0, 0) \\ | \\ (0, 1) - 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1, 0). \end{array} \quad (1.38)$$

Here the vector representation $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ has the multiplicity two. In the following, we label one of them with the prime to distinguish the two vector representations from each other.

The block structure of the matrix Γ_4 corresponding to the RWE based on the scheme (1.37) has the form

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} C^0 & 0 \\ 0 & C^1 \otimes I_3 \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

in the Gel'fand – Yaglom basis. Labeling the irreducible components contained in (1.37) by

$$(0,0) \sim 1, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\mathbb{Q}} \sim 2, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim 3, \quad (0,1) \sim 4, \quad (1,0) \sim 5,$$

we obtained after applying the conditions of the relativistic and P -invariance conditions the following spin blocks

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^0 & c_{13}^0 \\ c_{21}^0 & 0 & 0 \\ c_{31}^0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{24}^1 & c_{24}^1 \\ 0 & 0 & c_{34}^1 & c_{34}^1 \\ c_{43}^1 & c_{43}^1 & 0 & 0 \\ c_{42}^1 & c_{43}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

The matrix of the bilinear form in the Gel'fand – Yaglom basis reads

$$\begin{aligned} \eta &= \begin{pmatrix} \eta^0 & 0 \\ 0 & \eta^0 \otimes I_3 \end{pmatrix}, \\ \eta^0 &= \begin{pmatrix} \eta_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33}^0 \end{pmatrix}, \\ \eta^1 &= \begin{pmatrix} \eta_{22}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{33}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{45}^1 \\ 0 & 0 & \eta_{54}^1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Choosing its nonzero elements to be

$$\eta_{11}^0 = -\eta_{22}^0 = \eta_{33}^0 = \eta_{22}^1 = -\eta_{33}^1 = -\eta_{45}^1 = -\eta_{54}^1 = 1, \quad (1.42)$$

we reduce the condition (1.48) of a possibility of the Lagrangian formulation to the relations

$$c_{21}^0 = -(c_{12}^0)^*, \quad c_{31}^0 = (c_{13}^0)^*, \quad c_{42}^1 = -(c_{24}^1)^*, \quad c_{43}^1 = (c_{34}^1)^*. \quad (1.43)$$

The remaining arbitrariness in choice of values for the matrix Γ_4 elements we can use for obtaining RWE with a desired value of spin.

Thus, setting

$$c_{12}^0 = 0, c_{13}^0 = c_{24}^1 = c_{34}^1 = 1, \quad (1.44)$$

we obtain the spin blocks

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

It is easy to check the spin blocks C^1 and C^0 and the matrix Γ_4 obey the following minimal equations

$$(C^1)^3 = 0, \quad C^0[(C^0)^2 - 1] = 0, \quad (1.46)$$

$$\Gamma_4^3(\Gamma_4^2 - 1) = 0. \quad (1.47)$$

From (1.46) it follows that to the state with spin $s = 0$ corresponds the only mass value, while all eigenvalues of the block C^1 are zero, i.e. states with $s = 1$ are absent.

Thus, we obtain the RWE for a microobject with spin $s = 0$ and a single mass value.

Using the relations (1.41), (1.42), and (1.45) for matrices Γ_4 and η it is easy to check the identities

$$\text{Sp}(\Gamma_4^3 \eta) = 0, \quad \text{Sp}(\Gamma_4^4 \eta) = 2. \quad (1.48)$$

They ensure the fulfillment of the energy definiteness condition which for the present case ($n = 3$) is expressed by the inequality

$$(-1)^4 [(\text{Sp}(\Gamma_4^4 \eta))^2 - (\text{Sp}(\Gamma_4^3 \eta))^2] > 0. \quad (1.49)$$

In the tensor formulation the constructed RWE reads

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi_\mu + m \psi_0 &= 0, \\ \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi_0 + m \psi_\mu &= 0, \\ -\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + m \psi_\mu^{\square} &= 0, \\ -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu - \partial_\mu \psi_\nu^{\square} + \partial_\nu \psi_\mu^{\square} + m \psi_{[\mu\nu]} &= 0, \end{aligned} \quad (1.50)$$

where ψ_0 is a scalar, ψ_μ and $\psi_\mu^{\square}$ are 4-vectors, $\psi_{[\mu\nu]}$ is an antisymmetric tensor of the second rank. From (1.50) it is easy to derive the second-order equation

$$(\square - m^2) \psi_0 = 0, \quad (1.51)$$

which means that the system (1.50) indeed describes a particle with nonzero mass and spin $s = 0$.

To construct a RWE for a microparticle with spin $s = 1$ on the basis of the linking scheme (1.38), we choose the following values for the matrix elements of the matrix (1.41):

$$\eta_{11}^0 = \eta_{22}^0 = -\eta_{33}^0 = -\eta_{22}^1 = \eta_{33}^1 = \eta_{45}^1 = \eta_{54}^1 = 1. \quad (1.52)$$

Then, according to the condition (1.48) we obtain

$$c_{21}^0 = (c_{12}^0)^*, \quad c_{31}^0 = -(c_{13}^0)^*, \quad c_{42}^1 = -(c_{24}^1)^*, \quad c_{43}^1 = (c_{34}^1)^* \quad (1.53)$$

Within the remaining freedom in choice of the matrix elements of the spin blocks C^0 and C^1 (1.40) we make a particular selection of values

$$\begin{aligned} c_{12}^0 = c_{13}^0 = c_{21}^0 = -c_{31}^0 &= 1, \\ c_{24}^1 = c_{42}^1 &= 0, \quad c_{34}^1 = c_{43}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Thus, we arrive at the final form of the matrices η^0 , η^1 , C^0 , and C^1

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

It is easy to check that the minimal equations for the spin blocks (3.56) of the matrix Γ_4 have the form

$$(C^0)^3 = 0, \quad C^1[(C^1)^2 - 1] = 0. \quad (1.57)$$

This means that the corresponding RWE indeed describes a microparticle with spin $s = 1$.

From (1.57) it follows that the minimal equation for the matrix Γ_4 coincides with its analog (1.47) for a scalar particle. Therefore the condition of the energy definiteness in the present case should coincide with (1.49). Using the definitions (1.55) and (1.56), one can verify that the condition (1.49) is valid for a vector particle as well.

A tensor formulation of the obtained RWE with the extended set of representations for a particle with spin $s = 1$ reads

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi_\mu + \partial_\mu \psi_\mu^\square + m\psi_0 &= 0, \\ \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi_0 + m\psi_\mu &= 0, \\ \partial_\mu \psi_0 + m\psi_\mu^\square &= 0, \\ -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu^\square + m\psi_{[\mu\nu]} &= 0. \end{aligned} \quad (1.58)$$

From this system one can derive the equations

$$(\square - m^2)(\psi_\mu + \psi_\mu^\square) = 0, \quad \partial_\mu(\psi_\mu + \psi_\mu^\square) = 0, \quad (1.59)$$

which unambiguously indicate that the system (1.58) does describe a vector particle with nonzero mass.

Other versions of the extended RWEs for particles with lowest spins are proposed in the papers [9] (spin 1/2), [10] (spin 0), and [11] (spin 1).

A question of the physical inequivalence of RWEs with minimal and extended sets of representations of the Lorentz group has been discussed for the first time for specific equations in the papers [7; 8] (spins 0 and 1), [12; 13] (spin 1/2), and [14] (spin 3/2). The essence and the main results of the latter study are the following.

First, one introduces minimal and extended equations for free particles

$$(\Gamma_\mu^{(0)} \partial_\mu + m) \Psi_0(x) = 0, \quad (1.60)$$

$$(\Gamma_\mu^{(1)} \partial_\mu + m) \Psi_1(x) = 0, \quad (1.61)$$

which are defined in the representation spaces corresponding to the irreducible Lorentz group representations T_0 and $T_1 = T_0 + T^\square$, respectively.

Second, one finds an explicit form of operators R and K transforming Ψ_0 into Ψ_1 and vice versa:

$$R = (A, 0), \quad K = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad (1.62)$$

$$R\Psi_1 = (A, 0) \begin{pmatrix} \Psi_1^0 \\ \Psi_1^1 \end{pmatrix} = A\Psi_1^0 = \Psi_0, \quad (1.63)$$

$$K\Psi_0 = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \Psi_0 = \begin{pmatrix} F\Psi_0 \\ G\Psi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1^0 \\ \Psi_1^1 \end{pmatrix} = \Psi_1. \quad (1.64)$$

Here A and F are rectangular number-valued matrices, satisfying the condition

$$AF = I, \quad (1.65)$$

while the matrix G in general contains differentiation operators. Moreover, the operators R and K should obey the relation

$$R\Gamma_\mu^{(1)}K = \Gamma_\mu^{(0)} + B_\mu, \quad (1.66)$$

where the matrices B_μ satisfy the equation

$$B_\mu \partial_\mu \Psi_0(x) = 0. \quad (1.67)$$

Next, one considers the equations

$$(\Gamma_\mu^{(0)} D_\mu + m) \Phi_0(x) = 0, \quad (1.68)$$

$$(\Gamma_\mu^{(1)} D_\mu + m) \Phi_1(x) = 0, \quad (1.69)$$

describing particles which interact with the electromagnetic field added by means of the minimal coupling

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (1.70)$$

The operator R , transforming $\Phi_1(x)$ into $\Phi_0(x)$ has the same form as for free particles. For the operator $K^\square$ which realizes the inverse transformation we obtain

$$K^\square = \begin{pmatrix} F \\ G + G^\square \end{pmatrix}, \quad (1.71)$$

where the addition $G^\square$ is caused by the derivative extension (1.70). In light of this, the equation (1.69) can be cast to the form

$$(R\Gamma_\mu^{(1)} D_\mu K^\square + m) \Phi_0(x) = 0, \quad (1.72)$$

or

$$(\Gamma_\mu^{(0)} D_\mu + Q + m) \Phi_0(x) = 0, \quad (1.73)$$

where

$$Q \sim R\Gamma_\mu^{(1)} D_\mu G^\square + B_\mu D_\mu. \quad (1.74)$$

Thus, after bringing the equation (1.69) into shape of the equation (1.68) for a wavefunction with a minimally necessary number of components, we observe in the latter an occurrence of the additional term Q which is given by (1.74). For particles with spins $s = 1/2$ and $s = 3/2$ described by the RWEs with the extended sets of representations, which have been discussed above, this term acquires the form

$$Q \sim \frac{ie}{m} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) J^{[\mu\nu]} = \frac{ie}{m} F_{[\mu\nu]} J^{[\mu\nu]}, \quad (1.75)$$

where $J^{[\mu\nu]}$ are the generators of the Lorentz group representations in the respective spaces.

In the nonrelativistic approximation, this term describes an additional – anomalous – magnetic moment, and it leads to an interaction of the Pauli type in the Lagrangian.

In the cases of the extended RWEs for particles with lowest spins, which have been discussed above, this additional term has the form

$$Q \sim \frac{e^2}{m} F_{[\mu\nu]} F_{[\mu\nu]} e^{00}, \quad (1.76)$$

$$Q \sim \frac{e^2}{m} F_{[\mu\nu]} F_{[\rho\sigma]} e^{[\mu\nu],[\rho\sigma]}, \quad (1.77)$$

where e^{AB} are the generalized Kronecker symbols defined by the formulas

$$(e^{AB})_{CD} = \delta_{AC} \delta_{BD}. \quad (1.78)$$

In the case of a particle with spin $s = 0$ the term Q given by (1.76) describes in the nonrelativistic approximation dipole electric and magnetic polarizabilities of this particle which

are induced by an external electromagnetic field. In the case of a particle with spin $s = 1$ the analogous term (1.77) describes a particle's static tensor electric polarizability.

It is obvious that an additional interaction with an external electromagnetic field should influence a form of matrix elements for specific scattering processes. Detailed calculations of some of these processes have been performed in the papers [7–14]. It has been shown that in the first order perturbation theory the mentioned interaction does not show up. For examples, scattering on the Coulomb centre happens in the same way for both types of RWEs based on the minimal and the extended sets of the Lorentz group representations. In turn, a calculation of cross-sections of the typical second order process – the Compton light scattering on particles described by the RWEs with extended sets of representations – leads in all cases to matrix elements having the form

$$M_1 = M_0 + M^{\square}, \quad (1.79)$$

where M_0 is a matrix element corresponding to a particle described by an RWE with a minimal set of representations, and $M^{\square}$ is a correction caused by the presence of an internal electromagnetic structure in this particle. Explicit expressions for these corrections can be found in the above mentioned publications.

Thus, a simple extension of a set of used representations, which can also be realized by an inclusion of replicated irreducible components, allows us to reflect internal particles' structure by means of the conventional spatiotemporal description in terms of the RWE theory. Apparently, in the conceptual respect this approach is more advantageous as compared to the popular phenomenological approach, in which additional terms describing specific structural effects are introduced into the Lagrangian by hand.

2. Tensor RWEs of the Dirac type and geometrized description of internal degrees of freedom of fundamental particles

Since an existence of additional internal quantum numbers for fundamental particles is by now a firmly established fact, there arises a question whether it is possible to apply the RWE theory for describing degrees of freedom associated with internal and, in particular, gauge symmetries. The traditional gauge theories of fundamental particles and their interactions are based as a rule on the Dirac equation whose wavefunction is equipped by a free non-Lorentzian index playing the role of an internal variable. From the RWE theory point of view, such an approach actually means a usage of equations which are falling apart under the Lorentz group transformations. On this basis are constructed the renowned models of electroweak and strong interactions, and the Standard $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ $SU(3)$ Model.

However, this approach is not capable of solving a number of problems. In particular, it is not very effective in including the gravitational interaction into a general scheme. It is presently hoped that a solution of this problem lies in employing symmetry groups whose transformations would affect both spatiotemporal and internal variables on equal basis. In other words, it is a matter of an eventual geometrized introduction of internal degrees of freedom.

Let us briefly review the most known approaches in this direction:

- theories of the Kaluza – Klein type, which operate with the space-time of a dimension greater than four, additional dimensions being treated on equal footing with the four standard – observable – ones. A compactification of extra dimensions leads to a release of internal degrees of freedom retaining their geometrical character;
- supersymmetry-supergravitation, uniting particles with different spins and statistics into entire supermultiplets. One of the premises in this approach consists in the existence of a new mathematical structure – the supersymmetry transformations, which mix up together bosonic and fermionic fields.

In analogy with the Lorentz transformations which reveal the connection between the space and the time, the supersymmetry transformations unite the space-time and internal degrees of freedom of particles into the entire entity;

- string and superstring theories, which include the ideas of Kaluza and Klein, the supersymmetries, the gauge approach, and the general relativity.

It seems however feasible to formulate yet another approach of a geometrized description of internal degrees of freedom, which is based on the usage of an extended set of the Lorentz group representations (including multiple ones) in the framework of the RWE theory.

A natural possibility in this respect consists in using nondisintegrating – with respect to the full Lorentz group – equations whose wavefunction possesses transformation properties of a direct product of the Dirac bispinors, and whose matrices Γ_μ satisfy commutation relations of the Dirac matrices' algebra. In the following, we will call such RWEs Dirac-like RWEs, or RWEs of the Dirac type.

The most widely known RWE of the discussed type is the Dirac – Kähler (DK) equation, which represents itself the most general differential equation (or the system of equations) of the first order over the field of complex numbers for the full set of antisymmetric tensor fields in the Minkowski space.

On the other hand, in the appropriate basis (let us call it fermionic) a wavefunction of the DK equation possesses the Lorentz transformation properties of a direct product of the Dirac bispinor times the charge-conjugated bispinor. In the tensor formulation the DK equation can be represented by the system

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \psi_\mu + m\psi_0 &= 0, \\
 \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi_0 + m\psi_\mu &= 0, \\
 -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \widetilde{\psi}_\beta + m\psi_{[\mu\nu]} &= 0, \\
 \partial_\mu \psi_\mu + m\widetilde{\psi}_0 &= 0, \\
 \partial_\nu \widetilde{\psi}_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \widetilde{\psi}_0 + m\widetilde{\psi}_\mu &= 0, \\
 \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \psi_{[\alpha\beta]} + \partial_\mu \widetilde{\psi}_0 + m\widetilde{\psi}_\mu &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Here ψ_0 is a scalar, ψ_μ is a vector, $\psi_{[\mu\nu]}$ is a second-rank antisymmetric tensor, $\widetilde{\psi}_\mu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \psi_{[\nu\alpha\beta]}$ is a pseudovector, which is dual conjugated to the third-rank antisymmetric tensor $\psi_{[\nu\alpha\beta]}$, and $\widetilde{\psi}_0 = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$ is a pseudoscalar which is dual conjugated to the fourth-rank antisymmetric tensor $\psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$.

The system (2.1) is nondisintegrating in the sense of the full Lorentz group.

It can be written in the matrix-differential form, which is standard for the RWE theory, where the wavefunction Ψ is represented by the column vector with tensor-valued components

$$\Psi = (\psi_0, \widetilde{\psi}_0, \psi_\mu, \widetilde{\psi}_\mu, \psi_{[\mu\nu]})^T, \tag{2.2}$$

and the 16×16 matrices Γ_μ are expressed by

$$\begin{aligned}
 \Gamma_\mu &= \Gamma_\mu^{(+)} + \Gamma_\mu^{(-)}, \\
 \Gamma_\mu^{(+)} &= e^{\widetilde{0}\widetilde{\mu}} + e^{\widetilde{\mu}\widetilde{0}} + e^{\lambda[\lambda\mu]} + e^{[\lambda\mu]\lambda},
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\Gamma_\mu^{(-)} = e^{0\mu} + e^{\mu 0} + \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (e^{\tilde{\lambda}, [\alpha\beta]} + e^{[\alpha\beta], \tilde{\lambda}}).$$

Using the known rules of the generalized Kronecker symbols' multiplication, it is easy to check that the matrices Γ_μ (2.3) satisfy the Dirac matrices' algebra

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

For establishing the group of internal symmetry of the DK field one can conveniently pass from the tensor basis (2.2) to the fermionic one, in which the matrices Γ_μ and the matrix η of the Lorentz-invariant bilinear form read

$$\Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_4, \quad (2.5)$$

$$\eta = \gamma_4 \otimes \gamma_4. \quad (2.6)$$

We remind that by an internal symmetry transformation of the RWE we understand a linear transformation of the wavefunction

$$\Psi^{\boxplus}(x) = Q\Psi(x), \quad (2.7)$$

which does not touch spatiotemporal coordinates and which leaves invariant the equation and its Lagrangian. For this to happen, a matrix Q must satisfy the conditions

$$[\Gamma_\mu, Q]_- = 0, \quad (2.8)$$

$$Q^+ \eta Q = \eta. \quad (2.9)$$

Applying the conditions (2.8), (2.9) to the matrices Γ_μ and η leads us to a noncompact 15-parametric group $SU(2, 2)$, whose generators may serve the Hermitian matrices

$$\Gamma_\mu^{\boxplus}, \Gamma_5^{\boxplus}, i\Gamma_\mu^{\boxplus}\Gamma_5^{\boxplus}, i\Gamma_{[\mu}^{\boxplus}\Gamma_{\nu]}^{\boxplus} = \frac{i}{2} (\Gamma_\mu^{\boxplus}\Gamma_\nu^{\boxplus} - \Gamma_\nu^{\boxplus}\Gamma_\mu^{\boxplus}). \quad (2.10)$$

Here

$$\Gamma_5^{\boxplus} = \Gamma_1^{\boxplus}\Gamma_2^{\boxplus}\Gamma_3^{\boxplus}\Gamma_4^{\boxplus} \quad (2.11)$$

and

$$\Gamma_\mu^{\boxplus} = \Gamma_\mu^{(+)} - \Gamma_\mu^{(-)} \quad (2.12)$$

is the second set of 16×16 matrices, satisfying – like Γ_μ – the algebra of Dirac matrices and commuting with the matrices Γ_μ . In the fermionic basis these matrices have the form

$$\Gamma_\mu^{\boxplus} = \gamma_4 \otimes I_4. \quad (2.13)$$

A characteristic feature of the internal symmetry group of the DK equation is that its generators (2.10) do not commute with the Lorentz generators

$$J_{[\mu\nu]} = \frac{1}{4} (\Gamma_{[\mu}^{\boxplus}\Gamma_{\nu]}^{\boxplus} + \Gamma_{[\mu}^{\boxplus}\Gamma_{\nu]}^{\boxplus}) \quad (2.14)$$

from the representation of the wavefunction Ψ . Along with this, the group G corresponding to the full invariance algebra of the DK equation appears to be a semidirect product of the Lorentz group Λ and the group of the internal symmetry Q : $G = \Lambda \oslash Q$. On the other hand, the group can be represented as a direct product $G = \Lambda^{\boxplus} \otimes Q$, where $\Lambda^{\boxplus}$ is an overdefined Lorentz group with respect to which the wavefunction Ψ is no longer a collection of the tensor-valued components, but rather a collection of four Dirac fields with a usual internal symmetry (i. e. commuting with the Lorentz group transformations).

The above statements remain valid for all interactions, including gauge ones, which do not violate an internal symmetry of the free Lagrangian.

They assert that it is generally possible to apply the DK equation for a description of particles with spin $s = 1/2$ and internal degrees of freedom, which thus have a geometric origin (for details see, e. g., [15]).

The idea that the DK equation can be exploited as a geometric model for the generations of quarks (or leptons) was first put forward in the works [16; 17].

Let us now give a matrix formulation of the DK equation in the Gel'fand – Yaglom basis, which will be useful in the following.

We begin with the next set of irreducible representations of the proper Lorentz group

$$\begin{array}{c} 2(0, 0) \\ | \\ (0, 1) - 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1, 0), \end{array} \quad (2.15)$$

containing twofold components $(0, 0)$ and $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. The matrix Γ_4 of the corresponding RWE in the Gel'fand – Yaglom basis has the form $\Gamma_4 = \begin{pmatrix} C^0 & 0 \\ 0 & C^1 \otimes I_3 \end{pmatrix}$, where

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13}^0 & c_{14}^0 \\ 0 & 0 & c_{23}^0 & c_{24}^0 \\ c_{31}^0 & c_{32}^0 & 0 & 0 \\ c_{41}^0 & c_{42}^0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{35}^1 & c_{36}^1 \\ 0 & 0 & c_{45}^1 & c_{46}^1 \\ c_{53}^1 & c_{54}^1 & 0 & 0 \\ c_{63}^1 & c_{64}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

and the following labelling of the irreducible representations contained in (2.15) is adopted:

$$(0, 0) \sim 1, \quad (0, 0)^{\boxplus} \sim 2, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim 3, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\boxplus} \sim 4, \quad (0, 1) \sim 5, \quad (1, 0) \sim 6. \quad (2.17)$$

Here, like it was also the case earlier, the prime is used to distinguish between the multiple representations.

Let us first consider the spin block C^1 .

The conditions of the relativistic and P -invariance of the theory impose on elements c_{ij}^1 in general case the constraints

$$c_{35}^1 = \pm c_{36}^1, \quad c_{45}^1 = \pm c_{46}^1, \quad c_{53}^1 = \pm c_{63}^1, \quad c_{54}^1 = \pm c_{64}^1. \quad (2.18)$$

Here the choice of signs «+» or «-» depends on the definition of the spatial inversion operator. In the present context this means that the sign «+» («-») in (2.18) occurs for the true vectorial (pseudovectorial) character of the multiple representations $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

It turns out that one can construct a RWE satisfying all necessary physical requirements, if one chooses one of the representations $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ as true vectorial and the other as pseudovectorial (which is denoted in the following as $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\boxplus}$). Then the relations (2.18) acquire the forms

$$c_{35}^1 = c_{36}^1, \quad c_{45}^1 = -c_{46}^1, \quad c_{53}^1 = c_{63}^1, \quad c_{54}^1 = -c_{64}^1, \quad (2.19)$$

and for the block C^1 one gets an expression

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{35}^1 & c_{35}^1 \\ 0 & 0 & c_{45}^1 & -c_{45}^1 \\ c_{53}^1 & c_{54}^1 & 0 & 0 \\ c_{53}^1 & -c_{54}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Analogously, one of the representations $(0, 0)$ in (2.15) we choose as scalar and the other as pseudoscalar (also labelling it in the following with the prime).

And since in a P -invariant RWE a vector (pseudovector) representation cannot link with a pseudscalar (scalar) one, the following equalities should take place

$$c_{14}^0 = c_{23}^0 = c_{41}^0 = c_{33}^0 = 0. \quad (2.21)$$

With this in view, the block C^0 (2.18) is transformed to the form

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{24}^0 \\ c_{31}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{42}^0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

and the representations (2.15) build the linking scheme

$$\begin{array}{c} (0, 1) \\ \wedge \\ (0, 0)^{\boxplus} - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\boxplus} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (0, 0). \\ \vee \\ (1, 0) \end{array} \quad (2.23)$$

The blocks η^0, η^1 of the matrix of the bilinear invariant form η have in this case the form

$$\eta = \eta^0 \oplus (\eta^1 \otimes I_3),$$

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} \eta_{11}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{44}^0 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} \eta_{33}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{44}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{56}^1 \\ 0 & 0 & \eta_{65}^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

$$\eta_{33}^1 = -\eta_{33}^0, \quad \eta_{44}^1 = -\eta_{44}^0, \quad \eta_{65}^1 = \pm \eta_{56}^1. \quad (2.25)$$

$$c_{31}^0 = \frac{\eta_{33}^0}{\eta_{11}^0} (c_{13}^0)^*, \quad c_{42}^0 = \frac{\eta_{44}^0}{\eta_{22}^0} (c_{24}^0)^*, \quad c_{53}^1 = \frac{\eta_{56}^1}{\eta_{33}^1} (c_{35}^1)^*, \quad c_{54}^1 = \frac{\eta_{56}^1}{\eta_{44}^1} (c_{45}^1)^*. \quad (2.26)$$

Choosing now for the remaining free elements $c_{\tau\tau}^s$ and $\eta_{\tau\tau}^s$ the values equal, e. g., to

$$c_{13}^0 = c_{24}^0 = 1, \quad c_{35}^1 = c_{45}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2.27)$$

$$\eta_{11}^0 = -\eta_{22}^0 = \eta_{33}^0 = -\eta_{44}^0 = -\eta_{56}^1 = -\eta_{65}^1 = 1, \quad (2.28)$$

we obtain the RWE with the spin blocks of the matrices Γ_4 and η , being equal

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

The RWE constructed in this way with using the Gel'fand – Yaglom basis satisfies the conditions of invariance with respect to the full Lorentz group and of a possibility of its derivation from the invariant Lagrangian function. From the formal point of view, this RWE describes a microobject with nonzero mass and the spins 0, 1. The minimal equations for the spin blocks C^0 , C^1 and the whole matrix Γ_4 have the equal form

$$(C^0)^2 - 1 = 0, \quad (C^1)^2 - 1 = 0, \quad \Gamma_4^2 - 1 = 0, \quad (2.31)$$

from where it follows that the present RWE belongs to the Dirac type with the algebra (2.4). The presence of the multiple roots ± 1 in the blocks C^0 , C^1 implies the presence of an additional (besides spin) internal degree of freedom.

We note that the choice of elements (2.27) of the matrix Γ_4 is not unique as long as the derivation of a Dirac-like equation is concerned. In general, to satisfy the characteristic equations (2.31) it is sufficient to demand the condition

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

It is obvious that only by changing the signs of the numbers c_{13}^0 , c_{24}^0 , c_{35}^1 , c_{45}^1 one can define the spin C^0 , C^1 in 16 different ways. However, all these (and other possible) variants are related to each other by similarity transformations, and therefore all of them are physically equivalent.

Thus, on the basis of the linking scheme (2.23) one can construct the only (up to a similarity transformation) Dirac-like RWE, which is nondisintegrating in the sense of the full Lorentz group and admitting the Lagrangian formulation.

The above formulated algebraic and group-theoretical substantiation of the dynamical equivalence of the classical Dirac equation and the $SU(2, 2)$ -invariant Dirac theory is not yet sufficient for a geometrized description of internal degrees of freedom of the Dirac particles in terms of tensor fields. To consistently realize a possibility of such a description one has to demonstrate that this correspondence persists on the quantum level, which is equivalent to proving a possibility of quantization of the DK field in the Fermi – Dirac statistics.

It might seem that such an assumption contradicts to the famous Pauli's theorem about the relation between spin and statistics [17]. However, this is not quite true. Already in the papers [18; 19] it was shown on examples of the simplest equations for particles with integer and half-integer spins that by using an indefinite metric in the Hilbert space of states it is in principle possible to quantize fields by the anomalous statistics (half-integer spins by the Bose – Einstein statistics and integer spins by the Fermi – Dirac statistics). However, in doing so one obtains unremovable negative probabilities.

An essentially different situation arises in the case of field systems with additional degrees of freedom corresponding to noncompact internal symmetry groups. In such theories, there exist additional conservation laws (ban rules), forbidding transitions which are described by negative probabilities emerging in the quantization with an indefinite metric. Let us consider this question in more detail with regard to the DK equation [20; 21].

With the help of substitution.

$$\Psi(x) = \Psi(p) e^{i\rho_\mu x_\mu} \quad (2.33)$$

we proceed from the matrix form of the DK equation in the position representation to the momentum representation

$$(\hat{\rho} + m)\Psi(\rho) = 0, \quad (2.34)$$

where

$$\hat{\rho} = i\rho_\mu \Gamma_\mu \quad (2.35)$$

is an operator of the 4-momentum.

As it follows from (2.31), the spin blocks C^0 , C^1 contain the only – up to a sign – nonzero root ± 1 . A presence of the internal degree of freedom is expressed in this case in the twofold multiplicity of this nonzero root in the characteristic equations of these blocks. Thus, along with the usual 4-momentum operators (2.35), the spin square operator

$$\hat{S}^2 = -[J^{[12]}]^2 + [J^{[23]}]^2 + [J^{[31]}]^2 \quad (2.36)$$

and the spin projection operator

$$\hat{S}_n = -i\varepsilon_{ijk}n_j J^{[jk]}, \quad (2.37)$$

where $J^{[\mu\nu]} = \frac{1}{4}(\Gamma_{[\mu}\Gamma_{\nu]} + \Gamma_{[\mu}^\square\Gamma_{\nu]}^\square)$, we can assign to this degree of freedom (let us call it Π -parity for concreteness) an operator $\hat{\Pi}$, which commutes with the above quoted operators and forms together with them the full set of variables for the DK field. Additionally, we complement this assignment by the natural requirements of the diagonalizability of this operator and the real-valuedness of its eigenvalues, and – in analogy with the operators $\hat{S}^2$, $\hat{S}_n$ – by the property

$$\hat{\Pi}\eta = \eta\hat{\Pi}^+. \quad (2.38)$$

It is not difficult to see that the relativistically invariant definition of the Π -parity operator, obeying the formulated conditions, has the form

$$\hat{\Pi} = \frac{\rho_\mu \Gamma_\mu^\square}{im}; \quad (2.39)$$

and, in particular, in the rest frame

$$\hat{\Pi}_0 = \Gamma_4^\square. \quad (2.40)$$

The eigenvalues of $\hat{\Pi}$ we will denote by λ_i , $i = 1, 2$. (In the rest frame it holds $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$).

In the second quantization, the sign factors of the energy and the charge densities of a classical field system acquire an important role. The presence of the spin spectrum and the Π -parity infers that the signs of these quantities can depend not only on the mass sign (which is meant to be the sign of the matrix Γ_4 eigenvalues distinguishing between the positive and negative frequency solutions of the equation (2.34)), but also on the quantum numbers i and s .

In other words, both the energy and the charge in such theories appear to be, generally speaking, indefinite. This circumstance is conveniently reflected in the variable $g_{is}^{(\pm)}$, whose values, evaluated in the rest frame, specify the sign of the energy density in the state $\psi_{is}^{(\pm)}$. Computing $g_{is}^{(\pm)}$ for the DK equation yields [22]:

$$g_{1s}^{(+)} = g_{2s}^{(-)} = 1, \quad g_{1s}^{(-)} = g_{2s}^{(+)} = -1. \quad (2.41)$$

Now we can directly implement the quantization. Representing the operator wavefunctions Ψ , $\bar{\Psi}$ by the series

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_i \sum_s \left[a_{is}(p) \psi_{is}^{(+)}(p) e^{ipx} + b_{is}^+(p) \psi_{is}^{(-)}(p) e^{-ipx} \right] d^3p, \quad (2.42)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_i \sum_s \left[a_{is}^+(p) \bar{\psi}_{is}^{(+)}(p) e^{-ipx} + b_{is}(p) \bar{\psi}_{is}^{(-)}(p) e^{ipx} \right] d^3p, \quad (2.43)$$

we postulate the commutation relations for the annihilation and creation operators

$$[a_{is}(p), a_{i\bar{s}}^+(p)]_+ = g_{is}^{(+)} \delta_{i\bar{i}} \delta_{s\bar{s}} \delta(p - p), \quad (2.44)$$

$$[b_{is}(p), b_{i\bar{s}}^+(p)]_+ = -g_{is}^{(-)} \delta_{i\bar{i}} \delta_{s\bar{s}} \delta(p - p), \quad (2.45)$$

(no summation over the indices i and s here; all the other anticommutators identically vanish), which correspond to the quantization of the DK field in the Fermi – Dirac statistics.

The particle and antiparticle number operators leading to the correct eigenvalues are defined in the following way:

$$N_{is}^{(+)} = g_{is}^{(+)} a_{is}^+ a_{is}, \quad N_{is}^{(-)} = -g_{is}^{(-)} b_{is}^+ b_{is}. \quad (2.46)$$

Inserting the series (2.42), (2.43) into the expressions for the energy and the charge operators yields

$$E = \int \{(\partial_4 \bar{\Psi}) \Gamma_4 \Psi - \bar{\Psi} \Gamma_4 \partial_4 \Psi\} d^3x, \quad (2.47)$$

$$Q = e \int \bar{\Psi} \Gamma_4 \Psi d^3x. \quad (2.48)$$

Taking into account the relations (2.44) – (2.46) and the normalization by charge

$$\bar{\Psi} \Gamma_4 \Psi = \pm 1, \quad (2.49)$$

we obtain the final expressions for the operators E and Q

$$E = \sum_i \sum_s (N_{is}^{(+)} \varepsilon_{is}^{(+)} + N_{is}^{(-)} \varepsilon_{is}^{(-)}), \quad (2.50)$$

$$Q = e \sum_i \sum_s (N_{is}^{(+)} - N_{is}^{(-)}), \quad (2.51)$$

where $\varepsilon_{is}^{(\pm)} = |p_0|$, and the indices of $\varepsilon_{is}^{(\pm)}$ indicate the relation to the corresponding state.

The expressions (2.50), (2.51) mean that the anticommutation relations (2.44), (2.45) ensure a correct corpuscular picture of the field. Moreover, it is easy to check that they lead to causal commutation relations for the field operators [22].

Since the right-hand sides of some quantization conditions (2.44), (2.45) contain the «wrong» minus sign, the corresponding state vectors must have a negative valued norm. In other words, a quantum description of the DK field in the Fermi – Dirac statistics implies using the space of states H with the indefinite metrics

$$H = H_+ \oplus H_-, \quad (2.52)$$

where H_+ and H_- are the subspaces with positive and negative state vector norms, respectively. In the considered case the subspaces H_+ and H_- are spanned by the states

$$H_+: (\prod_{N_1} a_{1s}^+) (\prod_{N_2} b_{2s}^+) (\prod_{N_3} a_{2s}^+) (\prod_{N_4} b_{1s}^+) |0\rangle; \quad (2.53)$$

$$H_-: (\prod_{N_5} a_{1s}^+) (\prod_{N_6} b_{2s}^+) (\prod_{N_7} a_{2s}^+) (\prod_{N_8} b_{1s}^+) |0\rangle. \quad (2.54)$$

Here N_1, N_2, N_5 , and N_6 are arbitrary nonnegative integers, $(N_3 + N_4)$ is an even number, and $(N_7 + N_8)$ is an odd number. For single particle states the partitions (2.53), (2.54) acquire the form

$$H_+: \Psi_{1s}^{(+)}, \Psi_{1s}^{(-)}, \quad H_-: \Psi_{2s}^{(+)}, \Psi_{2s}^{(-)}, \quad (2.55)$$

$$H_+: \Psi_{1s}^{(+)}, \Psi_{2s}^{(-)}, \quad H_-: \Psi_{2s}^{(+)}, \Psi_{1s}^{(-)}. \quad (2.56)$$

Additionally, for a correct probabilistic interpretation of the theory it is necessary to ensure the absence of transitions between the states of H_+ and H_- by including interactions. Let us show that such transitions are indeed forbidden.

Consider the Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}(x)(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi(x) + \mathcal{L}_{int}, \quad (2.57)$$

where $\mathcal{L}_{int}$ is an interaction Lagrangian which does not violate an internal symmetry inherent to a free field. For instance, in the case of electromagnetic interaction it reads

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\Psi}\Gamma_\mu A_\mu \Psi + \bar{\Psi}F_{\mu\nu}\Gamma_{[\mu}\Gamma_{\nu]}\Psi. \quad (2.58)$$

It is evident that the operator $\hat{\Pi}$ (2.39) belongs to the transformations of the internal symmetry group of the (2.57), (2.58) (compare (2.39) with the generators (2.10) of this group). The invariance of the quoted Lagrangian under the transformations

$$\Psi \rightarrow e^{i\hat{\Pi}\theta}\Psi \quad (2.59)$$

leads to the conserved «charge»

$$G \sim \int \bar{\Psi}(x)\Gamma_4\hat{\Pi}\Psi(x) d^3x. \quad (2.60)$$

The charge G can be transformed to the form

$$G \sim \sum_i \sum_s \lambda_i (N_{is}^{(+)} - N_{is}^{(-)}) = \sum_s (N_{1s}^{(+)} - N_{2s}^{(+)} - N_{1s}^{(-)} + N_{2s}^{(-)}), \quad (2.61)$$

where it is accounted that $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. For the sake of convenience we also rewrite the formula (2.51) in the expanded form

$$Q \sim \sum_s (N_{1s}^{(+)} + N_{2s}^{(+)} - N_{1s}^{(-)} - N_{2s}^{(-)}). \quad (2.62)$$

Comparing the partitions (2.55), (2.56) with the expressions (2.61), (2.62), we draw the conclusion that to the single-particle states belonging to the subspaces H_+ and H_- correspond the following signs of the charges Q and G :

$$H_+: (1, 1), (-1, 1), \quad H_-: (1, -1), (-1, -1) \quad (2.63)$$

(the first number in the parenthesis corresponds to the electric charge Q , while the second number corresponds to the additional charge G).

From it follows (2.63) that a simultaneous fulfillment of the conservation laws for the charges Q and G leads to a prohibition of physically inappropriate transitions between states from the subspaces with the positive and the negative norms of state vectors.

We remark that if instead of the continuous transformations (2.59) we consider the discrete transformations

$$\Psi_+ \rightarrow \Psi_+, \quad \Psi_- \rightarrow -\Psi_-, \quad (2.64)$$

they will be reduced to these:

$$\begin{aligned} a_{1s}, a_{1s}^+ &\rightarrow a_{1s}, a_{1s}^+, & b_{1s}, b_{1s}^+ &\rightarrow b_{1s}, b_{1s}^+, \\ a_{2s}, a_{1s}^+ &\rightarrow -a_{2s}, -a_{2s}^+, & b_{2s}, b_{2s}^+ &\rightarrow -b_{2s}, -b_{2s}^+. \end{aligned} \quad (2.65)$$

In mathematical literature this operation bears the name of a canonical, or J -symmetry. It underpins the theory of linear operators in spaces with indefinite metrics, which are also called Hilbert spaces with J -metrics, or the Krein spaces. The J -symmetry corresponds to the superselection operator forbidding transitions from H_+ to H_- , which is in agreement with our result established above. Upon localizing the internal symmetry group, which has a spatio-temporal origin, and considering the corresponding gauge theory the discrete J -symmetry also helps to exclude transitions featuring negative probabilities.

Thus, the considered quantization procedure of the DK equation by the Fermi – Dirac statistics appears to be correct also from the point of view of a probabilistic interpretation of the

theory. This fact in combination with other algebraic and group-theoretical properties discussed above substantiates a possibility in principle to describe internal degrees of freedom of the Dirac particles in the geometrized approach.

Conclusion

Let us list once again in a concise form the presented results. On the basis of the use of extended sets of irreducible representations of the Lorentz group, it is given:

- semiphenomenological description of the internal structure of microobjects with lower spins;
- a description of the isospin degrees of freedom, in particular the chirality of massive microobjects, by means of the RWE that does not decay in the Lorentz group and which has internal symmetry of geometric origin;
- a joint description of massless fields with helicities as a single physical object, on this basis the possibility of a semiphenomenological description of the interaction of strings and membranes in Minkowski space is shown;
- matrix interpretation of the mechanism of mass generation of vector fields, which differs from the well-known Higgs mechanism and does not lead to the appearance of additional scalar or any other massive particles;
- matrix interpretation of massive gauge-invariant fields in the approach of the RWE theory;
- finally, a non-disintegrating RWE is described that describes a massively massless vector field with three types of massive and one massless quanta. This field may well be interpreted as an electroweak field. The need for the appearance of a scalar massive field is justified in a completely new way. It turns out that in the approach of the theory of RWE, the indicated vector field can exist only in a «bundle» with a massive scalar field, forming together with it a single unified physical object. Otherwise, the free massive and massless vector fields appear as independent ones, i. e. are unconnected in a relativistically invariant sense by equations.

The novelty and the possibility of applying the results obtained are as follows. Global unitary symmetries, which are used in modern gauge models of fundamental particles and their interactions, are based on non-geometric origin. In other words, in these models the simplest Dirac equation is taken as the initial one, the free function of which is «hung» by the free non-Lorentz index. Thus, the relationship between the properties of space-time and the material world is manifested only after the localization of these symmetries. Our proposal is to rely on internal symmetries in local-calibration models, which already in the original global version have a geometric origin, i.e. are inherent in equations that do not decay over the full Lorentz group. The Dirac – Kähler equation and its algebraic generalizations considered in our paper can serve as a possible candidate for the role of such RWE.

This approach, in our opinion, provides a closer relationship between space-time and the material world. In addition, the expansion of the class of basic RWE should lead to new physical effects and, possibly, eliminate some of the difficulties that occur in the Standard Model and the theory of superstrings.

REFERENCES

1. Gelfand, I. M. General relativistically invariant equations and infinite – dimensional representations of the Lorentz group / I. M. Gelfand, A. M. Yaglom // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1948. – Vol. 18, nr 8. – P. 703–733.
2. Pletyukhov, V. A. Relativistic wave equations and internal degrees of freedom / V. A. Pletyukhov, V. M. Red'kov, V. I. Strazhev. – Minsk : Belarus. Science, 2015. – 328 p.
3. Kähler, E. Der innere Differentialkalkül / E. Kähler // Rendiconti di math. (Roma).

Sers. – 1962. – Vol. 21, nr 3, 4. – P. 425–523.

4. Petras, M. A. Note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin $3/2$ / M. A. Petras // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, nr 3. – P. 418–419.

5. Formanek, J. On the Ulehla – Petras wave equation / J. Formanek // Czech. J. Phys. – 1961. – Vol. B11, nr 8. – P. 545–553.

6. Fradkin, E. E. Relativistic wave equations with extended set of the Lorentz group representations / E. E. Fradkin, S. V. Izmailov // Fedorov Doclady AN SSSR (USSR). – 1957. – Nr 114. – P. 277–280.

7. Pletyukhov, V. A. Wave equation with extended set of representations for a particle with spin 0 / V. A. Pletyukhov, F. I. Fedorov // Vesty AN BSSR. Ser. fiz.-mat. Sciences. – 1970. – Nr 2. – P. 79–85.

8. Pletyukhov, V. A. Wave equation with extended set of representations for a particle with spin 1 / V. A. Pletyukhov, F. I. Fedorov // Vesty AN BSSR. Ser. fiz.-mat. Sciences. – 1970. – Nr 3. – P. 84–92.

9. Capri, A. Z. First order wave equations for half-odd integral spin / A. Z. Capri // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 178, nr 5. – P. 2427–2433.

10. Cox, W. First order formulation of massive spin-2 field theory / W. Cox // J. Phys. A. – 1982. – Vol. 15, nr 1. – P. 253–268.

11. Cox, W. Higher-rank representations for zero-spin field theories / W. Cox // J. Phys. A. – 1982. – Vol. 15. – P. 627–635.

12. Ulegla, I. Anomalous equations for the particles with spin $1/2$ / I. Ulegla // JETP. – 1957. – Vol. 33. – P. 473–477.

13. Capri, A. Z. First order wave equations for multimass fermions / A. Z. Capri // Nuovo Cim. B. – 1969. – Vol. 64, nr 1. – P. 151–158.

14. Pletyukhov, V. A. About connections between the different formulations of the particle's theory with spin $3/2$ / V. A. Pletyukhov, V. I. Strazhev // Vesty AN BSSR. Ser. fiz.-mat. Sciences. – 1985. – № 5. – P. 90–95.

15. Strazhev, V. I. The Dirac – Kähler Equation. Classic field / V. I. Strazhev, I. A. Satikov, V. A. Tsionenko. – Minsk : BSU, 2007. – 195 p.

16. Banks, T. Geometric fermions / T. Banks, Y. Dohtan, D. Horn // Phys. Lett. B. – 1982. – Vol. 117, nr 6. – P. 413–417.

17. Benn, I. M. A generalization model, based on Kahler fermions / I. M. Benn, R. W. Tucker // Phys. Lett. B. – 1982. – Vol. 119, nr 4. – P. 348–350.

18. Dirac, P. A. M. The physical interpretation of quantum mechanics / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. A. – 1942. – Vol. 180. – P. 1–40.

19. Pauli, W. On Dirac's new method of field quantization / W. Pauli // Rev. Mod. Phys. – 1943. – Vol. 15. – P. 175–207.

20. Satikov, I. A. On the quantum description of the Dirac – Kähler field / I. A. Satikov, V. I. Strazhev // TMF. – 1987. – Vol. 73, nr 1. – P. 16–25.

21. Berezin, A. V. The Dirac – Kähler equation and the quantum theory of the Dirac field with $SU(2,2)$ - internal symmetry / A. V. Berezin, I. A. Satikov, V. I. Strazhev. – Minsk, 1998. – 35 p. – (Preprint / IF AN BSSR No 528).

22. Pletyukhov, V. A. On the relationship between spin and statistics in field theory / V. A. Pletyukhov, V. I. Strazhev // Acta Phys. Pol. B. – 1988. – Vol. 19, nr 9. – P. 751–762.

УДК 539.12

Alina Ivashkevich¹, Viktor Red'kov²¹Junior Researcher of the Center for Fundamental Interactions and Astrophysics of the B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,

Chief Researcher of the Center for Fundamental Interactions and Astrophysics of the B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus

Алина Валентиновна Ивашкевич¹, Виктор Михайлович Редьков²¹мл. науч. сотрудник центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси²д-р физ.-мат. наук, проф.,

гл. науч. сотрудник центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

e-mail: ¹ivashkevich.alina@yandex.by; ²v.redkov@ifanbel.bas-net.by**DIRAC – KÄHLER PARTICLE IN THE EXTERNAL MAGNETIC FIELD, CYLINDRICAL TETRAD AND FEDOROV – GRONSKIY METHOD**

16-component system of equations for the Dirac – Kähler particle in the presence of the external uniform magnetic field has been studied. This equation describes a multi-spin boson field equivalent to the scalar, pseudoscalar, vector, pseudovector, and antisymmetric tensor. On the searched solutions, we diagonalize operators of the energy, the third projection of the total angular momentum, and the third projection of the linear momentum. After separating the variables, we derive the system of sixteen first order differential equations in polar coordinate. To resolve this system, we apply the method by Fedorov – Gronskiy based on projective operators constructed from generator j^{12} for the 2-rank bispinor. According to this approach, we decompose the complete wave function into three 16-dimensional projective constituents, each expressed through only one corresponding function of the polar coordinate. There are imposed additional differential constraints which permit us to transform all equations to algebraic form. Three basic variables are constructed in terms of the confluent hypergeometric functions, at this a quantization rule arises due to the presence of the external magnetic field. The 16-dimensional structure of solutions is determined by the linear algebraic system of equations. We have found five linearly independent solutions.

Key words: Dirac – Kähler particle, external magnetic field, cylindrical symmetry, tetrad formalism, projective operators, exact solutions.

Частица Дирака – Кэлера во внешнем магнитном поле, цилиндрическая тетрада и метод Федорова – Гронского

Исследуется 16-компонентная система уравнений для частицы Дирака – Кэлера в присутствии внешнего однородного магнитного поля. Эти уравнения описывают мультиспиновое бозонное поле, эквивалентное скаляру, псевдоскалярному вектору, псевдовектору и антисимметричному тензору. На строящихся решениях диагонализуются операторы энергии, третьей проекции полного углового момента и третьей проекции импульса. После разделения переменных выведена система из 16 дифференциальных уравнений первого порядка по полярной координате. Чтобы решить эту систему, используем метод Федорова – Гронского, который основан на применении проективных операторов, строящихся из генератора j^{12} для Биспинора 2-го ранга. Согласно этому методу, полная волновая функция раскладывается в сумму трех 16-компонентных проективных составляющих, каждая из которых выражается только через одну соответствующую функцию от полярной координаты. Накладываются дополнительные дифференциальные ограничения, которые позволяют преобразовать все уравнения к алгебраическому виду. Три основные переменные найдены в терминах вырожденных гипергеометрических функций, при этом возникает правило квантования для основного спектрального параметра, обусловленное присутствием магнитного поля. 16-мерная структура решений определяется из анализа возникающей системы алгебраических уравнений. Найдены 5 линейно независимых решений с соответствующим спектром энергии частиц.

Ключевые слова: Частица Дирака – Кэлера, внешнее магнитное поле, цилиндрическая симметрия, тетрадный формализм, проективные операторы, точные решения.

Introduction

As the Dirac equation was proposed [1], there appeared papers in which they tried to reproduce Dirac's results within the tensor representations of the Lorentz group [2; 3]. Later, an equivalent approach within the other mathematical techniques was proposed by Kähler [4].

Scientific literature concerned with this field is enormous – see the review and references in [5–7]; also see [8–23].

Three most interesting points for this field are: in flat Minkowski space there exist tensor and spinor formulations of the theory; in the initial tensor form there are presented tensors with different intrinsic parities; there exist different views about physical interpretation of the object: whether it is a composite boson or a set of four fermions.

In this paper we will examine the problem of this particle in external uniform magnetic field. In Section 1, we specify the main equation in cylindrical coordinates and corresponding diagonal tetrad, and then separate the variables. As a result, we derive the system of 16 first order differential equations in the polar coordinate. To resolve this system we apply the method by Fedorov – Groskiy [24], the last is based on the use of projective operators constructed with the use of generator J^{12} for the wave function with the properties of 2nd rank bispinor under the Lorentz group. Correspondingly, we present the complete wave function as the sum of three projective constituents, each of dimension 16.

According the general method [24], each projective constituent is determined through one corresponding function of the polar coordinate, $F_1(r), F_2(r), F_3(r)$. Besides, special differential constraints consistent with the all 16 equations are introduced, they permit to transform these equations to algebraic form. In section 2, we study the introduced differential constraints for basic functions $F_1(r), F_2(r), F_3(r)$. They lead to 2nd order equations for all three functions, solutions for them may be found in terms of the confluent hypergeometric functions. In usual way, we derive the quantization rule for some spectral parameter, which later will be related with the possible energy values of the particle. In section 3, we study the 16-dimensional matrix structure of possible solutions, which are determined by the linear homogeneous algebraic system of equations. In this way, we find five linearly independent solutions for the Dirac–Kähler particle in the magnetic field.

1. Separating the variables

In Minkowski space and Cartesian coordinates, the Dirac – Kähler equation may be presented as spinor equation for a 2-rank bispinor [7]:

$$[i \gamma^a \partial_a - m] U(x) = 0, \quad (1)$$

or alternatively as the set of tensor equations for scalar, pseudoscalar, vector, pseudovector, and antisymmetric tensor [7]:

$$\begin{aligned} \partial_l \Psi + m \Psi_l &= 0, & \partial_l \tilde{\Psi} + m \tilde{\Psi}_l &= 0, \\ \partial_l \Psi + \partial_a \Psi_{la} - m \Psi_l &= 0, \\ \partial_l \tilde{\Psi} - \frac{1}{2} \varepsilon_l^{amn} \partial_a \Psi_{mn} - m \tilde{\Psi}_l &= 0, \\ \partial_m \Psi_n - \partial_n \Psi_m + \varepsilon_{mn}^{ab} \partial_a \tilde{\Psi}_b - m \Psi_{mn} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

These two descriptions are related in the following way: let 2-nd rank bispinor be parameterized as [7]

$$U(x) = \left[-i\Psi + \gamma^l \Psi_l + i\sigma^{mn} \Psi_{mn} + \gamma^5 \tilde{\Psi} + i\gamma^l \gamma^5 \tilde{\Psi}_l \right] E^{-1}. \quad (3)$$

The quantity E is a bispinor metrical matrix with the following properties

$$E = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon}^{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

$$E^2 = -I, \quad \tilde{E} = -E, \quad Sp E = 0, \quad \tilde{\sigma}^{ab} E = -E \sigma^{ab};$$

the inverse transformation to (3) reads

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= -\frac{1}{4i} Sp [EU(x)], & \tilde{\Psi}(x) &= \frac{1}{4} Sp [E\gamma^5 U(x)], \\ \Psi_l(x) &= \frac{1}{4} Sp [E\gamma_l U(x)], & \tilde{\Psi}_l(x) &= \frac{1}{4i} Sp [E\gamma^5 \gamma_l U(x)], \\ \Psi_{mn}(x) &= -\frac{1}{2i} Sp [E\sigma_{mn} U(x)]. \end{aligned} \quad (5)$$

In cylindrical coordinates and tetrad

$$x^\alpha = (t, r, \phi, z), \quad dS^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2,$$

the Dirac – Kähler equation [7]

$$[i\gamma^\alpha(x)(D_\alpha + \Gamma_\alpha \otimes I + I \otimes \Gamma_\alpha(x) - M)U(x) = 0, \quad D_\alpha = \partial_\alpha + ieA_\alpha, \quad (6)$$

in presence of the external uniform magnetic field $A_\phi = -\frac{Br^2}{2}$ (let $U(x) = V(x)/\sqrt{r}$ and $Be \rightarrow B$) takes the form

$$[i\gamma^0 \partial_t + i\gamma^1 \partial_r + \frac{1}{r} \gamma^2 \otimes \sigma^{12} + \frac{\gamma^2}{r} (i\partial_\phi + \frac{Br^2}{2}) + i\gamma^3 \partial_z - M]V(x) = 0. \quad (7)$$

We will search for solutions in the form

$$V(t, r, \phi, z) = e^{-iet} e^{im\phi} e^{ikz} F(r), \quad F(r) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix}, \quad (8)$$

then the equation reads

$$[\varepsilon\gamma^0 + i\gamma^1 \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \gamma^2 \otimes \sigma^{12} + \frac{\gamma^2}{r} (-m + \frac{eBr^2}{2}) - k\gamma^3 - M]F(r) = 0. \quad (9)$$

Recall expressions for Dirac matrices in spinor basis

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\gamma^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma^{12} = \tilde{\sigma}^{12} = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{vmatrix}.$$

Below we will apply the method by Fedorov – Gronskiy [24].

To this end, we present the complete wave function as the 16-dimensional column

$$F = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{vmatrix}, \quad F_1 = \begin{vmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{41} \end{vmatrix}, F_2 = \begin{vmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{42} \end{vmatrix}, F_3 = \begin{vmatrix} f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \\ f_{43} \end{vmatrix}, F_4 = \begin{vmatrix} f_{14} \\ f_{24} \\ f_{34} \\ f_{44} \end{vmatrix}.$$

Correspondingly we should present the third projection of the spin $Y = S_3$ in 16-dimensional form

$$Y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad (10)$$

Let us note the eigenvalues of the matrix Y :

$$\det(Y - \lambda I_{16 \times 16}) = \lambda^8 (\lambda^2 - 1)^4 = 0 \Rightarrow \quad (11)$$

$$\lambda = -1 \quad \text{multiplicity } 4; \quad \lambda = +1 \quad \text{multiplicity } 4; \quad \lambda = 0 \quad \text{multiplicity } 8.$$

We readily verify that the minimal equation for this matrix has the form $Y^3 - Y = 0$; correspondingly, we may introduce three projective operators

$$P_1 = \frac{1}{2}Y(Y+1), \quad P_2 = \frac{1}{2}Y(Y-1), \quad P_3 = 1 - Y^2,$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1, \quad P_1^2 = P_1, \quad P_2^2 = P_2, \quad P_3^2 = P_3;$$

explicit form of them is

[illegible]

[illegible]

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Therefore, three projective constituents are defined by the formulas (according to Fedorov – Gronskiy method [24], each projective constituent should be determined through one function):

$$\Psi_1(r) = \begin{pmatrix} f_{11} \\ 0 \\ (f_{13} + f_{31})/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (f_{42} - f_{24})/2 \\ (f_{13} + f_{31})/2 \\ 0 \\ f_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(f_{42} - f_{24})/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} F_1(r), \quad \Psi_2(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(f_{13} - f_{31})/2 \\ 0 \\ 0 \\ f_{22} \\ 0 \\ (f_{42} + f_{24})/2 \\ (f_{13} - f_{31})/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (f_{42} + f_{24})/2 \\ 0 \\ f_{44} \end{pmatrix} F_2(r), \quad \Psi_3(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{21} \\ 0 \\ f_{41} \\ f_{12} \\ 0 \\ f_{32} \\ 0 \\ 0 \\ f_{23} \\ 0 \\ f_{43} \\ f_{14} \\ 0 \\ f_{34} \\ 0 \end{pmatrix} F_3(r). \quad (12)$$

It is convenient to introduce the following notations

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_{13} + f_{31}) &= A, \quad \frac{1}{2}(f_{13} - f_{31}) = B, \quad \frac{1}{2}(f_{42} - f_{24}) = C, \quad \frac{1}{2}(f_{42} + f_{24}) = D, \\ f_{13} &= A + B, \quad f_{31} = A - B, \quad f_{42} = D + C, \quad f_{24} = D - C, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Psi_1(r) = \begin{pmatrix} f_{11} \\ 0 \\ A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C \\ A \\ 0 \\ f_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} F_1(r), \quad \Psi_2(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B \\ 0 \\ 0 \\ f_{22} \\ 0 \\ 0 \\ D \\ B \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D \\ 0 \\ f_{44} \end{pmatrix} F_2(r), \quad \Psi_3(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{21} \\ 0 \\ f_{41} \\ f_{12} \\ 0 \\ f_{32} \\ 0 \\ 0 \\ f_{23} \\ 0 \\ f_{43} \\ f_{14} \\ 0 \\ f_{34} \\ 0 \end{pmatrix} F_3(r).$$

Now we turn to the system of equations after separating the variables (let $\mu = m - \frac{Br^2}{2}$):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dr} + \frac{\mu-1/2}{r}\right)f_{41} - iMf_{11} - i\varepsilon f_{31} + ikf_{31} &= 0, \quad \left(\frac{d}{dr} + \frac{\mu+1/2}{r}\right)f_{42} - iMf_{12} - i\varepsilon f_{32} + ikf_{32} = 0, \\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{\mu-1/2}{r}\right)f_{43} - iMf_{13} - i\varepsilon f_{33} + ikf_{33} &= 0, \quad \left(\frac{d}{dr} + \frac{\mu+1/2}{r}\right)f_{44} - iMf_{14} - i\varepsilon f_{34} + ikf_{34} = 0, \\ \left(\frac{d}{dr} - \frac{\mu-1/2}{r}\right)f_{31} - iMf_{21} - i\varepsilon f_{41} - ikf_{41} &= 0, \quad \left(\frac{d}{dr} - \frac{\mu+1/2}{r}\right)f_{32} - iMf_{22} - i\varepsilon f_{42} - ikf_{42} = 0, \\ \left(\frac{d}{dr} - \frac{\mu-1/2}{r}\right)f_{33} - iMf_{23} - i\varepsilon f_{43} - ikf_{43} &= 0, \quad \left(\frac{d}{dr} - \frac{\mu+1/2}{r}\right)f_{34} - iMf_{24} - i\varepsilon f_{44} - ikf_{44} = 0, \\ -\left(\frac{d}{dr} + \frac{\mu-1/2}{r}\right)f_{21} - iMf_{31} - i\varepsilon f_{11} - ikf_{11} &= 0, \quad -\left(\frac{d}{dr} + \frac{\mu+1/2}{r}\right)f_{22} - iMf_{32} - i\varepsilon f_{12} - ikf_{12} = 0, \\ -\left(\frac{d}{dr} + \frac{\mu-1/2}{r}\right)f_{23} - iMf_{33} - i\varepsilon f_{13} - ikf_{13} &= 0, \quad -\left(\frac{d}{dr} + \frac{\mu+1/2}{r}\right)f_{24} - iMf_{34} - i\varepsilon f_{14} - ikf_{14} = 0, \\ -\left(\frac{d}{dr} - \frac{\mu-1/2}{r}\right)f_{11} - iMf_{41} - i\varepsilon f_{21} + ikf_{21} &= 0, \quad -\left(\frac{d}{dr} - \frac{\mu+1/2}{r}\right)f_{12} - iMf_{42} - i\varepsilon f_{22} + ikf_{22} = 0, \\ -\left(\frac{d}{dr} - \frac{\mu-1/2}{r}\right)f_{13} - iMf_{43} - i\varepsilon f_{23} + ikf_{23} &= 0, \quad -\left(\frac{d}{dr} - \frac{\mu+1/2}{r}\right)f_{14} - iMf_{44} - i\varepsilon f_{24} + ikf_{24} = 0. \end{aligned}$$

With the shortening notations

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} + \frac{\mu+1/2}{r} &= a_{\mu+1/2}, & \frac{d}{dr} + \frac{\mu-1/2}{r} &= a_{\mu-1/2}, \\ \frac{d}{dr} - \frac{\mu+1/2}{r} &= b_{\mu+1/2}, & \frac{d}{dr} - \frac{\mu-1/2}{r} &= b_{\mu-1/2}, \end{aligned} \quad (14)$$

the above equations read

$$\begin{aligned} a_{\mu-1/2} f_{41} - iMf_{11} + (-i\varepsilon + ik) f_{31} &= 0, & a_{\mu+1/2} f_{42} - iMf_{12} + (-i\varepsilon + ik) f_{32} &= 0, \\ a_{\mu-1/2} f_{43} - iMf_{13} + (-i\varepsilon + ik) f_{33} &= 0, & a_{\mu+1/2} f_{44} - iMf_{14} + (-i\varepsilon + ik) f_{34} &= 0, \\ b_{\mu-1/2} f_{31} - iMf_{21} + (-i\varepsilon - ik) f_{41} &= 0, & b_{\mu+1/2} f_{32} - iMf_{22} + (-i\varepsilon - ik) f_{42} &= 0, \\ b_{\mu-1/2} f_{33} - iMf_{23} + (-i\varepsilon - ik) f_{43} &= 0, & b_{\mu+1/2} f_{34} - iMf_{24} + (-i\varepsilon - ik) f_{44} &= 0, \\ -a_{\mu-1/2} f_{21} - iMf_{31} + (-i\varepsilon - ik) f_{11} &= 0, & -a_{\mu+1/2} f_{22} - iMf_{32} + (-i\varepsilon - ik) f_{12} &= 0, \\ -a_{\mu-1/2} f_{23} - iMf_{33} + (-i\varepsilon - ik) f_{13} &= 0, & -a_{\mu+1/2} f_{24} - iMf_{34} + (-i\varepsilon - ik) f_{14} &= 0, \\ -b_{\mu-1/2} f_{11} - iMf_{41} + (-i\varepsilon + ik) f_{21} &= 0, & -b_{\mu+1/2} f_{12} - iMf_{42} + (-i\varepsilon + ik) f_{22} &= 0, \\ -b_{\mu-1/2} f_{13} - iMf_{43} + (-i\varepsilon + ik) f_{23} &= 0, & -b_{\mu+1/2} f_{14} - iMf_{44} + (-i\varepsilon + ik) f_{24} &= 0. \end{aligned}$$

Let us transform these equations to other variables

$$f_{13} = (A+B), \quad f_{31} = (A-B), \quad f_{42} = (D+C), \quad f_{24} = (D-C); \quad (15)$$

then we get

$$\begin{aligned} 1 \quad & a_{\mu-1/2} f_{41} - iMf_{11} + (-i\varepsilon + ik)(A-B) = 0, \\ 2 \quad & a_{\mu+1/2} (D+C) - iMf_{12} + (-i\varepsilon + ik) f_{32} = 0, \\ 3 \quad & a_{\mu-1/2} f_{43} - iM(A+B) + (-i\varepsilon + ik) f_{33} = 0, \\ 4 \quad & a_{\mu+1/2} f_{44} - iMf_{14} + (-i\varepsilon + ik) f_{34} = 0, \\ 5 \quad & b_{\mu-1/2} (A-B) - iMf_{21} + (-i\varepsilon - ik) f_{41} = 0, \\ 6 \quad & b_{\mu+1/2} f_{32} - iMf_{22} + (-i\varepsilon - ik)(D+C) = 0, \\ 7 \quad & b_{\mu-1/2} f_{33} - iMf_{23} + (-i\varepsilon - ik) f_{43} = 0, \\ 8 \quad & b_{\mu+1/2} f_{34} - iM(D-C) + (-i\varepsilon - ik) f_{44} = 0, \\ 9 \quad & -a_{\mu-1/2} f_{21} - iM(A-B) + (-i\varepsilon - ik) f_{11} = 0, \\ 10 \quad & -a_{\mu+1/2} f_{22} - iMf_{32} + (-i\varepsilon - ik) f_{12} = 0, \\ 11 \quad & -a_{\mu-1/2} f_{23} - iMf_{33} + (-i\varepsilon - ik)(A+B) = 0, \\ 12 \quad & -a_{\mu+1/2} (D-C) - iMf_{34} + (-i\varepsilon - ik) f_{14} = 0, \\ 13 \quad & -b_{\mu-1/2} f_{11} - iMf_{41} + (-i\varepsilon + ik) f_{21} = 0, \\ 14 \quad & -b_{\mu+1/2} f_{12} - iM(D+C) + (-i\varepsilon + ik) f_{22} = 0, \\ 15 \quad & -b_{\mu-1/2} (A+B) - iMf_{43} + (-i\varepsilon + ik) f_{23} = 0, \\ 16 \quad & -b_{\mu+1/2} f_{14} - iMf_{44} + (-i\varepsilon + ik)(D-C) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

It is convenient to apply (temporally) the shortening notations

$$a_{\mu-1/2} = a_1, \quad a_{\mu+1/2} = a_2, \quad b_{\mu-1/2} = b_1, \quad b_{\mu+1/2} = b_2;$$

further we derive

2)+12)

$$a_2(D+C) - iMf_{12} + i(-\varepsilon+k)f_{32} - a_2(D-C) - iMf_{34} + i(-\varepsilon-k)f_{14} = 0,$$

2)-12)

$$a_2(D+C) - iMf_{12} + i(-\varepsilon+k)f_{32} + a_2(D-C) + iMf_{34} - i(-\varepsilon-k)f_{14} = 0;$$

3)+9)

$$a_1f_{43} + i(-\varepsilon+k)f_{33} - a_1f_{21} + i(-\varepsilon-k)f_{11} - iM(A+B) - iM(A-B) = 0,$$

3)-9)

$$a_1f_{43} + i(-\varepsilon+k)f_{33} + a_1f_{21} - i(-\varepsilon-k)f_{11} - iM(A+B) + iM(A-B) = 0;$$

5)+15)

$$b_1(A-B) - iMf_{21} + i(-\varepsilon-k)f_{41} - b_1(A+B) - iMf_{43} + i(-\varepsilon+k)f_{23} = 0,$$

5)-15)

$$b_1(A-B) - iMf_{21} + i(-\varepsilon-k)f_{41} + b_1(A+B) + iMf_{43} - i(-\varepsilon+k)f_{23} = 0;$$

8)+14)

$$b_2f_{34} + i(-\varepsilon-k)f_{44} - b_2f_{12} + i(-\varepsilon+k)f_{22} - iM(D-C) - iM(D+C) = 0,$$

8)-14)

$$b_2f_{34} + i(-\varepsilon-k)f_{44} + b_2f_{12} - i(-\varepsilon+k)f_{22} - iM(D-C) + iM(D+C) = 0;$$

equations 1) and 11)

$$1) \quad a_1f_{41} + i(-\varepsilon+k)(A-B) - iMf_{11} = 0,$$

$$11) \quad -a_1f_{23} + i(-\varepsilon-k)(A+B) - iMf_{33} = 0,$$

give

$$A = \frac{ia_1(f_{23}(k+\varepsilon) + f_{41}(k-\varepsilon)) + f_{11}M(k-\varepsilon) - f_{33}M(k+\varepsilon)}{2(k^2 - \varepsilon^2)},$$

$$B = \frac{ia_1(f_{23}(k+\varepsilon) + f_{41}(\varepsilon-k)) + f_{11}M(\varepsilon-k) - f_{33}M(k+\varepsilon)}{2(k-\varepsilon)(k+\varepsilon)};$$

equations 6) and 16)

$$6) \quad b_2f_{32} + i(-\varepsilon-k)(D+C) - iMf_{22} = 0,$$

$$16) \quad -b_2f_{14} + i(-\varepsilon+k)(D-C) - iMf_{44} = 0,$$

give

$$C = \frac{-M(f_{22}(k+\varepsilon) + f_{44}(k-\varepsilon)) + ib_2(f_{14}(k-\varepsilon) - f_{32}(k+\varepsilon))}{2(k^2 - \varepsilon^2)},$$

$$D = -\frac{ib_2(f_{14}(k-\varepsilon) + f_{32}(k+\varepsilon)) + f_{22}M(k+\varepsilon) + f_{44}M(\varepsilon-k)}{2(k-\varepsilon)(k+\varepsilon)};$$

the remaining equations preserve their form

$$\begin{aligned} 4) \quad & a_2 f_{44} + i(-\varepsilon+k) f_{34} - iMf_{14} = 0, \\ 7) \quad & b_1 f_{33} + i(-\varepsilon-k) f_{43} - iMf_{23} = 0, \\ 10 \quad & -a_2 f_{22} + i(-\varepsilon-k) f_{12} - iMf_{32} = 0, \\ 13) \quad & -b_1 f_{11} + i(-\varepsilon+k) f_{21} - iMf_{41} = 0. \end{aligned}$$

Recall dependence of 16variables on the three basic functions

$$\begin{aligned} \Psi_1, f_{11}, f_{33}, A, C \Rightarrow F_1; \quad \Psi_2, f_{22}, f_{44}, B, D \Rightarrow F_2; \\ \Psi_3, f_{12}, f_{21}, f_{14}, f_{41}, f_{23}, f_{32}, f_{34}, f_{43} \Rightarrow F_3. \end{aligned} \quad (17)$$

convenient to collect equations in three groups (follow the variables at the mass parameter M):

I

$$\begin{aligned} -ia_{\mu-1/2} f_{23} F_3(k+\varepsilon) - ia_{\mu-1/2} f_{41} F_3(k-\varepsilon) + 2AF_1(k^2 - \varepsilon^2) + f_{11} F_1 M(\varepsilon-k) + f_{33} F_1 M(k+\varepsilon) = 0, \quad a_{\mu-1/2} F_3 = C_1 F_1, \\ -ia_{\mu-1/2} f_{23} F_3(k+\varepsilon) + ia_{\mu-1/2} f_{41} F_3(k-\varepsilon) + 2BF_2(k-\varepsilon)(k+\varepsilon) + f_{11} F_1 M(k-\varepsilon) + f_{33} F_1 M(k+\varepsilon) = 0; \quad B = 0, \\ -a_{\mu-1/2} f_{21} F_3 + a_{\mu-1/2} f_{43} F_3 - 2iAF_1 M - if_{11} F_1(k-\varepsilon) + if_{33} F_1(k+\varepsilon) = 0, \\ b_{\mu+1/2} f_{12} F_3 + b_{\mu+1/2} f_{34} F_3 - if_{22} F_2(k+\varepsilon) + if_{44} F_2(\varepsilon-k) + 2iF_1 C M = 0, \quad C = 0, \quad b_{\mu+1/2} F_3 = C_2 F_2, \end{aligned}$$

II

$$\begin{aligned} a_{\mu-1/2} f_{21} F_3 + a_{\mu-1/2} f_{43} F_3 - 2iBF_2 M + if_{11} F_1(k-\varepsilon) + if_{33} F_1(k+\varepsilon) = 0, \quad B = 0, \\ -ib_{\mu+1/2} f_{14} F_3(k-\varepsilon) + ib_{\mu+1/2} f_{32} F_3(k+\varepsilon) + f_{22} F_2 M(k+\varepsilon) + f_{44} F_2 M(k-\varepsilon) + 2F_1 C(k^2 - \varepsilon^2) = 0, \quad C = 0, \\ -b_{\mu+1/2} f_{12} F_3 + b_{\mu+1/2} f_{34} F_3 + if_{22} F_2(k+\varepsilon) + if_{44} F_2(\varepsilon-k) - 2iF_2 M D = 0, \\ -ib_{\mu+1/2} f_{14} F_3(k-\varepsilon) - ib_{\mu+1/2} f_{32} F_3(k+\varepsilon) - f_{22} F_2 M(k+\varepsilon) + f_{44} F_2 M(k-\varepsilon) + 2F_2 D(k^2 - \varepsilon^2) = 0; \end{aligned}$$

III

$$\begin{aligned} -2b_{\mu-1/2} BF_2 + if_{23} F_3(k+\varepsilon) + if_{41} F_3(\varepsilon-k) - if_{21} F_3 M - if_{43} F_3 M = 0, \quad B = 0, \\ -b_{\mu-1/2} f_{11} F_1 + if_{21} F_3(k+\varepsilon) - if_{41} F_3 M = 0, \\ 2a_{\mu+1/2} F_1 C - if_{14} F_3(k-\varepsilon) + if_{32} F_3(k+\varepsilon) - if_{12} F_3 M - if_{34} F_3 M = 0, \quad C = 0, \\ -a_{\mu+1/2} f_{22} F_2 + if_{12} F_3(\varepsilon-k) - if_{32} F_3 M = 0, \\ b_{\mu-1/2} f_{33} F_1 + if_{43} F_3(\varepsilon-k) - if_{23} F_3 M = 0, \\ 2Ab_{\mu-1/2} F_1 - if_{23} F_3(k+\varepsilon) - if_{41} F_3(k-\varepsilon) - if_{21} F_3 M + if_{43} F_3 M = 0, \end{aligned}$$

$$a_{\mu+1/2} f_{44} F_2 + i f_{34} F_3 (k + \varepsilon) - i f_{14} F_3 M = 0,$$

$$2a_{\mu+1/2} F_2 D + i f_{14} F_3 (k - \varepsilon) + i f_{32} F_3 (k + \varepsilon) - i f_{12} F_3 M + i f_{34} F_3 M = 0.$$

In accordance with the general method by Fedorov – Gronskey [24], we should impose the relevant differential constraints which will permit us to transform all equations to algebraic form

$$B = 0, C = 0, \quad a_{\mu-1/2} F_3 = C_1 F_1, b_{\mu+1/2} F_3 = C_2 F_2, b_{\mu-1/2} F_1 = C_3 F_3, a_{\mu+1/2} F_2 = C_4 F_3; \quad (18)$$

in this way we obtain

I

$$-i f_{23} C_1 F_1 (k + \varepsilon) - i f_{41} C_1 F_1 (k - \varepsilon) + 2A F_1 (k^2 - \varepsilon^2) + f_{11} F_1 M (\varepsilon - k) + f_{33} F_1 M (k + \varepsilon) = 0,$$

$$-i f_{23} C_1 F_1 (k + \varepsilon) + i f_{41} C_1 F_1 (k - \varepsilon) + f_{11} F_1 M (k - \varepsilon) + f_{33} F_1 M (k + \varepsilon) = 0;$$

$$-f_{21} C_1 F_1 + f_{43} C_1 F_1 - 2i A F_1 M - i f_{11} F_1 (k - \varepsilon) + i f_{33} F_1 (k + \varepsilon) = 0,$$

$$f_{12} C_2 F_2 + f_{34} C_2 F_2 - i f_{22} F_2 (k + \varepsilon) + i f_{44} F_2 (\varepsilon - k) = 0,$$

II

$$f_{21} C_1 F_1 + f_{43} C_1 F_1 + i f_{11} F_1 (k - \varepsilon) + i f_{33} F_1 (k + \varepsilon) = 0,$$

$$-i f_{14} C_2 F_2 (k - \varepsilon) + i f_{32} C_2 F_2 (k + \varepsilon) + f_{22} F_2 M (k + \varepsilon) + f_{44} F_2 M (k - \varepsilon) = 0,$$

$$-f_{12} C_2 F_2 + f_{34} C_2 F_2 + i f_{22} F_2 (k + \varepsilon) + i f_{44} F_2 (\varepsilon - k) - 2i F_2 M D = 0,$$

$$-i f_{14} C_2 F_2 (k - \varepsilon) - i f_{32} C_2 F_2 (k + \varepsilon) - f_{22} F_2 M (k + \varepsilon) + f_{44} F_2 M (k - \varepsilon) + 2F_2 D (k^2 - \varepsilon^2) = 0;$$

III

$$i f_{23} F_3 (k + \varepsilon) + i f_{41} F_3 (\varepsilon - k) - i f_{21} F_3 M - i f_{43} F_3 M = 0,$$

$$-f_{11} C_3 F_3 + i f_{21} F_3 (k + \varepsilon) - i f_{41} F_3 M = 0,$$

$$-i f_{14} F_3 (k - \varepsilon) + i f_{32} F_3 (k + \varepsilon) - i f_{12} F_3 M - i f_{34} F_3 M = 0,$$

$$-C_4 F_3 f_{22} + i f_{12} F_3 (\varepsilon - k) - i f_{32} F_3 M = 0,$$

$$f_{33} C_3 F_3 + i f_{43} F_3 (\varepsilon - k) - i f_{23} F_3 M = 0,$$

$$2A C_3 F_3 - i f_{23} F_3 (k + \varepsilon) - i f_{41} F_3 (k - \varepsilon) - i f_{21} F_3 M + i f_{43} F_3 M = 0,$$

$$f_{44} C_4 F_3 + i f_{34} F_3 (k + \varepsilon) - i f_{14} F_3 M = 0,$$

$$2C_4 F_3 D + i f_{14} F_3 (k - \varepsilon) + i f_{32} F_3 (k + \varepsilon) - i f_{12} F_3 M + i f_{34} F_3 M = 0;$$

reducing the total multipliers in each equation we arrive at the algebraic system

I

$$-i f_{23} C_1 (k + \varepsilon) - i f_{41} C_1 (k - \varepsilon) + 2A (k^2 - \varepsilon^2) + f_{11} M (\varepsilon - k) + f_{33} M (k + \varepsilon) = 0,$$

$$-i f_{23} C_1 (k + \varepsilon) + i f_{41} C_1 (k - \varepsilon) + f_{11} M (k - \varepsilon) + f_{33} M (k + \varepsilon) = 0;$$

$$-f_{21}C_1 + f_{43}C_1 - 2iAM - if_{11}(k - \varepsilon) + if_{33}(k + \varepsilon) = 0,$$

$$f_{12}C_2 + f_{34}C_2 - if_{22}(k + \varepsilon) + if_{44}(\varepsilon - k) = 0,$$

II

$$f_{21}C_1 + f_{43}C_1 + if_{11}(k - \varepsilon) + if_{33}(k + \varepsilon) = 0,$$

$$-if_{14}C_2(k - \varepsilon) + if_{32}C_2(k + \varepsilon) + f_{22}M(k + \varepsilon) + f_{44}M(k - \varepsilon) = 0,$$

$$-f_{12}C_2 + f_{34}C_2 + if_{22}(k + \varepsilon) + if_{44}(\varepsilon - k) - 2iMD = 0,$$

$$-if_{14}C_2(k - \varepsilon) - if_{32}C_2(k + \varepsilon) - f_{22}M(k + \varepsilon) + f_{44}M(k - \varepsilon) + 2D(k^2 - \varepsilon^2) = 0;$$

III

$$if_{23}(k + \varepsilon) + if_{41}(\varepsilon - k) - if_{21}M - if_{43}M = 0,$$

$$-f_{11}C_3 + if_{21}(k + \varepsilon) - if_{41}M = 0,$$

$$-if_{14}(k - \varepsilon) + if_{32}(k + \varepsilon) - if_{12}M - if_{34}M = 0,$$

$$-C_4 f_{22} + if_{12}(\varepsilon - k) - if_{32}M = 0,$$

$$f_{33}C_3 + if_{43}(\varepsilon - k) - if_{23}M = 0,$$

$$2AC_3 - if_{23}(k + \varepsilon) - if_{41}(k - \varepsilon) - if_{21}M + if_{43}M = 0,$$

$$f_{44}C_4 + if_{34}(k + \varepsilon) - if_{14}M = 0,$$

$$2C_4D + if_{14}(k - \varepsilon) + if_{32}(k + \varepsilon) - if_{12}M + if_{34}M = 0.$$

2. Differential constraints

Let us study the above differential relations

$$\begin{aligned} a_{\mu-1/2}F_3 &= C_1F_1, & b_{\mu-1/2}F_1 &= C_3F_3, \text{ let } C_3 = C_1, \\ b_{\mu+1/2}F_3 &= C_2F_2, & a_{\mu+1/2}F_2 &= C_4F_3, \text{ let } C_4 = C_2. \end{aligned} \tag{19}$$

We readily derive the 2nd order equations

$$\begin{aligned} (a_{\mu-1/2}b_{\mu-1/2} - C_1^2)F_1 &= 0, & (b_{\mu-1/2}a_{\mu-1/2} - C_1^2)F_3 &= 0, \\ (b_{\mu+1/2}a_{\mu+1/2} - C_2^2)F_2 &= 0, & (a_{\mu+1/2}b_{\mu+1/2} - C_2^2)F_3 &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Bearing in mind the definitions

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} + \frac{\mu+1/2}{r} &= a_{\mu+1/2}, & \frac{d}{dr} + \frac{\mu-1/2}{r} &= a_{\mu-1/2}, \\ \frac{d}{dr} - \frac{\mu+1/2}{r} &= b_{\mu+1/2}, & \frac{d}{dr} - \frac{\mu-1/2}{r} &= b_{\mu-1/2}, \end{aligned}$$

we can find the needed products of operators

$$a_{\mu-1/2}b_{\mu-1/2} = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{(4(\mu-2)\mu+3)}{4r^2}, \quad b_{\mu-1/2}a_{\mu-1/2} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{(1-4\mu^2)}{4r^2},$$

$$b_{\mu+1/2}a_{\mu+1/2} = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{(4\mu(\mu+2)+3)}{4r^2}, \quad a_{\mu+1/2}b_{\mu+1/2} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{(1-4\mu^2)}{4r^2}.$$

So we arrive at four differential equations for 3 functions:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(4(\mu-2)\mu+3)}{4r^2} - C_1^2\right)F_1 &= 0, & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(1-4\mu^2)}{4r^2} - C_1^2\right)F_3 &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(4\mu(\mu+2)+3)}{4r^2} - C_2^2\right)F_2 &= 0, & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(1-4\mu^2)}{4r^2} - C_2^2\right)F_3 &= 0. \end{aligned}$$

The second and fourth equations agree only if $C_1^2 = C_2^2 = C^2$.

Thus, we have only three different equations:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(4\mu(\mu-2)+3)}{4r^2} - C^2\right)F_1 &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(4\mu(\mu+2)+3)}{4r^2} - C^2\right)F_2 &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(1-4\mu^2)}{4r^2} - C^2\right)F_3 &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Allowing for that $\mu = m + Br^2 / 2$, we arrive at

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{4}B^2r^2 - Bm + B - \frac{m^2}{r^2} + \frac{2m}{r^2} - \frac{3}{4r^2} - C^2\right)F_1 &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{4}B^2r^2 - Bm - B - \frac{m^2}{r^2} - \frac{2m}{r^2} - \frac{3}{4r^2} - C^2\right)F_2 &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{4}B^2r^2 - Bm - \frac{m^2}{r^2} + \frac{1}{4r^2} - C^2\right)F_3 &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

In a new variable $x = r^2$, the above equations read

$$\begin{aligned} \left(4x \frac{d^2}{dx^2} + 2 \frac{d}{dx} - \frac{1}{4}B^2x - Bm + B - \frac{m^2}{x} + \frac{2m}{x} - \frac{3}{4x} - C^2\right)F_1 &= 0, \\ \left(4x \frac{d^2}{dx^2} + 2 \frac{d}{dx} - \frac{1}{4}B^2x - Bm - B - \frac{m^2}{x} - \frac{2m}{x} - \frac{3}{4x} - C^2\right)F_2 &= 0, \\ \left(4x \frac{d^2}{dx^2} + 2 \frac{d}{dx} - \frac{1}{4}B^2x - Bm - \frac{m^2}{x} + \frac{1}{4x} - C^2\right)F_3 &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

We use the needed substitutions for three functions:

$$\begin{aligned} (4x \frac{d^2}{dx^2} + 2 \frac{d}{dx} - \frac{1}{4} B^2 x - Bm + B - \frac{m^2}{x} + \frac{2m}{x} - \frac{3}{4x} - C^2) x^{A_1} e^{Dx} f_1(x) &= 0, \\ (4x \frac{d^2}{dx^2} + 2 \frac{d}{dx} - \frac{1}{4} B^2 x - Bm - B - \frac{m^2}{x} - \frac{2m}{x} - \frac{3}{4x} - C^2) x^{A_2} e^{Dx} f_2(x) &= 0, \\ (4x \frac{d^2}{dx^2} + 2 \frac{d}{dx} - \frac{1}{4} B^2 x - Bm - \frac{m^2}{x} + \frac{1}{4x} - C^2) x^{A_3} e^{Dx} f_3(x) &= 0. \end{aligned}$$

this results in

$$\begin{aligned} &(\frac{8A_1 D - Bm + B - C^2 + 2D}{x} + \frac{4A_1^2 - 2A_1 - (m-2)m - \frac{3}{4}}{x^2} - \frac{B^2}{4} + 4D^2) f_1 + \\ &+ (\frac{8A_1 + 2}{x} + 8D) f_1' + 4f_1'' = 0, \\ &(\frac{8A_2 D - B(m+1) - C^2 + 2D}{x} - \frac{(-4A_2 + 2m + 3)(4A_2 + 2m + 1)}{4x^2} - \frac{B^2}{4} + 4D^2) f_2 + \\ &+ (\frac{8A_2 + 2}{x} + 8D) f_2' + 4f_2'' = 0, \\ &(\frac{8A_3 D - Bm - C^2 + 2D}{x} + \frac{4A_3^2 - 2A_3 - m^2 + \frac{1}{4}}{x^2} - \frac{B^2}{4} + 4D^2) f_3 + (\frac{8A_3 + 2}{x} + 8D) f_3' + 4f_3'' = 0, \end{aligned}$$

Let us impose the evident constraints

$$\begin{aligned} -\frac{B^2}{4} + 4D^2 &= 0, \quad \frac{4A_1^2 - 2A_1 - (m-2)m - \frac{3}{4}}{x^2} = 0, \\ -\frac{B^2}{4} + 4D^2 &= 0, \quad \frac{(-4A_2 + 2m + 3)(4A_2 + 2m + 1)}{4x^2} = 0, \\ -\frac{B^2}{4} + 4D^2 &= 0, \quad \frac{4A_3^2 - 2A_3 - m^2 + \frac{1}{4}}{x^2} = 0, \end{aligned}$$

their solutions have the form

$$B > 0, \quad D = -\frac{B}{4},$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4}(-2m+3) > 0, \quad m = 0, -1, -2, \dots; & A_1 &= \frac{1}{4}(2m-1) > 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \\ A_2 &= \frac{1}{4}(-2m-1) > 0, \quad m = -1, -2, -3, \dots; & A_2 &= \frac{1}{4}(2m+3) > 0, \quad m = -1, 0, +1, \dots; \\ A_3 &= \frac{1}{4}(-2m+1) > 0, \quad m = 0, -1, -2, \dots; & A_3 &= \frac{1}{4}(2m+1) > 0, \quad m = 0, +1, +2, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Taking into account these conditions, we get more simple equations

$$4xf_{1''} + (8A_1 + 2 - 2Bx) f_{1'} + (-2BA_1 - B(m-1) - C^2 - \frac{B}{2}) f_1 = 0,$$

$$4xf_{2''} + (8A_2 + 2 - 2Bx) f_{2'} + (-2BA_2 - B(m+1) - C^2 - \frac{B}{2}) f_2 = 0,$$

$$4xf_{3''} + (8A_3 + 2 - 2Bx) f_{3'} + (-2BA_3 - Bm - C^2 - \frac{B}{2}) f_3 = 0,$$

In the variable $y = ax, a = \frac{B}{2}$, they take the form

$$y \frac{d^2}{dy^2} f_1 + (2A_1 + \frac{1}{4} - y) \frac{d}{dy} f_1 - (A_1 + \frac{m-1}{2} + \frac{C^2}{2B} + \frac{1}{4}) f_1 = 0,$$

$$y \frac{d^2}{dy^2} f_2 + \left(2A_2 + \frac{1}{4} - y\right) \frac{d}{dy} f_2 - (A_2 + \frac{m+1}{2} + \frac{C^2}{2B} + \frac{1}{4}) f_2 = 0,$$

$$y \frac{d^2}{dy^2} f_3 + \left(2A_3 + \frac{1}{4} - y\right) \frac{d}{dy} f_3 - (A_3 + \frac{m}{2} + \frac{C^2}{2B} + \frac{1}{4}) f_3 = 0.$$

Here we have three confluent hypergeometric equations,

$$y \frac{d^2}{dy^2} f_i + (c_i - y) \frac{d}{dy} f_i - a_i f_i = 0,$$

the quantization condition is $a_i = -n_i, n_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$; whence we derive (recalling $x = r^2, y = Br^2 / 2$)

$$\begin{aligned} f_1, \quad C^2 = -2B(n_1 + A_1 + \frac{m-1}{2} + \frac{1}{4}), \quad F_1 = x^{A_1} e^{-Bx/4} F(2A_1 + \frac{1}{4}, -n_1, y); \\ f_2, \quad C^2 = -2B(n_2 + A_2 + \frac{m+1}{2} + \frac{1}{4}), \quad F_2 = x^{A_2} e^{-Bx/4} F(2A_2 + \frac{1}{4}, -n_2, y); \\ f_3, \quad C^2 = -2B(n_3 + A_3 + \frac{m}{2} + \frac{1}{4}), \quad F_3 = x^{A_3} e^{-Bx/4} F(2A_3 + \frac{1}{4}, -n_3, y); \end{aligned} \quad (25)$$

evidently, the parameter C is imaginary. Besides, the values for A_1, A_2, A_3 should be positive; depending on the sign of the quantum number m , we have two different possibilities in each case.

Depending on the values of the quantum number m , we have the following quantization rules

$$F_1, \quad m = 0, -1, -2, \dots; \quad A_1 = \frac{-m+3/2}{2},$$

$$C^2 = -2B(n_1 + A_1 + \frac{m-1}{2} + \frac{1}{4}) = -2B(n_1 + \frac{-m+3/2}{2} + \frac{m-1}{2} + \frac{1}{4}) = -2B(n_1 + \frac{1}{2}),$$

$$F_2, \quad m = -1, -2, -3, \dots; \quad A_2 = \frac{-m-1/2}{2},$$

$$C^2 = -2B(n_2 + A_2 + \frac{m+1}{2} + \frac{1}{4}) = -2B(n_2 + \frac{-m-1/2}{2} + \frac{m+1}{2} + \frac{1}{4}) = -2B(n_2 + \frac{1}{2}),$$

$$F_3, \quad m = -1, -2, \dots; \quad A_3 = \frac{-m+1/2}{2},$$

$$C^2 = -2B(n_3 + A_3 + \frac{m}{2} + \frac{1}{4}) = -2B(n_3 + \frac{-m+1/2}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{4}) = -2B(n_3 + \frac{1}{2});$$

and

$$F_1, \quad m = +1, +2, +3, \dots; \quad A_1 = \frac{m-1/2}{2},$$

$$C^2 = -2B(n_1 + A_1 + \frac{m-1}{2} + \frac{1}{4}) = -2B(n_1 + \frac{m-1/2}{2} + \frac{m-1}{2} + \frac{1}{4}) = -2B(n_1 + m - \frac{1}{2});$$

$$F_2, \quad m = 0, +1, +2, \dots; \quad A_2 = \frac{m+3/2}{2},$$

$$C^2 = -2B(n_2 + A_2 + \frac{m+1}{2} + \frac{1}{4}) = -2B(n_2 + \frac{m+3/2}{2} + \frac{m+1}{2} + \frac{1}{4}) = -2B(n_2 + m + \frac{3}{2});$$

$$F_3, \quad m = 0, +1, +2, \dots; \quad A_3 = \frac{m+1/2}{2},$$

$$C^2 = -2B(n_3 + A_3 + \frac{m}{2} + \frac{1}{4}) = -2B(n_3 + \frac{m+1/2}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{4}) = -2B(n_3 + m + \frac{1}{2}).$$

3. Solutions of the algebraic equations

Let us turn to solving the algebraic system, where $C_1 = C_2 = C_3 = C$.

It is convenient to apply the matrix presentation.

We can note that the number of equations, 16, does not coincide with the number of the variables, 14.

First, consider three equations that contain the variable A :

$$-if_{23}C(k+\varepsilon) - if_{41}C(k-\varepsilon) + 2A(k^2 - \varepsilon^2) + f_{11}M(\varepsilon-k) + f_{33}M(k+\varepsilon) = 0,$$

$$-f_{21}C + f_{43}C - 2iAM - if_{11}(k-\varepsilon) + if_{33}(k+\varepsilon) = 0,$$

$$2AC - if_{23}(k+\varepsilon) - if_{41}(k-\varepsilon) - if_{21}M + if_{43}M = 0,$$

Expressing from the third equation the A , and substituting it two remaining we obtain

$$\begin{aligned} & -\frac{if_{23}(k+\varepsilon)(C^2 - k^2 + \varepsilon^2)}{C} - \frac{if_{41}(k-\varepsilon)(C^2 - k^2 + \varepsilon^2)}{C} \\ & + \frac{if_{21}M(k-\varepsilon)(k+\varepsilon)}{C} - \frac{if_{43}M(k-\varepsilon)(k+\varepsilon)}{C} + f_{11}M(\varepsilon-k) + f_{33}M(k+\varepsilon) = 0, \\ & \frac{f_{23}M(k+\varepsilon)}{C} + \frac{f_{41}M(k-\varepsilon)}{C} + f_{21}(\frac{M^2}{C} - C) + f_{43}(C - \frac{M^2}{C}) - if_{11}(k-\varepsilon) + if_{33}(k+\varepsilon) = 0, \end{aligned}$$

so instead of three equations we get two ones.

Now, let us write down three equations that contain the variable D :

$$\begin{aligned}
& -f_{12}C + f_{34}C + if_{22}(k + \varepsilon) + if_{44}(\varepsilon - k) - 2iMD = 0, \\
& -if_{14}C(k - \varepsilon) - if_{32}C(k + \varepsilon) - f_{22}M(k + \varepsilon) + f_{44}M(k - \varepsilon) + 2D(k^2 - \varepsilon^2) = 0; \\
& 2CD + if_{14}(k - \varepsilon) + if_{32}(k + \varepsilon) - if_{12}M + if_{34}M = 0.
\end{aligned}$$

Expressing the D from the third equations and substituting in two remaining, we get

$$\begin{aligned}
& \frac{f_{14}M(\varepsilon - k)}{C} - \frac{f_{32}M(k + \varepsilon)}{C} + f_{12}\left(\frac{M^2}{C} - C\right) + f_{34}\left(C - \frac{M^2}{C}\right) + if_{22}(k + \varepsilon) + if_{44}(\varepsilon - k) = 0, \\
& -\frac{if_{14}(k - \varepsilon)(C^2 + k^2 - \varepsilon^2)}{C} - \frac{if_{32}(k + \varepsilon)(C^2 + k^2 - \varepsilon^2)}{C} + \\
& + \frac{if_{12}M(k - \varepsilon)(k + \varepsilon)}{C} - \frac{if_{34}M(k - \varepsilon)(k + \varepsilon)}{C} - f_{22}M(k + \varepsilon) + f_{44}M(k - \varepsilon) = 0,
\end{aligned}$$

again instead of three equations we get two ones.

Therefore we have derive a new system, let us present it in the matrix form

$$A_{14 \times 12} X_{12 \times 1} = 0, \quad X = \text{the column} \{f_{11}, f_{21}, f_{41}, f_{12}, f_{22}, f_{32}, f_{23}, f_{33}, f_{43}, f_{14}, f_{34}, f_{44}\}$$

A rank of the matrix A equals 12. If one removes the rows 1 and 2, the rank does not change. Determinant of the resulting matrix $A_{12 \times 12}$ is

$$\det A_{12 \times 12} = \frac{16iM(k^2 - \varepsilon^2)^2(C^2 + k^2 - M^2 - \varepsilon^2)(C^2 - k^2 - M^2 + \varepsilon^2)^5}{C^2}.$$

Equating this determinant to zero, we find possible values for C :

$$\begin{aligned}
C &= \pm i\sqrt{\varepsilon^2 - k^2 - M^2}, \quad \text{multiplicity 5,} \\
C &= \pm \sqrt{\varepsilon^2 - k^2 + M^2}, \quad \text{multiplicity 2.}
\end{aligned} \tag{26}$$

According to eq. (25), we have restriction $C^2 < 0$.

Therefore, the roots from the first line are appropriate.

For definiteness, we take

$$C = +i\sqrt{\varepsilon^2 - k^2 - M^2} \Rightarrow \varepsilon^2 - k^2 - M^2 = -C^2. \tag{27}$$

Remembering on the quantization rules for C^2 , we will use the formula

$$\varepsilon^2 - k^2 - M^2 = 2B(n_3 + A_3 + \frac{m}{2} + \frac{1}{4}); \tag{28}$$

where

$$A_3 = \frac{1}{4}(-2m + 1) > 0, \quad m = 0, -1, -2, \dots; \quad A_3 = \frac{1}{4}(2m + 1) > 0, \quad m = 0, +1, +2, \dots$$

Now we are to study the above system at $C = +i\sqrt{\varepsilon^2 - k^2 - M^2} = iE$: its rank equals 7. One may eliminate the row 1, 2, 4, 6, and 9.

Then remove on the right side the columns 1, 2, 4, 7, 10.

As a result, we obtain the nonhomogeneous system

$$A_{7 \times 7} X_{7 \times 1} = R_{7 \times 1},$$

where

$$A_{7 \times 7} = \begin{vmatrix} i(\varepsilon - k) & 0 & 0 & 0 & -iM & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i(k + \varepsilon) & 0 & 0 & -iM & 0 \\ 0 & 0 & 0 & iE & i(\varepsilon - k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i(k + \varepsilon) & iE \\ -\frac{iM(k - \varepsilon)}{E} & 0 & 0 & i(k + \varepsilon) & -\frac{i(k - \varepsilon)(k + \varepsilon)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & i(k + \varepsilon) & \frac{iM(k + \varepsilon)}{E} & 0 & 0 & -\frac{i(k - \varepsilon)(k + \varepsilon)}{E} & i(\varepsilon - k) \\ 0 & -M(k + \varepsilon) & -\frac{(k + \varepsilon)(2k^2 + M^2 - 2\varepsilon^2)}{E} & 0 & 0 & \frac{M(\varepsilon^2 - k^2)}{E} & M(k - \varepsilon) \end{vmatrix}, X_{7 \times 1} = \begin{vmatrix} f_{41} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{33} \\ f_{43} \\ f_{34} \\ f_{44} \end{vmatrix},$$

$$R_{7 \times 1} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ i(k - \varepsilon) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} f_{11} + \begin{vmatrix} iM \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{i(k - \varepsilon)(k + \varepsilon)}{E} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} f_{21} + \begin{vmatrix} 0 \\ iM \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{i(k - \varepsilon)(k + \varepsilon)}{E} \\ M(k - \varepsilon)(k + \varepsilon) \\ E \end{vmatrix} f_{12} + \begin{vmatrix} -i(k + \varepsilon) \\ 0 \\ iM \\ 0 \\ 0 \\ \frac{iM(k + \varepsilon)}{E} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} f_{23} + \begin{vmatrix} 0 \\ i(k - \varepsilon) \\ 0 \\ iM \\ 0 \\ -\frac{iM(k - \varepsilon)}{E} \\ \frac{(k - \varepsilon)(2k^2 + M^2 - 2\varepsilon^2)}{E} \\ E \end{vmatrix} f_{14};$$

Let us write down independent solutions; we write down their 16-dimensional form

$$1, \quad f_{11} = 1, \quad f_{21} = 0, \quad f_{12} = 0, \quad f_{23} = 0, \quad f_{14} = 0, \quad \begin{vmatrix} f_{41} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{33} \\ f_{43} \\ f_{34} \\ f_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{E}{M} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(k - \varepsilon)^2}{M^2} \\ \frac{(k - \varepsilon)E}{M^2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix};$$

$$2, \quad f_{11} = 0, f_{21} = 1, f_{12} = 0, f_{23} = 0, f_{14} = 0, \quad \begin{vmatrix} f_{41} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{33} \\ f_{43} \\ f_{34} \\ f_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{k+\varepsilon}{M} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(k-\varepsilon)E}{M^2} \\ \frac{k^2+M^2-\varepsilon^2}{M^2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix};$$

$$3, \quad f_{11} = 0, f_{21} = 0, f_{12} = 1, f_{23} = 0, f_{14} = 0, \quad \begin{vmatrix} f_{41} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{33} \\ f_{43} \\ f_{34} \\ f_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ E \\ \frac{k+\varepsilon}{M} \\ k+\varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix};$$

$$4, \quad f_{11} = 0, f_{21} = 0, f_{12} = 0, f_{23} = 1, f_{14} = 0, \quad \begin{vmatrix} f_{41} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{33} \\ f_{43} \\ f_{34} \\ f_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{E}{M} \\ \frac{k+\varepsilon}{M} \\ M \\ 0 \end{vmatrix};$$

$$5, \quad f_{11} = 0, f_{21} = 0, f_{12} = 0, f_{23} = 0, f_{14} = 1, \quad \begin{vmatrix} f_{41} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{33} \\ f_{43} \\ f_{34} \\ f_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\varepsilon-k}{M} \\ M \\ -\frac{E}{M} \end{vmatrix}.$$

Recall that

$$A = \frac{i(f_{23}k + f_{41}k + f_{21}M - f_{43}M + f_{23}\varepsilon - f_{41}\varepsilon)}{2C},$$

$$D = \frac{i(-f_{14}k - f_{32}k + f_{12}M - f_{34}M + f_{14}\varepsilon - f_{32}\varepsilon)}{2C};$$

so we can find expressions A and B for each of five solutions

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\varepsilon - k}{M}, \quad A_2 = -\frac{E}{M}, \quad A_3 = 0, A_4 = 0, A_5 = 0; \\ D_1 &= 0, \quad D_2 = 0, \quad D_3 = 0, \quad D_4 = 0, \quad D_5 = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Finally, we obtain 16-dimensional presentations for five solutions (let $\sqrt{\varepsilon^2 - M^2 - k^2} = E$):

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{41} \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{43} \\ f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \\ f_{43} \\ f_{14} \\ f_{24} \\ f_{34} \\ f_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(r) \\ 0 \\ \frac{\varepsilon - k}{M}F_1(r) \\ -\frac{E}{M}F_3(r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\varepsilon - k}{M}F_1(r) \\ 0 \\ \frac{(k - \varepsilon)^2}{M^2}F_1(r) \\ \frac{(k - \varepsilon)E}{M^2}F_3(r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{41} \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{43} \\ f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \\ f_{43} \\ f_{14} \\ f_{24} \\ f_{34} \\ f_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_3(r) \\ -\frac{E}{M}F_1(r) \\ \frac{k + \varepsilon}{M}F_3(r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{E}{M}F_1(r) \\ 0 \\ \frac{(k - \varepsilon)E}{M^2}F_1(r) \\ \frac{E^2}{M^2}F_3(r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{41} \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{43} \\ f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \\ f_{43} \\ f_{14} \\ f_{24} \\ f_{34} \\ f_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_3(r) \\ \frac{E}{k+\varepsilon} F_2(r) \\ \frac{M}{k+\varepsilon} F_3(r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_4 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{41} \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{43} \\ f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \\ f_{43} \\ f_{14} \\ f_{24} \\ f_{34} \\ f_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_3(r) \\ -\frac{E}{M} F_1(r) \\ \frac{k+\varepsilon}{M} F_3(r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_5 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{41} \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{43} \\ f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \\ f_{43} \\ f_{14} \\ f_{24} \\ f_{34} \\ f_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_3(r) \\ 0 \\ \frac{\varepsilon-k}{M} F_3(r) \\ -\frac{E}{M} F_2(r) \end{pmatrix}.$$

Conclusions

16-component system of equations describing the Dirac – Kähler particle in the presence of the external magnetic field has been solved. On the searched solutions we diagonalize operators of the energy, third projection of the total angular momentum, and the third projection of the linear momentum.

After separating the variables, we derive the system of sixteen first order differential equations in polar coordinate. To resolve this system, we apply the method by Fedorov – Gronskey based on projective operator constructed from generator J^{12} for the field under consideration. According to this approach, we decompose the complete wave function into three 16-dimensional projective constituents, each expressed through only one functions of the polar coordinate. In the present system, these three basic functions are constructed in terms of the confluent hypergeometric functions, at this a quantization rule arises from the polynomial requirement. The 16-dimensional structure of solutions is determined by the arising linear algebraic system of equations. In this way, we find five independent solutions for the Dirac–Kähler particle in the magnetic field.

REFERENCES

1. Dirac, P. A. M. The quantum theory of the electron. Part I / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. A. – 1928. – Vol. 117. – P. 610–624; The quantum theory of the electron. Part II // Proc. Roy. Soc. A. – 1928. – Vol. 118. – P. 351–361.
2. Darwin, C. G. The electron as a vector wave / C. G. Darwin // Proc. Roy. Soc. Lond. A. – 1927. – Vol. 116. – P. 227–253; The wave equations of the electron // Proc. Roy. Soc. Lond. A. – 1928. – Vol. 118, nr 780. – P. 654–680.
3. Ivanenko, D. Zur theorie des magnetischen electrons / D. Ivanenko, L. Landau // Zeit. Phys. – 1928. – Vol. 48, nr 8. – P. 340–348.
4. Kähler, E. Der innere differentialkalkül / E. Kähler // Rendiconti di Mat. (Roma). – 1962. – Vol. 21. – nr 3, 4. – P. 425–523.

5. Red'kov, V. M. On equations for the Dirac – Kähler field and bosons with different parities in the Riemannian space / V. M. Red'kov // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Ser. fiz.-mat. – 2000. – Nr. 1. – 90–95.
6. Red'kov, V. M. Dirac-Kähler field, spinor technique, and 2-potential approach to electrodynamics with two charges / V. M. Red'kov // Nonlinear Dynamics and Applications. – 2008. – Vol. 15. – P. 147–163.
7. Red'kov, V.M. Field particles in Riemannian space and the Lorentz group / V. M. Red'kov. – Minsk : Belarussian Science, 2009. – 486 p. (in Russian).
8. Red'kov, V. M. Tetrad formalism, spherical symmetry and Schrödinger basis group / V. M. Red'kov. – Minsk : Belarussian Science, 2011. – 339 p. (in Russian).
9. V. M. Red'kov. Dirac – Kähler field and 2-potential approach to electrodynamics with two charges. Chapter I / V. M. Red'kov // Progress in Relativity, Gravitation, Cosmology. – New York : Nova Science Publishers. Inc., 2012. – P. 23–37.
10. Ovsiyuk, E. Some Consequences from the Dirac-Kähler Theory: on Intrinsic Spinor Sub-structure of the Different Boson Wave Functions / E. Ovsiyuk, O. Veko, V. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2013. – Vol. 16, nr 1. – P. 13–23.
11. Ovsiyuk, E. M. Maxwell Electrodynamics and Boson Fields in Spaces of Constant Curvature / E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov. – New York : Nova Science Publishers Inc., 2014. – 486 p.
12. Veko, O. V. Lounesto classification and the theory of the Dirac-Kähler field: on intrinsic spinor sub-structure of the different boson wave functions / O. V. Veko, E. M. Ovsiyuk, V. M. Red'kov // Relativity, Gravitation, Cosmology: Foundations. – New York : Nova Science Publishers, Inc, 2015. – P. 75–88.
13. Dirac – Kähler particle in Riemann spherical space: boson interpretation / A. M. Ishkhanyan [et al.] // Canad. J. Phys. – 2015. – Vol. 93. – P. 1427–1433.
14. The Dirac – Kähler field in spherical Riemann space: boson interpretation, exact solutions / A. M. Ishkhanyan [et al.] // Proceedings of the Brest State Pedagogical University. Ser. Physics. Mathematics. – 2015. – Nr. 1. – P. 15–26.
15. Ovsiyuk, E. M. The Dirac – Kähler particle in Lobachevsky space, nonrelativistic approximation, exact solutions / E. M. Ovsiyuk, A. N. Red'ko, V. M. Red'kov // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Ser. fiz.-mat. – 2015. – Nr 4. – P. 61–70.
16. Chichurin, A. V. Dirac – Kähler particle in Riemann spherical space: analytical and numerical study, visualization / A. V. Chichurin, E. M. Ovsiyuk, V. M. Red'kov // Studia i Materialy. – 2015. – Vol. 1, nr 9. – P. 41–54.
17. Nonrelativistic description of the Dirac – Kähler particle on the background of curved space-time / K. V. Kazmerchuk [et al.] // Relativity, Gravitation, Cosmology: Foundations. – New York : Nova Science Publishers, Inc., 2015. – P. 59–74.
18. Veko, O. V. Lounesto classification and the theory of the Dirac – Kähler field on intrinsic spinor sub-structure of the different boson wave functions / O. V. Veko, E. M. Ovsiyuk, V. M. Red'kov // Relativity, Gravitation, Cosmology: Foundations. – New York : Nova Science Publishers, Inc., 2015. – P. 75–88.
19. Pletukhov, V. A. Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom / V. A. Pletukhov, V. M. Red'kov, V. I. Strazhev. – Minsk : Belarussian Science, 2015. – 328 p. (in Russian).
20. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol I. General Theory / V. V. Kisel [et al.]. – New York : Nova Science Publishers Inc., 2018. – 404 p.
21. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol II. Physical Problems / V. V. Kisel [et al.]. – New York : Nova Science Publishers Inc., 2018. – 402 p.

22. Gronskiy, V. K. Magnetic properties of a particle with spin $3/2$ / V. K. Gronskiy, F. I. Fedorov // Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. – 1960. – Vol. 4, № 7. – P. 278–283.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.10.2024

УДК 538.9:535.3

**Игорь Иванович Макоед¹, Инна Николаевна Мельникова²,
Григорий Семенович Римский³**

¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²канд. физ.-мат. наук, доц. каф. фундаментальной математики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

³канд. физ.-мат. наук, зав. лаб. радиационных воздействий

Научно-практического центра Национальной академии наук Беларуси по материаловедению

Igor Makoeđ¹, Inna Melnikova², Gregory Rymski³

¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of Brest State A. S. Pushkin University

²Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University

³Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Industrial Laboratory
of Radiation Effects of the Scientific-Practical Materials Research Centre
of National Academy of Sciences of Belarus

e-mail: ¹igmak2010@yandex.ru; ³rymsky@physics.by

ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ КАТИОНЗАМЕЩЕННОГО ФЕРРИТА ВИСМУТА

Методами диэлектрической спектроскопии определены величины анионных и молекулярных поляризуемостей соединений $Bi_{1-x}R_xFeO_3$, синтезированных на основе феррита висмута, в зависимости от типа замещающего катиона.

Ключевые слова: поляризуемость, диэлектрическая проницаемость, феррит висмута.

A Simple Polarizability Model of Cation Substituted Bismuth Ferrite

The values of anionic and molecular polarizabilities of $Bi_{1-x}R_xFeO_3$ compounds synthesized on the basis of bismuth ferrite were determined using dielectric spectroscopy methods, depending on the type of substitution cation.

Key words: polarizability, permittivity, bismuth ferrite.

Введение

Электронная поляризуемость ионов характеризует способность ионов к поляризации, т. е. к деформации электронных оболочек при приложении внешнего электромагнитного поля. Поляризуемость определяет диэлектрические и оптические свойства материалов, формирующиеся в виде отклика вещества на такое воздействие [1–3]. В соответствии с правилом аддитивности, молекулярная поляризуемость сложного вещества может быть разложена на поляризуемости более простых веществ. Это правило применимо как к электронной ($\alpha_{эл}$), так и к молекулярной (α) поляризуемости. Оценка абсолютной величины электронной поляризуемости ионов является предметом подхода поляризуемости в материаловедении, который был разработан при анализе экспериментальных данных об оптических свойствах стекол в исследованиях [4] и [5]. Подход поляризуемости был развит в работах, посвященных изучению электронной поляризуемости оксидов [6], оксидных стекол [7], и был использован при изучении оптических свойств оксидных кристаллов со структурой шпинели [8; 9] и граната [10].

Соединения системы $Bi_{1-x}R_xFeO_3$, где R – катионы редкоземельных элементов (РЗЭ), являются наиболее известными мультиферроиками, интенсивно изучаемыми в последние годы. Изменение состава катионных подрешеток $BiFeO_3$ позволяет варьировать состав и физические свойства новых соединений в широких диапазонах в зави-

симости от типов и концентраций замещающих катионов. Меньшие радиусы ионов R^{3+} по отношению к ионному радиусу Bi^{3+} способствуют увеличению искажения кристаллической решетки, что приводит к изменению структурно чувствительных физических свойств образцов.

Целью настоящей работы является определение величин анионных и молекулярных поляризуемостей соединений $Bi_{0,90}R_{0,10}FeO_3$ в зависимости от типа замещающего катиона.

Методы исследований

При твердотельном синтезе поликристаллов феррита висмута и соединений на его основе, содержащих трехвалентные катионы, в качестве исходных компонент использованы высокочистые – от 99,5 % для оксидов Bi_2O_3 , Fe_2O_3 и La_2O_3 , до 99,9 % для оксидов изовалентных неодима, гадолиния, диспрозия и эрбия исходные компоненты, произведенные Sigma Aldrich Chemicals. Этапы и режимы синтеза соединений описаны в [11]. Соответствие химического состава заданному подтверждается результатами электронной микроскопии с использованием сертифицированного сканирующего электронного микроскопа Hitachi S-3000N. По результатам полнопрофильного, с применением ПО Jana2006 [12], анализа рентгенограмм, записанных на установке ДРОН-3М (CuK_{α}), восстановлены с точностью 10^{-4} Å абсолютные величины параметров кристаллических решеток. Спектры коэффициента отражения в области фундаментального поглощения получены на Фурье-спектрофотометре Vertex 80V корпорации Bruker. Предварительный дисперсионный анализ и расчет компонент оптических функций выполнен в программе [13].

Результаты экспериментов и их обсуждение

Частичная замена катионов висмута катионами редкоземельных элементов приводит к стабилизации кристаллической структуры. По данным рентгеноструктурного анализа соединения $Bi_{0,90}R_{0,10}FeO_3$ с замещающими катионы висмута (III) изовалентными катионами La, Nd, Gd, Dy, Er, кристаллизуются в ромбоэдрической структуре $R\bar{3}c$. В образцах отсутствуют следы исходных оксидов, но выявлены малые примеси в форме сложных оксидов $Bi_2Fe_4O_9$ и $Bi_{25}FeO_{39}$ (таблица 1). Результаты полнопрофильного анализа рентгенограмм свидетельствуют об систематическом снижении величин объемов элементарных ячеек при замещении катионов висмута катионами РЗЭ с уменьшающимися размерами ионных радиусов. Это хорошо согласуется с динамикой изменения величин объемов соответствующих соединений, которые были рассчитаны в программе SPuDS [14].

Таблица 1 – Содержание компонент соединений $Bi_{0,90}R_{0,10}FeO_3$ ($R = La, Nd, Gd, Dy, Er$), %

R-катион	$Bi_{0,90}R_{0,10}FeO_3$	$Bi_2Fe_4O_9$	$Bi_{25}FeO_{39}$
La^{3+}	$97,75 \pm 1,03$	$1,99 \pm 0,52$	$1,26 \pm 0,25$
Nd^{3+}	$95,22 \pm 1,55$	$3,68 \pm 0,48$	$1,09 \pm 0,15$
Gd^{3+}	$97,15 \pm 1,63$	$1,60 \pm 1,09$	$1,25 \pm 0,28$
Dy^{3+}	$97,22 \pm 1,76$	$2,34 \pm 0,87$	$0,45 \pm 0,39$
Er^{3+}	$94,81 \pm 1,29$	$3,43 \pm 0,50$	$1,75 \pm 0,38$

Абсолютные величины поляризуемостей катионов слабо зависят от ионного окружения, принимая близкие значения в разных соединениях. Поляризуемость анионов зависит от координационного числа, плотности упаковки и типов ближайших соседей. Согласно модели Лорентц – Лоренца [15], в кристаллах кубической симметрии величина

электронной составляющей диэлектрической проницаемости в статическом пределе переменного электрического поля может быть вычислена по формуле:

$$\varepsilon_{\text{эл}} = \frac{1 + (8\pi/3)\sum_i N_i \alpha_i}{1 - (4\pi/3)\sum_i N_i \alpha_i}, \quad (1)$$

где N_i – и α_i – концентрация и поляризуемость ионов i – того типа. Электронные поляризуемости ионов Bi^{3+} и Fe^{3+} равны $1,38 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3$ и $0,48 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3$ соответственно [16].

В соответствии с правилом аддитивности, молекулярная поляризуемость сложного вещества $\alpha = 0,90\alpha_{\text{Bi}^{3+}} + 0,10\alpha_{\text{R}^{3+}} + \alpha_{\text{Fe}^{3+}} + 3\alpha_{\text{O}^{2-}}$.

Величины поляризуемостей ионов кислорода ($\alpha_{\text{O}^{2-}}$), в зависимости от значений объемов (V) элементарных ячеек и поляризуемостей катионов висмута, РЗЭ и железа, могут быть восстановлены из выражения (1), преобразованного для катионзамещенного феррита висмута к виду:

$$\alpha_{\text{O}^{2-}} = \frac{1}{24\pi} \left\{ 3V \left(\frac{\varepsilon_{\infty} - 1}{\varepsilon_{\infty} + 2} \right) - 8\pi [0,90\alpha_{\text{Bi}^{3+}} + 0,10\alpha_{\text{R}^{3+}} + \alpha_{\text{Fe}^{3+}}] \right\}. \quad (2)$$

Использованные при расчетах поляризуемости катионов $\alpha_{\text{R}^{3+}}$ взяты из [17]. Полученные результаты представлены в таблице 2. Экспериментальные величины определены с использованием значений объемов элементарных ячеек соединений, определенных при анализе дифрактограмм по методу Ритвельда. Расчетные значения $\alpha_{\text{O}^{2-}}(\varepsilon_{\infty})$ и $\alpha(\varepsilon_{\infty})$ получены с использованием величин объемов элементарных ячеек, восстановленных в программе SPuDS.

Величины ε_{∞} определены в низкочастотном пределе спектров действительных компонент комплексной диэлектрической проницаемости, рассчитанных из экспериментальных спектров коэффициента отражения по методу Крамерса – Кронига. Отличие экспериментальных и расчетных значений $\alpha_{\text{O}^{2-}}(\varepsilon_{\infty})$ и $\alpha(\varepsilon_{\infty})$ не превышает соответственно 5,36 % и 4,21 %.

В ранних работах, посвященных разработке данного направления, при расчете относительных погрешностей получены данные, подтверждающие, что правило аддитивности имеет точность 5–10 % [5; 6]. В работе [10] приведены результаты, полученные на оксидных соединениях со структурой граната, диэлектрические поляризуемости которых соответствуют правилу аддитивности с точностью до 1,13 %.

Таблица 2 – Величины оптической диэлектрической проницаемости (ε_{∞}) и катионных ($\alpha_{\text{R}^{3+}}$), анионных ($\alpha_{\text{O}^{2-}}(\varepsilon_{\infty})$) и молекулярных ($\alpha(\varepsilon_{\infty})$) поляризуемостей (10^{-24} см^3) соединений $\text{Bi}_{0,90}\text{R}_{0,10}\text{FeO}_3$

R-катион	ε_{∞}	$\alpha_{\text{O}^{2-}}(\varepsilon_{\infty})$ расчет	$\alpha_{\text{O}^{2-}}(\varepsilon_{\infty})$ эксперимент	$\alpha(\varepsilon_{\infty})$ расчет	$\alpha(\varepsilon_{\infty})$ эксперимент	$\alpha_{\text{R}^{3+}}$ [17]
La^{3+}	5,09	2,148	2,219	8,298	8,510	1,30
Nd^{3+}	5,11	2,138	2,235	8,262	8,551	1,25
Gd^{3+}	5,16	2,150	2,244	8,280	8,562	1,08
Dy^{3+}	5,19	2,146	2,256	8,259	8,591	1,00
Er^{3+}	5,26	2,167	2,283	8,311	8,660	0,89

На рисунке 1 представлены результаты восстановления значений ширины запрещенной зоны (E_g) по методу Тауца [18]. Полученные результаты находятся в хорошем согласии с известными литературными данными [19; 20].

Величина ширины запрещенной зоны недопированного феррита висмута равна 2,25 эВ. При частичном замещении в феррите висмута катионов Bi^{3+} изовалентными R-катионами наблюдается красное смещение поглощения, что свидетельствует об уменьшении ширины запрещенной зоны.

Это явление структурно зависимо и обусловлено уменьшением величин валентных углов «Fe – O – Fe» при замещениях Bi^{3+} катионами с меньшими значениями ионных радиусов.

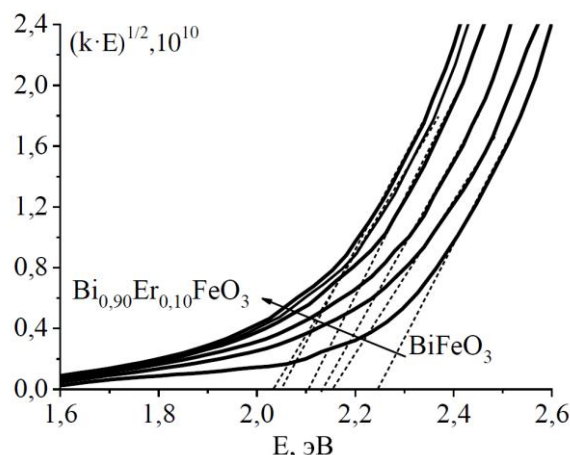


Рисунок 1 – Определение ширины запрещенной зоны составов $\text{Bi}_{0,90}\text{R}_{0,10}\text{FeO}_3$ ($\text{R} = \text{La}, \text{Nd}, \text{Gd}, \text{Dy}, \text{Er}$) по методу Тауца в модели прямых переходов

Для стекол в предположении аддитивности вкладов поляризуемостей катионов и анионов кислорода в работе [17] было получено эмпирическое выражение:

$$1 - \frac{n_o^2 - 1}{n_o^2 + 2} = \left(\frac{E_g}{20} \right)^{1/2}, \quad (3)$$

где n_o^2 – квадрат оптического показателя преломления, измеренного в пределах «окна прозрачности», разделяющего области решеточных и электронных резонансов, E_g – ширина запрещенной зоны.

Результаты анализа данных оптической спектроскопии подтверждают возможность и эффективность использования выражения аналогичного (3), но содержащего коэффициент 12 вместо 20 в знаменателе правой части, для описания оптических свойств соединений $\text{Bi}_{0,90}\text{R}_{0,10}\text{FeO}_3$ ($\text{R} = \text{La}, \text{Nd}, \text{Gd}, \text{Dy}, \text{Er}$).

С использованием выражения, аналогичного (3), но с коэффициентом 12, а также с учетом связи $n_o^2 = \epsilon_\infty$ рассчитаны значения диэлектрических проницаемостей $\epsilon_\infty(E_g)$, на основании которых по формуле (2) определены значения поляризуемостей $\alpha_o^{2-}(E_g)$ и $\alpha(E_g)$, представленные в таблице 3.

Рассчитанные величины анионных и молекулярных поляризуемостей не более чем на 10,30 % и на 8,11 % отличаются от соответствующих значений, приведенных в таблице 2.

На рисунке 2 изображены экспериментальные и прогнозные величины ширины запрещенной зоны катионзамещенных соединений в зависимости от типа R-катиона.

Таблица 3. Величины ширины запрещенной зоны (E_g , [эВ]) и анионных ($\alpha_{O^{2-}}(E_g)$) и молекулярных ($\alpha(E_g)$) поляризуемостей (10^{-24} см⁻¹) соединений $Bi_{0,90}R_{0,10}FeO_3$

R-катион	E_g , эВ	$\alpha_{O^{2-}}(E_g)$ эксперимент	$\alpha(E_g)$ эксперимент
La	2,16	2,149	8,299
Nd	2,13	2,136	8,256
Gd	2,12	2,107	8,150
Dy	2,10	2,089	8,089
Er	2,08	2,049	7,958

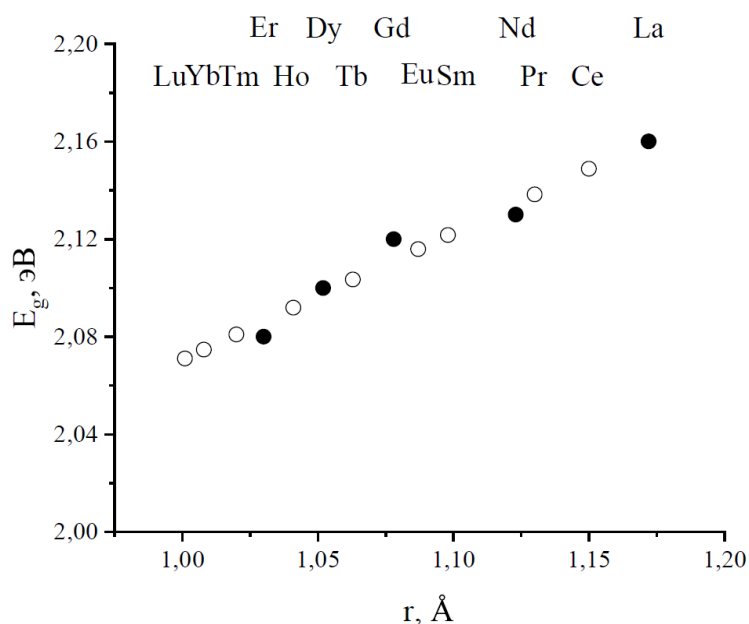


Рисунок 2 – Прогнозирование величины ширины запрещенной зоны соединений $Bi_{0,90}R_{0,10}FeO_3$ ($R = La - Lu$). Точками обозначены экспериментальные значения, полыми кружками – прогнозные

Использование линейной аппроксимации изображенной на рисунке 2 экспериментальной зависимости величины ширины запрещенной зоны от типа замещающего R-катиона ($R = La, Nd, Gd, Dy, Er$), позволяет рассчитать прогнозные значения ширины запрещенной зоны для соединений, синтезированных при 10 % замещении катионов висмута катионами всего ряда РЗЭ всего ряда – от лантана до лютеция. Восстановленные через величины E_g значения ϵ_∞ не более чем на 11 % отличаются от известных данных и могут быть использованы для восстановления значений анионных и молекулярных поляризуемостей зоны соединений $Bi_{0,90}R_{0,10}FeO_3$ ($R = La - Lu$).

Заключение

Экспериментально исследованы оптические спектры катионзамещенного феррита висмута $Bi_{0,90}R_{0,10}FeO_3$ ($R = La, Nd, Gd, Dy, Er$). Величины анионных и молекулярных электронных поляризуемостей соединений восстановлены на основании данных о диэлектрической проницаемости и ширине запрещенной зоны. Оба подхода позволяют получить абсолютные значения поляризуемостей, хорошо согласующиеся с известными данными. Значения поляризуемостей возрастают с увеличением показателя преломления и уменьшением ширины запрещенной зоны, которая систематически изменяется при катионных замещениях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ (REFERENCES)

1. Duffy, J. A. Chemical Bonding in the Oxides of the Elements: A New Appraisal / J. A. Duffy // *J. Sol. Stat. Chem.* – 1986. – Vol. 62. – P. 145–157.
2. Dimitrov, V. Electronic Oxide Polarizability and Optical Basicity of Simple Oxide / V. Dimitrov, S. Sakka // *J. App. Phys.* – 1996. – Vol. 79. – P. 1736–1740.
3. On the Relationship Between Structural-Optical Parameters of $Y_{3-x}Fe_{5+x}O_{12}$ Garnet Ferrites and the Oxide Additivity Rule / K. B. Modi [et al.] // *J. Supercond. Nov. Magn.* – 2016. – Vol. 29. – P. 1931–1936.
4. Electronic polarizability and optical basicity properties of oxide glasses through average electronegativity / R. R. Reddy [et al.] // *J. Non-Cryst. Solid.* – 2001. – Vol. 286. – P. 169–180.
5. Samanta, B. Synthesis and different optical properties of Gd_2O_3 doped sodium zinc tellurite glasses / B. Samanta, S. Ghosh, D. Dutta // *Phys. B Cond. Mat.* – 2001. – Vol. 515. – P. 82–88.
6. Refractive Index and Dispersion of Fluorides and Oxides / R. D. Shannon [et al.] // *J. Phys. Chem.* – 2002. – Vol. 31, nr 4. – P. 931–970.
7. Duffy, J. A. The electronic polarisability of oxygen in glass and the effect of composition / J. A. Duffy // *J. Non-Cryst. Sol.* – 2002. – Vol. 297. – P. 275–284.
8. Shannon, R. D. Dielectric constant of $MgAl_2O_4$ spinel and the oxide additivity rule / R. D. Shannon, G. R. Rossman // *Phys. Chem. Sol.* – 1991. – Vol. 52, nr 9. – P. 1055–1059.
9. Danil'kievich, M. I. Dielektricheskiye svoystva oksidnykh ferroshtpinel' s razlichnym magnitnym razbavleniem / M. I. Danil'kievich // *Nieorgan. materialy.* – 1997. – T. 33. – S. 375–378.
10. Drazin, J. W. Refractive index dispersion prediction for garnets ($A_3B_2C_3X_{12}$) / J. W. Drazin, R. S. Hay // *J. Amer. Ceram. Soc.* – 2024. – Vol. 107 (7). – P. 4925–4935.
11. Predicted model of magnetocaloric effect in $BiFeO_3$ -based multiferroics / I. I. Makoed [et al.] // *Sol. Stat. Sci.* – 2019. – Vol. 95. – P. 105920-1–105920-7.
12. Petříček, V. Crystallographic Computing System JANA2006: General features / V. Petříček, M. Dušek, L. Palatinus // *Z. Kristallogr.* – 2014. – Vol. 29 (5). – P. 345–352.
13. Kuzmenko, A. B. Kramers – Kronig-constrained variational analysis of optical data / A. B. Kuzmenko // *Rev. Sci. Instrum.* – 2005. – Vol. 76. – P. 083108–083112.
14. Lufaso, M. W. The prediction of the crystal structures of perovskites using the software program SPuDS / M. W. Lufaso, P. M. Woodward // *Acta Crystal.* – 2001. – Vol. 57. – P. 725–738.
15. Krupicka, S. Fyzika ferritu pribuznych magnetikuch kyslicniku / S. Krupicka. – Praha, 1969. – 595 s.
16. Danilkevitch, M. I. Dielectric Properties of Spinel, Garnet and Perovskite Oxides / M. I. Danilkevitch, I. I. Makoed // *Phys. Stat. Sol. B.* – 2000. – Vol. 222. – P. 541–551.
17. Electronic polarizability and optical basicity of lanthanide oxides / X. Zhao [et al.] // *Physica. B.* – 2007. – Vol. 392. – P. 132–136.
18. Tauc, J. Optical properties and electronic structure of amorphous Ge and Si / J. Tauc // *Mater. Res. Bull.* – 1968. – Vol. 3. – P. 37–46.
19. Danilkevitch, M. I. Electronic structure, magnetic and dielectric properties of $BiFeO_3$ / M. I. Danilkevitch, A. F. Ravinski, I. I. Makoed // Abstracts of 11th Czech and Slovak Conference on Magnetism (CSMAG'01), Kosice, August, 20–23. – Kosice, 2001. – P. 93.
20. Jiang, Y. Optical bandgap tuning of ferroelectric semiconducting $BiFeO_3$ -based oxide perovskites via chemical substitution for photovoltaics / Y. Jiang, H. Ning, J. Yu // *AIP Adv.* – 2018. – Vol. 8. – P. 125334-1–125334-9.

УДК 519.6 + 517.983.54

Oleg Matysik

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
of Brest State A. S. Pushkin University*

Олег Викторович Матысик

*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*

e-mail: matysikoleg@mail.ru

A PRIORI CHOICE OF THE REGULARIZATION PARAMETER IN AN ITERATIVE PROCEDURE OF AN EXPLICIT TYPE SOLUTION OF LINEAR ILL-POSED EQUATIONS

The explicit iteration procedure with variable-alternating step for solution of ill-posed operator equations of the first kind is proposed in Hilbert space. Convergence of a method is proved in case of a priori choice of the regularization parameter in usual norm of Hilbert space, supposing that not only the right part of the equation but the operator as well have errors. The estimations of an error and a priori stopping moment are received. The results given in the article can be used in theoretical research in solving linear operator equations, as well as in solving applied ill-posed problems.

Key words: *explicit iteration procedure, ill-posed problem, Hilbert space, self-adjoint and non-self-adjoint approximately given operator, operator equation of the first kind, a priori stopping moment.*

Априорный выбор параметра регуляризации в итерационной процедуре явного типа решения линейных некорректных уравнений

В гильбертовом пространстве предлагается явная итерационная процедура с попеременно чередующимся шагом решения некорректных операторных уравнений первого рода. Доказана сходимость метода в случае априорного выбора параметра регуляризации в исходной норме гильбертова пространства в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Получены оценки погрешности метода и априорный момент останова. Приведенные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении линейных операторных уравнений, а также при решении прикладных некорректных задач.

Ключевые слова: *явная итерационная процедура, некорректная задача, гильбертово пространство, самосопряженный и несамопряженный приближенно заданный оператор, операторное уравнение первого рода; априорный момент останова.*

Introduction

There is a large class of problems where solutions are unstable to small changes in the source data, i. e. arbitrarily small changes in the source data can lead to large changes in solutions. Tasks of this type belong to the class of incorrect tasks.

A significant part of the problems encountered in applied mathematics, physics, engineering and management can be represented in the form of an operator equation of the first kind

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \quad (1)$$

with the specified operator $A: X \rightarrow Y$ and an element y , where X and Y – metric spaces, and in specially specified cases – Banach or even Hilbert spaces.

J. Hadamard [1] introduced the following concept of correctness:

Definition. The task of finding a solution $x \in X$ equation (1) are called correct (or correctly posed, or Hadamard-correct) if, for any fixed right-hand side of equation (1), its solution is $y = y_0 \in Y$ equation (1) its solution:

- a) exists in space X ;
- b) it is uniquely defined in the space X ;
- c) it is stable in the space X , i.e. it continuously depends on the right side of $y \in Y$.

In case of violation of any of these conditions, the task is called incorrect (incorrectly posed); more specifically, in case of violation of condition c), it is called unstable.

It can be seen from the definition that Hadamard correctness is equivalent to unambiguous certainty and continuity of the inverse operator A^{-1} over the entire space Y .

For many years, it has been believed in mathematics that only correct problems have the right to exist, that only they correctly reflect the real world.

There is an opinion about incorrect tasks that they do not have a physical reality, so their solution is meaningless. As a result, incorrect tasks have not been studied for a long time. However, in practice, the need to solve incorrect tasks has become more and more frequent and persistent.

Such problems include the Cauchy problem for the Laplace equation, the problem of solving an integral equation of the first kind, the problem of differentiating a function given approximately, the numerical summation of Fourier series when the coefficients are known approximately in the metric l_2 , the inverse problem of gravimetry, the inverse problem of potential theory, the problem of spectroscopy, etc.

Iterative methods occupy a special place among the methods of solving incorrect problems, since they are easily implemented on a PC. Various iterative schemes for solving incorrectly set tasks have been proposed in the works [2–12].

In this article, an explicit iterative procedure with alternating steps for solving ill-posed problems in Hilbert space is proposed and some of its properties are investigated.

Comparison of the proposed method with the well-known *explicit Landweber iteration method* [2] $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$, $x_{0,\delta} = 0$ shows that the orders of their optimal estimates are the same.

The advantage of explicit methods is that explicit methods do not require operator inversion, but only require calculating operator values on successive approximations. In the *Landweber method*, the parameter α (anti-gradient step) is constrained from above – the inequality $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$, which may lead in practice to the need for a large number of iterations.

However, the proposed method has an advantage over the *Landweber method* in the following: to achieve optimal accuracy, it will require making the number of iterations about 3 times less than the iteration method [2].

As is known, the error of the method of simple iteration with a constant [2–4] or a variable [8] step depends on the sum of the anti-gradient steps, and moreover, in such a way that in order to reduce the number of operations, it is desirable that the anti-gradient steps be as large as possible.

However, these steps are subject to restrictions from above [2–4; 8]. The idea arises to try to loosen these restrictions.

This was done by choosing two values for the step α and β alternately, where β it is no longer required to meet the previous requirements.

The explicit iterative method considered in the article will find practical application in applied mathematics: it can be used to solve problems encountered in optimal control theory, mathematical economics, geophysics, potential theory, antenna synthesis, acoustics, plas-

ma diagnostics, in terrestrial or aerial geological exploration, in solving the inverse kinematic problem of seismics, space research (spectroscopy) and medicine (computed tomography).

1. Setting the task

An equation of the first kind is solved in a real Hilbert space H

$$Ax = y \quad (2)$$

with a positive bounded self-adjoint operator A for which zero is not an eigenvalue, but $0 \in Sp(A)$, therefore, the problem under consideration is incorrect. It is assumed that for the exact right-hand side of y , equation (2) has a single exact solution x^* . To find it, we use an explicit iterative procedure with alternating steps:

$$x_{n+1} = (I - \alpha_{n+1}A)x_n + \alpha_{n+1}y, \quad x_0 = 0, \quad \alpha_{2n+1} = \alpha, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

where I is the identical operator.

In the case of the approximate right-hand side y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, iterations (3) will take the form:

$$x_{n+1,\delta} = (I - \alpha_{n+1}A)x_{n,\delta} + \alpha_{n+1}y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad \alpha_{2n+1} = \alpha, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Below, the convergence of method (4) means the statement that approximations (4) come arbitrarily close to the exact solution of equation (2) with a suitable choice of n and sufficiently small ones δ . In other words, the iterative method (4) is convergent if

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0 \quad [9].$$

Next, we will assume that $\|A\| = 1$.

2. A priori choice of the number of iterations with the approximate right-hand side

Methods (3) and (4) were considered in [6], in which the convergence of both methods in the initial norm of Hilbert space was studied. For their convergence in [6], it is required that when $0 < \alpha < 2$, $\beta > 0$:

$$|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)| < 1 \quad (5)$$

for anyone $\lambda \in (0, 1]$. Condition (5) is equivalent to the combination of two conditions:

$$(\alpha + \beta)^2 < 8\alpha\beta, \quad (6)$$

$$\alpha\beta < \alpha + \beta. \quad (7)$$

For method (4), the priori choice of the number of iterations is studied [6]. It is proved that the iterative process (4) converges under the conditions (6), (7) and $0 < \alpha < 2$, if we choose the number of iterations n depending on δ so that $n\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

Assuming that the exact solution of x^* is originally representable, i. e. $x^* = A^s z$, $s > 0$ and under the conditions $0 < \alpha < 2$, (6),

$$\alpha + \beta < \frac{3}{2}\alpha\beta, \quad (8)$$

$$\frac{1}{16} + \alpha\beta \leq \alpha + \beta. \quad (9)$$

The following estimation of the error of the method (4) is obtained:

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^s [n(\alpha + \beta)]^{-s} \|z\| + \frac{n}{2} (\alpha + \beta) \delta. \quad (10)$$

To find the optimal error estimate for n , we equate the derivative of n from the right side of inequality (10) to zero.

Then the optimal error estimate for n has the form

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{opt}} \leq (1+s) 2^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$$

and it turns out when $n_{\text{opt}} = s \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^{-1} 2^{-s/(s+1)} \delta^{-1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}.$

Thus, the optimal estimate for method (4) with an inaccuracy on the right side of the equation turns out to be the same as the estimate for the simple iteration method [2].

Therefore, method (4) does not provide an advantage in majority estimates compared to method [2].

But it gives a win in the following: in the method of simple iteration with a constant step [2] $0 < \alpha \leq \frac{5}{4}$, and in the method (4) $0 < \frac{\alpha + \beta}{2} < 4$ [6].

Therefore, by choosing α and β alternating accordingly, it is possible to make the n_{opt} in method (4) about three times smaller than in the method of simple iteration with a constant step [2].

Thus, using method (4), to achieve optimal accuracy, it is enough to make iterations three times less than using method [2]. We present several suitable values satisfying the required conditions:

α	0,8	0,9	1,0	1,1	1,15	1,17	1,3
β	4,4	5,0	5,5	6,1	6,4	6,5	4,1

The largest amount $\alpha + \beta$ and, therefore, the largest gain in the amount of calculations are given by the values $\alpha = 1.17$ and $\beta = 6.5$.

Since in the highlighted case $\alpha + \beta = 7.67$, the condition $\alpha + \beta < 8$ shows that almost the maximum possible gain has been achieved.

Remark 1. Convergence estimates were obtained for the case when $l = m = \frac{n}{2}$.

In the case when $l = m + 1$, in all assessments the $\frac{n(\alpha + \beta)}{2}$ should be replaced by $l\alpha + m\beta$.

Remark 2. We believe that $\|A\| = 1$. In fact, all the results are easily transferred to the case when $\|A\| < \infty$.

3. A priori choice of the regularization parameter with an approximate operator

We prove the convergence of method (4) in the case of an a priori choice of the regularization parameter when solving an equation $A_\eta x = y_\delta$ with an approximately given operator A_η and an approximate right-hand side y_δ , we obtain a priori error estimates.

Similar questions were studied in [3; 6–7], but only for other methods.

3.1. The case of self-adjoint operators

Let $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, 1]$, $0 < \eta \leq \eta_0$. The iterative method (4) is written as

$$x_{n(\eta, \delta)} = g_n(A_\eta)y_\delta, \quad (4^1)$$

where $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} \right]$. In the work [6] at $0 < \alpha < 2$, (6) and (7) the conditions for the functions $g_n(\lambda)$ are obtained:

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq 1} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n, \quad \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad n > 0, \quad (11)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq 1} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_0, \quad \gamma_0 = 1, \quad n > 0. \quad (12)$$

Assuming that the exact solution of x^* equation (2) is source-representable, i. e. $x^* = A^s z$, $s > 0$, where $s > 0$ is the degree of source-representability of the exact solution, $\|z\| \leq \rho$ and under the conditions $0 < \alpha < 2$, (6), (8) and (9) the estimation was received:

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_s n^{-s}, \quad \gamma_s = \left(\frac{s}{\alpha + \beta} \right)^s, \quad (n > 0), \quad 0 < s < \infty. \quad (13)$$

Fair

Lemma 1. Let $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, 1]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$ and the conditions are met $0 < \alpha < 2$, (6), (7), (12). Then $\|G_{m\eta} v\| \rightarrow 0$ by $n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$, $\forall v \in H$, where $G_{m\eta} = I - A_\eta g_n(A_\eta)$.

Proof.

We have

$$\begin{aligned} \|G_{m\eta} v\| &= \|(I - A_\eta g_n(A_\eta))v\| = \left\| \int_0^1 (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda v \right\| = \\ &= \left\| \int_0^1 (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} dE_\lambda v \right\| \leq \left\| \int_0^\varepsilon (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} dE_\lambda v \right\| + \left\| \int_\varepsilon^1 (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} dE_\lambda v \right\|. \\ \left\| \int_\varepsilon^1 (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} dE_\lambda v \right\| &\leq q^{n/2}(\varepsilon) \left\| \int_\varepsilon^1 dE_\lambda v \right\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

since for $\lambda \in [\varepsilon, 1]$ $|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)| \leq q(\varepsilon) < 1$.

$$\left\| \int_0^\varepsilon (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} dE_\lambda v \right\| \leq \left\| \int_0^\varepsilon dE_\lambda v \right\| = \|E_\varepsilon v\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

due to the properties of the spectral function [5–6]. Therefore, $\|G_{m\eta} v\| \rightarrow 0$ by $n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$.

Lemma 1 is proved.

The convergence condition for method (4) gives

Theorem 1. Let $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, 1]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ and the conditions are met $0 < \alpha < 2$, (6), (7), (11). Lets choose the parameter $n = n(\delta, \eta)$ in approximation (4) so that $(\delta + \eta)n(\delta, \eta) \rightarrow 0$ by $n(\delta, \eta) \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$. Then $x_{n(\delta, \eta)} \rightarrow x^*$ by $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$.

Proof.

From (4¹) we have $x_n = g_n(A_\eta)y_\delta$. Then

$$\begin{aligned} x_n - x^* &= g_n(A_\eta)y_\delta - x^* = -G_{m\eta}x^* + G_{m\eta}x^* + g_n(A_\eta)y_\delta - x^* = \\ &= -G_{m\eta}x^* + (I - A_\eta g_n(A_\eta))x^* + g_n(A_\eta)y_\delta - x^* = -G_{m\eta}x^* + g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*). \end{aligned}$$

Therefore, $x_n - x^* = -G_{m\eta}x^* + g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)$.

Because according to the condition (11) $\|g_n(A_\eta)\| \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n$, $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$, and $\|y_\delta - A_\eta x^*\| \leq \|y_\delta - y\| + \|y - A_\eta x^*\| = \|y_\delta - y\| + \|Ax^* - A_\eta x^*\| \leq \delta + \|A - A_\eta\| \|x^*\| \leq \delta + \eta \|x^*\|$, then we have $\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \leq \|G_{m\eta}x^*\| + \|g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \|G_{m\eta}x^*\| + \gamma n(\delta + \eta \|x^*\|)$.

It follows from Lemma 1 that $\|G_{m\eta}x^*\| \rightarrow 0$ by $n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$, and by the condition of theorem 1 $n(\delta + \eta) \rightarrow 0$ by $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$. Thus, $\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$.

Theorem 1 has been proved.

Theorem 2. Let $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, 1]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ and the conditions are met $0 < \alpha < 2$, (6), (8), (9), (11), (12), (13). If the exact solution is representable from the source, i.e. $x^* = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$, then the error estimate is fair:

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_s n^{-s} \rho + \gamma n(\delta + \eta \|x^*\|), \quad 0 < s < \infty.$$

Proof.

We have, using the source-like representability of the exact solution,

$$\|G_{m\eta}x^*\| = \|G_{m\eta}A^s z\| \leq \|G_{m\eta}(A^s - A_\eta^s)z\| + \|G_{m\eta}A_\eta^s z\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_s n^{-s} \rho,$$

since by lemma 1.1 [3, p. 91] $\|A_\eta^s - A^s\| \leq c_s \eta^{\min(1, s)}$, $c_s = \text{const}$ ($c_s \leq 2$ for $0 < s \leq 1$). Then

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_s n^{-s} \rho + \gamma n(\delta + \eta \|x^*\|), \quad 0 < s < \infty. \quad (14)$$

Theorem 2 has been proved.

If we minimize the right side of the estimate (14) by n , we get the value of an a priori

$$\text{stopping moment: } n_{\text{opt}} = \left[\frac{s\gamma_s \rho}{\gamma(\delta + \|x^*\|_\eta)} \right]^{1/(s+1)} = d_s \rho^{1/(s+1)} \left[\delta + \eta \|x^*\| \right]^{-1/(s+1)},$$

$$\text{where } d_s = \left(\frac{s\gamma_s}{\gamma} \right)^{1/(s+1)}. \text{ From here } n_{\text{opt}} = s \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^{-1} 2^{-s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} \left(\delta + \eta \|x^*\| \right)^{-1/(s+1)}.$$

Substitute n_{opt} in the estimate (14), we get

$$\begin{aligned} \|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\|_{\text{opt}} &\leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_s \rho \left(d_s \rho^{1/(s+1)} \right)^{-s} \left(\delta + \eta \|x^*\| \right)^{s/(s+1)} + \\ &\quad + \gamma \left(\delta + \eta \|x^*\| \right) d_s \rho^{1/(s+1)} \left(\delta + \eta \|x^*\| \right)^{-1/(s+1)} = \\ &= \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \left(\delta + \eta \|x^*\| \right)^{s/(s+1)} \left(d_s^{-s} \gamma_s \rho^{1/(s+1)} + \gamma d_s \rho^{1/(s+1)} \right) = \\ &= \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \rho^{1/(s+1)} c'_s \left(\delta + \eta \|x^*\| \right)^{s/(s+1)}, \end{aligned}$$

where $c'_s = d_s^{-s} \gamma_s + \gamma d_s = \left(s^{1/(s+1)} + s^{-s/(s+1)} \right) \gamma_s^{1/(s+1)} = (1+s) 2^{-s/(s+1)}$. From here

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\|_{\text{opt}} \leq c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + (1+s) 2^{-s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} \left(\delta + \eta \|x^*\| \right)^{s/(s+1)}.$$

3.2. The case of non-self-adjoint operators

In the case of a non-self-adjoint problem, the iterative method (4) will take the form:

$$\begin{aligned} x_{(n+1)(\eta, \delta)} &= x_{n, \delta} - \alpha_{n+1} \left(A_\eta^* A_\eta x_{n(\eta, \delta)} - A_\eta^* y_\delta \right), \quad x_{0(\eta, \delta)} = 0, \\ \alpha_{2n+1} &= \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

It can be written like this:

$$x_{n(\eta, \delta)} = g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* y_\delta. \quad (16)$$

Lemma 1 implies.

Lemma 2. Let $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leq 1$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$ and the conditions are met $0 < \alpha < 2$, (6), (7), (12). Then

$$\|K_{m\eta} v\| \rightarrow 0 \text{ by } n \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow 0, \quad \forall v \in N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}, \quad (17)$$

$$\|\tilde{K}_{m\eta} z\| \rightarrow 0 \text{ by } n \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow 0, \quad \forall z \in N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}, \quad (18)$$

where $K_{m\eta} = I - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)$, $\tilde{K}_{m\eta} = I - A_\eta A_\eta^* g_n(A_\eta A_\eta^*)$.

We use lemma 2 to prove the following theorem.

Theorem 3. Let $\|A - A_\eta\| \leq \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leq 1$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $y \in R(A)$, $\|y_\delta - y\| \leq \delta$ and the conditions are met $0 < \alpha < 2$, (6), (7), (12).). Let's choose the parameter $n = n(\delta, \eta)$ so that

$$(\delta + \eta)^2 n(\delta, \eta) \rightarrow 0 \text{ by } n(\delta, \eta) \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0. \quad (19)$$

Then $x_{n(\delta, \eta)} \rightarrow x^*$ by $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$.

Proof.

For the approximation error $x_{n(\delta, \eta)}$, we have

$$x_{n(\delta, \eta)} - x^* = -K_{m\eta} x^* + g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (y_\delta - A_\eta x^*). \quad (20)$$

Here $\|g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^*\| = \|g_n(A_\eta^* A_\eta) (A_\eta^* A_\eta)^{1/2}\| \leq \gamma_* n^{1/2}$, $\gamma_* = \sup_{n>0} \left(n^{-1/2} \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda^{1/2} |g_n(\lambda)| \right) \leq (\alpha + \beta)^{1/2}$

(see the lemma 3.1 [3, p. 35] and [6]). Because

$$\|y_\delta - A_\eta x^*\| \leq \|y_\delta - y\| + \|y - A_\eta x^*\| = \|y_\delta - y\| + \|Ax^* - A_\eta x^*\| \leq \delta + \eta \|x^*\|,$$

that $\|g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq (\alpha + \beta)^{1/2} n^{1/2} (\delta + \|x^*\| \eta)$. There fore

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \leq \|K_{m\eta} x^*\| + \|g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \|K_{m\eta} x^*\| + (\alpha + \beta)^{1/2} n^{1/2} (\delta + \eta \|x^*\|).$$

Let's show that $\|K_{m\eta} x^*\| \rightarrow 0$ by $n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$. Really,

$$\begin{aligned} \|K_{m\eta} x^*\| &= \|(I - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)) x^*\| = \left\| \int_0^1 (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda x^* \right\| = \\ &= \left\| \int_0^1 (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} dE_\lambda x^* \right\| \leq \left\| \int_0^\varepsilon (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} dE_\lambda x^* \right\| + \left\| \int_\varepsilon^1 (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} dE_\lambda x^* \right\|. \end{aligned}$$

Then $\left\| \int_\varepsilon^1 (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} dE_\lambda x^* \right\| \leq q^{n/2}(\varepsilon) \left\| \int_\varepsilon^1 dE_\lambda x^* \right\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, since for $\lambda \in [\varepsilon, 1]$

$$|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)| \leq q(\varepsilon) < 1. \text{ A } \left\| \int_0^\varepsilon (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2} dE_\lambda x^* \right\| \leq \left\| \int_0^\varepsilon dE_\lambda x^* \right\| = \|E_\varepsilon x^*\| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$$

due to the properties of the spectral function.

From the condition (19) $n(\delta + \eta)^2 \rightarrow 0$ by $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$.

From here $(\alpha + \beta)^{1/2} n^{1/2} (\delta + \eta \|x^*\|) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$.

Thus, $\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$.

Theorem 3 has been proved.

Fair

Theorem 4. Let $\|A - A_\eta\| \leq \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leq 1$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $y \in R(A)$, $\|y_\delta - y\| \leq \delta$. If the exact solution is represented as $x^* = |A|^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$, $|A| = (A^* A)^{1/2}$ and the conditions are met $0 < \alpha < 2$, (6), (8), (9), (12), (13), then the error estimate is fair

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \leq \gamma_0 c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_{s/2} n^{-s/2} \rho + (\alpha + \beta)^{1/2} n^{1/2} (\delta + \|x^*\| \eta), \quad 0 < s < \infty.$$

Proof.

In the case of a source-like representable exact solution $x^* = |A|^s z = (A^* A)^{s/2} z$ from (13) we will get $\sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda^{s/2} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_{s/2} n^{-s/2}$, where $\gamma_{s/2} = \left(\frac{s}{2(\alpha + \beta)} \right)^{s/2}$.

Then

$$\|K_{m\eta} |A_\eta|^s z\| = \| |A_\eta|^s [I - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)] z \| = \| (A_\eta^* A_\eta)^{s/2} [I - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)] z \| \leq \gamma_{s/2} n^{-s/2} \rho.$$

From here

$$\|K_{m\eta} x^*\| = \|K_{m\eta} |A|^s z\| = \|K_{m\eta} (|A_\eta|^s - |A|^s) z\| + \|K_{m\eta} |A_\eta|^s z\| \leq \gamma_0 c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_{s/2} n^{-s/2} \rho,$$

since from [3, p. 92] we have $\left| |A_\eta|^s - |A|^s \right| \leq c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1, s)}$, $c_s = \text{const}$ ($c_s \leq 2$ by $0 < s \leq 1$). From (20) we have

$$\begin{aligned} \|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| &\leq \|K_{m\eta} x^*\| + \gamma_* n^{1/2} (\delta + \|x^*\| \eta) = \|K_{m\eta} x^*\| + (\alpha + \beta)^{1/2} n^{1/2} (\delta + \|x^*\| \eta) \leq \\ &\leq \gamma_0 c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_{s/2} n^{-s/2} \rho + (\alpha + \beta)^{1/2} n^{1/2} (\delta + \|x^*\| \eta), \quad 0 < s < \infty. \end{aligned} \quad (21)$$

Theorem 4 has been proved.

Minimizing the right-hand side (21) by n , we obtain the value of the a priori stopping moment:

$$\begin{aligned} n_{\text{opt}} &= \left(\frac{s \gamma_{s/2}}{\gamma_*} \right)^{2/(s+1)} \rho^{2/(s+1)} (\delta + \|x^*\| \eta)^{-2/(s+1)} = \\ &= 2^{-s/(s+1)} s^{(s+2)/(s+1)} (\alpha + \beta)^{-1} \rho^{2/(s+1)} (\delta + \|x^*\| \eta)^{-2/(s+1)}. \end{aligned}$$

Substituting n_{opt} into the estimate (21), we obtain the optimal error estimate for the iteration method (15):

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\|_{\text{opt}} \leq \gamma_0 c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1, s)} \rho + c_s'' \rho^{1/(s+1)} (\delta + \|x^*\| \eta)^{s/(s+1)}, \quad 0 < s < \infty,$$

where $c_s'' = \left(s^{1/(s+1)} + s^{-s/(s+1)} \right) \gamma_*^{s/(s+1)} \gamma_{s/2}^{1/(s+1)} = (2s)^{-s/(2(s+1))} (s+1)$.

Thus,

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\|_{\text{opt}} \leq c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1, s)} \rho + (2s)^{-s/(2(s+1))} (s+1) \rho^{1/(s+1)} \left(\delta + \|x^*\| \eta \right)^{s/(s+1)}, \quad 0 < s < \infty.$$

Remark 3. The optimal error estimate does not depend on α and β , but n_{onm} depends on α and β . Therefore, in order to reduce the amount of computational work, it is necessary to take α and β as much of the conditions as possible $0 < \alpha < 2$, (6), (8), (9), (11), (12), (13) and in such a way that $n_{onm} \in \mathbb{Z}$.

Conclusion

In this article, some properties of the proposed explicit iteration scheme for solving ill-posed problems are studied: the convergence of approximations with an a priori choice of the regularization parameter in the initial norm of Hilbert space in the case of a bounded self-adjoint and non-self-adjoint inaccurately specified operator is proved, error estimates and estimates for stopping moments are obtained.

REFERENCES

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.
2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
3. Vaynikko, G. M. Iteracionnyje procedury v niekorrektnykh zadachakh / G. M. Vaynikko, A. Yu. Vierietennikov. – M. : Nauka, 1986. – 178 s.
4. Samarskij, A. A. Chisliennyje metody reshenija obratnykh zadach matematicheskoy fiziki / A. A. Samarskij, P. N. Vabishchievich. – M. : Editorial URSS, 2004. – 480 s.
5. Savchuk, V. F. Riegiularizacija opieratornykh uravnenij v gilbertovom prostranstvie / V. F. Savchuk, O. V. Matysik. – Brest : Brest. gos. un-t, 2008. – 196 s.
6. Matysik, O. V. Javnyje i niejavnyje iteracionnyje procedury reshenija niekorrektno postavliennykh zadach / O. V. Matysik. – Brest : Brest. gos. un-t, 2014. – 213 s.
7. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2014. – Nr 2 (116). – P. 89–95.
8. Matysik, O. V. Iteracionnaja riegiularizacija niekorrektnykh zadach / O. Matysik. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 s.
9. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr 3. – P. 373–389.
10. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – Nr 2 (119). – P. 33–41.
11. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.
12. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr 416. – P. 1–12.

УДК 517.954

**Александр Иванович Басик¹, Евгений Васильевич Грицук²,
Ольга Вадимовна Болтрушко³**

¹канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. фундаментальной математики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. математики и информатики
Брестского государственного технического университета

³студент 4-го курса физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Aliaxandr Basik¹, Evgenij Hrytsuk², Olga Boltrushko³

¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University

²Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Mathematics and Informatics
of Brest State Technical University

³4-th Year Student of the Department of Physics and Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University

email: ¹alex-basik@yandex.ru; ²gricuk_e@tut.by; ³boltrushko.ol@gmail.com

КЛАССИФИКАЦИЯ РЕГУЛЯРИЗУЕМЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается подмножество $M(4; 1; 3)$ класса эллиптических систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка псевдосимметрического типа в $\mathbf{R}^3$. Доказывается, что рассматриваемое множество $M(4; 1; 3)$ имеет две компоненты гомотопической связности. Для систем из $M(4; 1; 3)$ доказывается условие, обеспечивающее регуляризуемость краевой задачи Римана – Гильберта в произвольной ограниченной односвязной области. Полученное условие позволяет доказать, что множество регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для рассматриваемого класса систем имеет четыре компоненты гомотопической связности, а также что индекс произвольной регуляризуемой задачи равен минус единице.

Ключевые слова: эллиптическая система, регуляризуемая краевая задача, условие Лопатинского, гомотопическая классификация.

Classification of Regularisable Riemann – Hilbert Boundary Value Problems for One Class Elliptic Systems in the Three-Dimensional Space

We consider a subset $M(4; 1; 3)$ of the class of elliptic systems of four first-order differential equations of pseudosymmetric type in $\mathbf{R}^3$. It is proved that the set $M(4; 1; 3)$ has two homotopy classes. A condition that ensures the regularizability of the Riemann – Hilbert boundary value problem for this systems in an arbitrary bounded domain with smooth boundary is proved. Using this condition, it is established that the set of regularizable Riemann – Hilbert boundary value problems for systems of the set $M(4; 1; 3)$ has four homotopy classes. It is also shown that the index of an arbitrary regularizable problem is equal to minus one.

Key words: elliptic system, regularizable boundary value problem, Lopatinski condition, homotopic classification.

Введение

Пусть в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ задана эллиптическая система четырех дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \quad (1)$$

где A_1, A_2, A_3 – постоянные действительные матрицы размера 4×4 , $U = (u_1(x), \dots, u_4(x))^T$ – искомая вектор-функция, $x \in \mathbf{R}^3$, T означает транспонирование.

Известным представителем эллиптических систем вида (1) является система Моисила – Теодореску, которая является аналогом системы Коши – Римана в трехмерном пространстве и связана со статическими пространственными уравнениями Ламе [1; 2]. В. И. Шевченко получил условие, обеспечивающее регуляризуемость краевой задачи Римана – Гильберта для системы Моисила – Теодореску в произвольной односвязной области, и провел гомотопическую классификацию регуляризуемых задач для этой системы [3].

В работе [4] А. Т. Уссом выделен класс систем вида (1), являющихся трехмерными аналогами системы Коши – Римана (сокращенно ТКР-системы), и выяснена топологическая структура множества ТКР-систем.

Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для ТКР-систем проведена в [5].

В [6] проведены гомотопическая классификация эллиптических систем псевдосимметрического типа в $\mathbf{R}^3$ и в классе псевдодифференциальных операторов классификация краевых задач для таких систем.

Всюду ниже в этой статье мы будем рассматривать системы вида (1), для которых E – единичная матрица четвертого порядка, а коэффициенты A_2 и A_3 имеют вид

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k & b_k & 0 \\ -a_k & 0 & 0 & -b_k \\ -b_k & 0 & 0 & a_k \\ 0 & b_k & -a_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 2, 3), \quad (2)$$

где $a_2, a_3, b_2, b_3 \in \mathbf{R}$.

Множество всех эллиптических систем (1) с коэффициентами (2) обозначим $M(4; 1; 3)$. Это множество образует подкласс в классе эллиптических систем псевдосимметрического типа в $\mathbf{R}^3$. Отметим, что набором чисел (a_2, b_2, a_3, b_3) система из $M(4; 1; 3)$ определяется однозначно.

В настоящей статье проводится гомотопическая классификация множества $M(4; 1; 3)$. Также доказывается критерий, обеспечивающий регуляризуемость произвольной краевой задачи Римана – Гильберта для систем класса $M(4; 1; 3)$, и проводится гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач.

Гомотопическая классификация множества $M(4; 1; 3)$

Лемма 1. Система (1) является эллиптической тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$.

Доказательство. Эллиптичность системы (1) означает, что характеристическая матрица этой системы

$$A(\xi) = A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3$$

является невырожденной при каждом ненулевом векторе $\xi \in \mathbf{R}^3$.

Нетрудно убедиться, что

$$\det A(\xi) = (\xi_1^2 + (a_2\xi_2 + a_3\xi_3)^2 + (b_2\xi_2 + b_3\xi_3)^2)^2.$$

Уравнение $\det A(\xi) = 0$ равносильно линейной однородной системе уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 = 0, \\ a_2\xi_2 + a_3\xi_3 = 0, \\ b_2\xi_2 + b_3\xi_3 = 0, \end{cases}$$

которая имеет только нулевое решение в том и только том случае, когда ее определитель отличен от нуля, т. е. когда $a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$. Лемма доказана.

Две эллиптические системы из множества $M(4; 1; 3)$ назовем гомотопными, если их можно соединить друг с другом непрерывной деформацией коэффициентов в указанном классе без нарушения условия эллиптичности. Нетрудно видеть, что введенное отношение гомотопии на множестве $M(4; 1; 3)$ является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности называются компонентами гомотопической связности.

Вопрос о гомотопической классификации эллиптических систем был сформулирован И. М. Гельфандом, И. Г. Петровским и Г. Е. Шиловым [7] и состоит в нахождении количества компонент гомотопической связности, гомотопических инвариантов и простейших представителей компонент. Отметим, что к настоящему времени этот вопрос далек от своего окончательного ответа.

Обозначим через $M_+(4; 1; 3)$ совокупность всех систем класса $M(4; 1; 3)$, для которых выполняется неравенство $a_2b_3 - a_3b_2 > 0$, а через $M_-(4; 1; 3)$ – для которых $a_2b_3 - a_3b_2 < 0$.

Теорема 2. *Множество $M(4; 1; 3)$ имеет две компоненты гомотопической связности $M_+(4; 1; 3)$ и $M_-(4; 1; 3)$. Каждая система из $M_+(4; 1; 3)$ гомотопна системе*

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_1} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

а из класса $M_-(4; 1; 3)$ – системе

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0, \\ -\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_1} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Гомотопическим инвариантом является знак выражения $a_2b_3 - a_3b_2$.

Доказательство. Покажем, что произвольная система из класса $M_+(4; 1; 3)$ не гомотопна ни одной системе из $M_-(4; 1; 3)$. Предположим противное: пусть система

$A(\partial)U = 0$ из класса $M_+(4; 1; 3)$, соответствующая набору $(a_2^0, b_2^0, a_3^0, b_3^0)$, гомотопна системе $B(\partial)U = 0$ из класса $M_-(4; 1; 3)$, соответствующей набору $(a_2^1, b_2^1, a_3^1, b_3^1)$.

Это означает, что существует семейство систем $C_t(\partial)U = 0$ ($t \in [0; 1]$) класса $M(4; 1; 3)$, определяемое набором непрерывных на отрезке $[0; 1]$ функций $(a_2(t), b_2(t), a_3(t), b_3(t))$, такое, что

$$(a_2(0), b_2(0), a_3(0), b_3(0)) = (a_2^0, b_2^0, a_3^0, b_3^0) \text{ и } (a_2(1), b_2(1), a_3(1), b_3(1)) = (a_2^1, b_2^1, a_3^1, b_3^1).$$

Рассмотрим непрерывную на отрезке $[0; 1]$ функцию

$$F(t) = a_2(t)b_3(t) - a_3(t)b_2(t).$$

Поскольку $F(0) = a_2^0 b_3^0 - a_3^0 b_2^0 > 0$ и $F(1) = a_2^1 b_3^1 - a_3^1 b_2^1 < 0$, то найдется точка $t_0 \in [0; 1]$ в которой $F(t_0) = 0$.

Согласно лемме 1, система $C_{t_0}(\partial)U = 0$ не является эллиптической. Полученное противоречие доказывает, что множество $M(4; 1; 3)$ имеет по крайней мере две компоненты гомотопической связности.

Покажем теперь, что множество $M_+(4; 1; 3)$ гомотопически связно. Пусть $A(\partial)U = 0$ – произвольная система из $M_+(4; 1; 3)$, определяемая набором (a_2, b_2, a_3, b_3) и условием $a_2 b_3 - a_3 b_2 > 0$.

Тогда векторы $a = (a_2, a_3)$ и $b = (b_2, b_3)$ образуют правый репер на плоскости. Согласно результатам книги [8, с. 212], репер Oab можно непрерывной деформацией с сохранением условия одноименности, перевести в стандартный базис плоскости $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. Последнее означает, что система $A(\partial)U = 0$ гомотопна системе (3).

Векторы $a = (a_2, a_3)$ и $b = (b_2, b_3)$, образующие левый репер на плоскости, можно непрерывной деформацией с сохранением условия одноименности перевести в базис плоскости $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, -1)$ [8, с. 212]. Тем самым доказано, что каждая система из $M_-(4; 1; 3)$ гомотопна системе (4).

Теорема доказана.

Условие регуляризуемости задачи Римана – Гильберта для систем класса $M(4; 1; 3)$

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ – ограниченная односвязная область, границей которой является гладкая поверхность Ляпунова $\partial\Omega$.

Задача Римана – Гильберта для системы (1) состоит в отыскании решения этой системы, непрерывно дифференцируемого в Ω и непрерывного по Гельдеру в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, удовлетворяющего на $\partial\Omega$ граничным условиям

$$B(y)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega), \quad (5)$$

где B – матрица-функция размера 2×4 , а f – двухкомпонентная вектор-функция, непрерывные по Гельдеру на поверхности $\partial\Omega$.

Задача (1), (5) называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я. Б. Лопатинского.

Это условие обеспечивает нетеровость задачи Римана – Гильберта как в классической постановке, так и в широкой шкале гильбертовых пространств [9; 10], и пред-

ставляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора, состоящее в том, что ранг матрицы

$$L(y, \tau) = B(y) \cdot \int_{\gamma} A^{-1}(\lambda \nu(y) + \tau(y)) d\lambda \quad (6)$$

равен двум в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом ненулевом касательном к $\partial\Omega$ в точке y векторе $\tau = \tau(y)$.

Здесь через $\nu = \nu(y)$ обозначен единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке y , и интегрирование в (6) ведется по простому замкнутому контуру γ , лежащему в верхней комплексной λ -полуплоскости и охватывающему корень $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ($\beta > 0$) уравнения

$$\det A(\lambda \nu(y) + \tau(y)) = 0.$$

Через Λ_{jk} обозначим минор матрицы $B(y)$, составленный из ее j -го и k -го столбцов ($j, k = 1, 2, 3, 4$), и рассмотрим векторное поле

$$P(y) = (\Lambda_{14} + \Lambda_{23}; a_2(-\Lambda_{13} + \Lambda_{24}) + b_2(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}); a_3(-\Lambda_{13} + \Lambda_{24}) + b_3(\Lambda_{12} + \Lambda_{34})). \quad (7)$$

Теорема 3. Задача (1), (5) регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке $y \in \partial\Omega$ выполняется неравенство

$$\langle \nu(y); P(y) \rangle \neq 0 \quad (8)$$

(здесь $\langle \cdot; \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbf{R}^3$).

Доказательство. Положим

$$a(\xi) = a_2\xi_2 + a_3\xi_3, \quad b(\xi) = b_2\xi_2 + b_3\xi_3, \quad c(\xi) = \xi_1^2 + a^2(\xi) + b^2(\xi).$$

Вычислим матрицу Лопатинского (6) задачи (1), (5). Так как

$$A^{-1}(\xi) = \frac{1}{\xi_1^2 + a^2(\xi) + b^2(\xi)} \begin{pmatrix} \xi_1 & -a(\xi) & -b(\xi) & 0 \\ a(\xi) & \xi_1 & 0 & b(\xi) \\ b(\xi) & 0 & \xi_1 & -a(\xi) \\ 0 & -b(\xi) & a(\xi) & \xi_1 \end{pmatrix},$$

то, согласно интегральной формуле Коши, получим

$$L(y, \tau) = B(y) \cdot \frac{2\pi i}{c(\nu)(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)} \begin{pmatrix} \lambda_1 \nu_1 + \tau_1 & -a(\lambda_1 \nu + \tau) & -b(\lambda_1 \nu + \tau) & 0 \\ a(\lambda_1 \nu + \tau) & \lambda_1 \nu_1 + \tau_1 & 0 & b(\lambda_1 \nu + \tau) \\ b(\lambda_1 \nu + \tau) & 0 & \lambda_1 \nu_1 + \tau_1 & -a(\lambda_1 \nu + \tau) \\ 0 & -b(\lambda_1 \nu + \tau) & a(\lambda_1 \nu + \tau) & \lambda_1 \nu_1 + \tau_1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через H_{jk} минор матрицы Я. Б. Лопатинского (6), составленный из ее j -го и k -го столбцов ($j, k = 1, 2, 3, 4$).

Тогда

$$H_{12} = H_{34}, \quad H_{13} = -H_{24}, \quad H_{14} = H_{23},$$

и с точностью до ненулевого множителя $2\pi i / (c(\nu)(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1))$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}H_{12} &= -b(\xi)(b(\xi)(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + a(\xi)(-\Lambda_{13} + \Lambda_{24}) + \xi_1(\Lambda_{14} + \Lambda_{23})), \\H_{13} &= a(\xi)(b(\xi)(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + a(\xi)(-\Lambda_{13} + \Lambda_{24}) + \xi_1(\Lambda_{14} + \Lambda_{23})), \\H_{14} &= \xi_1(b(\xi)(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + a(\xi)(-\Lambda_{13} + \Lambda_{24}) + \xi_1(\Lambda_{14} + \Lambda_{23})),\end{aligned}$$

где $\xi = (\alpha + i\beta)\nu + \tau$.

Условие максимальности ранга матрицы Я. Б. Лопатинского (6) равносильно тому, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом единичном касательном векторе $\tau(y)$ к $\partial\Omega$ в точке y выполняется неравенство

$$|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 \neq 0. \quad (9)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}&|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 = \\&= (|\xi_1|^2 + |a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2) |b(\xi)(\Lambda_{12} + \Lambda_{34}) + a(\xi)(-\Lambda_{13} + \Lambda_{24}) + \xi_1(\Lambda_{14} + \Lambda_{23})|^2 = \\&= (|\xi_1|^2 + |a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2) |\langle \tau; P \rangle + \alpha \langle \nu; P \rangle + i\beta \langle \nu; P \rangle|^2.\end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что выполнение условия (9) равносильно утверждению теоремы. Теорема доказана.

Отметим, что условие регуляризуемости краевой задачи Римана – Гильберта в виде (8) было ранее установлено для системы Моисила – Теодореску [3], для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [5], для эллиптических кососимметрических систем в $\mathbf{R}^3$ [11], для некоторых эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$ [12]. Отметим также, что метод В. И. Шевченко, примененный им для гомотопической классификации регуляризуемых задач для голоморфного вектора [3], с успехом был применен к гомотопической классификации регуляризуемых задач для других классов систем в работах [5; 11; 12]. В следующем разделе настоящей статьи мы этим методом проведем классификацию регуляризуемых задач для систем из $M(4; 1; 3)$.

Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для систем класса $M(4; 1; 3)$

Две регуляризуемые задачи Римана – Гильберта для систем из $M(4; 1; 3)$ называются гомотопными, если существует непрерывная деформация одной задачи в другую, не нарушающая условия Лопатинского и сохраняющая непрерывность по Гельдеру коэффициентов этих задач.

Вопрос о гомотопической классификации регуляризуемых краевых задач был сформулирован И. М. Гельфандом в 1960 г. и состоит в определении числа компонент связности, а также в указании представителей этих компонент и в установлении гомотопических инвариантов эллиптических псевдодифференциальных операторов, задаваемых регуляризуемыми краевыми задачами [13].

Введем следующие обозначения:

$\mathfrak{R}$ – множество регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта (1), (2), (5);

$\mathfrak{R}_+^+$ – множество регуляризуемых задач Римана – Гильберта (1), (2), (5), для которых выполняется неравенство $\langle \nu(y); P(y) \rangle > 0$ всюду на $\partial\Omega$ и $a_2b_3 - a_3b_2 > 0$;

$\mathfrak{R}_+^-$ – множество регуляризуемых задач (1), (2), (5), для которых $\langle \nu(y); P(y) \rangle > 0$ всюду на $\partial\Omega$ и $a_2b_3 - a_3b_2 < 0$;

$\mathfrak{R}_-^-$ – множество регуляризуемых задач (1), (2), (5), для которых $\langle \nu(y); P(y) \rangle < 0$ всюду на $\partial\Omega$ и $a_2b_3 - a_3b_2 < 0$;

$\mathfrak{R}_-^+$ – множество регуляризуемых задач (1), (2), (5), для которых $\langle \nu(y); P(y) \rangle < 0$ всюду на $\partial\Omega$ и $a_2b_3 - a_3b_2 > 0$.

Теорема 4. Множество $\mathfrak{R}$ регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для эллиптических систем класса $M(4;1;3)$ имеет четыре компоненты гомотопической связности $\mathfrak{R}_+^+$, $\mathfrak{R}_+^-$, $\mathfrak{R}_-^+$, $\mathfrak{R}_-^-$. Гомотопическими инвариантами являются знак выражения $a_2b_3 - a_3b_2$ и знак скалярного произведения $\langle \nu(y); P(y) \rangle$.

Доказательство. Достаточно показать связность множеств $\mathfrak{R}_+^+$, $\mathfrak{R}_+^-$, $\mathfrak{R}_-^+$ и $\mathfrak{R}_-^-$. Действительно, поскольку поверхность $\partial\Omega$ является связной и векторное поле $P(y)$ непрерывно на поверхности $\partial\Omega$, то скалярное произведение $\langle \nu(y); P(y) \rangle$ сохраняет знак на $\partial\Omega$, и, следовательно, задачи, для которых соответствующие скалярные произведения имеют разные знаки, не гомотопны.

Заметим также, что если знаки выражений $a_2b_3 - a_3b_2$ систем двух задач противоположны, то эти задачи также не гомотопны (теорема 2).

Пусть матрица $B(y)$ граничного условия (5) имеет вид

$$B(y) = \begin{pmatrix} m_1(y) & m_2(y) & m_3(y) & m_4(y) \\ n_1(y) & n_2(y) & n_3(y) & n_4(y) \end{pmatrix}.$$

Докажем гомотопическую связность множества $\mathfrak{R}_+^+$, следуя работе [3].

Поскольку в каждой точке $y \in \partial\Omega$ $\text{rank } B(y) = 2$ (в противном случае ранг матрицы Лопатинского (6) меньше 2), то первая строка $m(y)$ матрицы $B(y)$ не обращается в нуль на поверхности $\partial\Omega$. Поэтому существует [14] непрерывное отображение $M : \partial\Omega \times [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$ такое, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$

$$M(y, 0) = m(y) \text{ и } M(y, 1) = (1, 0, 0, 0),$$

и при каждом $t \in [0; 1]$ вектор-функция $M(\cdot, t)$ непрерывна по Гельдеру на $\partial\Omega$.

Проведем гомотопию матрицы граничного оператора задачи (1), (2), (5). Для этого рассмотрим линейную систему уравнений относительно неизвестной строки $N(y, t) = (N_1(y, t), N_2(y, t), N_3(y, t), N_4(y, t))$

$$\Xi(y, t)N^T(y, t) = \tilde{P}(y, t), \quad (10)$$

где матрица левой части системы (10) имеет вид

$$\Xi = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ -M_4 & -M_3 & M_2 & M_1 \\ a_2M_3 - b_2M_2 & -a_2M_4 + b_2M_1 & -a_2M_1 - b_2M_4 & a_2M_2 + b_2M_3 \\ a_3M_3 - b_3M_2 & -a_3M_4 + b_3M_1 & -a_3M_1 - b_3M_4 & a_3M_2 + b_3M_3 \end{pmatrix}$$

(для упрощения записей точка $(y, t) \in \partial\Omega \times [0; 1]$, в которой вычисляются элементы матрицы, не указывается), а правая часть системы (10):

$$\tilde{P}(y, t) = \begin{pmatrix} (1-t)(m_1(y)n_1(y) + m_2(y)n_2(y) + m_3(y)n_3(y) + m_4(y)n_4(y)) \\ (1-t)P_1(y) + t\nu_1(y) \\ (1-t)P_2(y) + t\nu_2(y) \\ (1-t)P_3(y) + t\nu_3(y) \end{pmatrix},$$

где $P(y) = (P_1(y), P_2(y), P_3(y))$ – векторное поле (7), $\nu(y) = (\nu_1(y), \nu_2(y), \nu_3(y))$ – единичное поле внутренних нормалей на поверхности $\partial\Omega$.

Заметим, что при всех $y \in \partial\Omega$ и $t \in [0; 1]$

$$\det \Xi(y, t) = (a_2b_3 - a_3b_2)(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2)^2 \neq 0.$$

Следовательно, система уравнений (10) при всех $y \in \partial\Omega$ и $t \in [0; 1]$ имеет единственное решение $N(y, t)$.

Нетрудно видеть, что полученное отображение $N : \partial\Omega \times [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}^4$ непрерывно и при каждом $t \in [0; 1]$ является непрерывным по Гельдеру на поверхности $\partial\Omega$.

Отметим, что при $t = 0$ вторая строка матрицы $B(y)$ является решением системы (10).

Рассмотрим гомотопию задачи (1), (2), (5), при которой система (1) остается неизменной, а матрица соответствующего этой системе граничного условия

$$B(y, t)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega), \quad (11)$$

имеет вид

$$B(y, t) = \begin{pmatrix} M_1(y, t) & M_2(y, t) & M_3(y, t) & M_4(y, t) \\ N_1(y, t) & N_2(y, t) & N_3(y, t) & N_4(y, t) \end{pmatrix}.$$

Векторное поле $P(y, t)$ (формула (7)), отвечающее задаче (1), (2), (11), удовлетворяет соотношению $P(y, t) = (1-t)P(y) + t\nu(y)$.

Поэтому при всех $y \in \partial\Omega$ и любом $t \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$\langle \nu(y); P(y, t) \rangle = (1-t)\langle \nu(y); P(y) \rangle + t > 0,$$

что в силу теоремы 3 означает регуляризуемость задачи (1), (2), (11) при каждом $t \in [0; 1]$. Граничное условие (11) при $t = 1$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_2\nu_3(y) - a_3\nu_2(y)}{a_2b_3 - a_3b_2} & \frac{b_2\nu_3(y) - b_3\nu_2(y)}{a_2b_3 - a_3b_2} & \nu_1(y) \end{pmatrix} U(y) = f(y), \quad (12)$$

а поле (7) совпадает с полем внутренних нормалей $\nu(y)$ на $\partial\Omega$.

Как было показано при доказательстве теоремы 2, система (1), (2) гомотопна системе (3) (при этом в процессе гомотопии сохраняется знак выражения $a_2b_3 - a_3b_2$), поэтому произвольная задача из $\mathcal{R}_+^+$ гомотопна задаче Римана – Гильберта для системы (3) и граничного условия

$$\begin{cases} u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \\ (u_2\nu_3 - u_3\nu_2 + u_4\nu_1)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \end{cases} \quad (y \in \partial\Omega). \quad (13)$$

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{R}_+^-$. В этом случае, система (1), (2) гомотопна системе (4), а произвольная задача из $\mathfrak{R}_+^-$ гомотопна задаче Римана – Гильберта для системы (4) и граничного условия

$$\begin{cases} u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \\ (u_4v_1 - u_3v_2 - u_2v_3)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \end{cases} \quad (y \in \partial\Omega). \quad (14)$$

Аналогично доказывается, что каждая задача из множества $\mathfrak{R}_-^+$ гомотопна задаче для системы (3) с граничным условием

$$\begin{cases} u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \\ (-u_4v_1 + u_3v_2 - u_2v_3)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \end{cases} \quad (y \in \partial\Omega), \quad (15)$$

а из $\mathfrak{R}_-^-$ – задаче для системы (4) с граничным условием

$$\begin{cases} u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \\ (-u_4v_1 + u_3v_2 + u_2v_3)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \end{cases} \quad (y \in \partial\Omega). \quad (16)$$

Отметим основные отличия в рассуждениях. В системе уравнений (10) при $\langle v(y); P(y) \rangle < 0$ нужно положить

$$\tilde{P}(y, t) = \begin{pmatrix} (1-t)(m_1(y)n_1(y) + m_2(y)n_2(y) + m_3(y)n_3(y) + m_4(y)n_4(y)) \\ (1-t)P_1(y) - tv_1(y) \\ (1-t)P_2(y) - tv_2(y) \\ (1-t)P_3(y) - tv_3(y) \end{pmatrix}.$$

Тогда векторное поле $P(y, t)$ (формула (7)), отвечающее задаче (1), (2), (11), удовлетворяет соотношению $P(y, t) = (1-t)P(y) - tv(y)$.

Поэтому при всех $y \in \partial\Omega$ и $t \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$\langle v(y); P(y, t) \rangle = (1-t)\langle v(y); P(y) \rangle - t < 0,$$

что в силу теоремы 3 означает регуляризуемость задачи (1), (2), (11) при каждом $t \in [0; 1]$. Граничное условие (11) при $t = 1$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_3v_2(y) - a_2v_3(y)}{a_2b_3 - a_3b_2} & \frac{b_3v_2(y) - b_2v_3(y)}{a_2b_3 - a_3b_2} & -v_1(y) \end{pmatrix} U(y) = f(y),$$

а поле (7) на поверхности $\partial\Omega$ совпадает с полем $-v(y)$.

Теорема доказана.

Следствие. Индекс произвольной регуляризуемой задачи Римана – Гильберта (1), (2), (5) равен минус единице.

Доказательство. Поскольку индексы гомотопных регуляризуемых задач равны, то для вычисления индекса произвольной задачи из множества $\mathfrak{R}$ достаточно вычислить индекс простейших задач.

Рассмотрим задачу Римана – Гильберта для системы (3) с граничным условием (13). Заменой $V = (u_4, -u_3, u_2)$ и $W = -u_1$ эта задача приводится к виду

$$\operatorname{div} V(x) = 0, \operatorname{rot} V(x) = \operatorname{grad} W(x) \quad (x \in \Omega), \quad (17)$$

$$W|_{\partial\Omega} = -f_1(y), \langle V; \nu \rangle|_{\partial\Omega} = f_2(y) \quad (y \in \partial\Omega). \quad (18)$$

Индекс задачи (17), (18) вычислен в работе [14] и равен минус единице.

Заменой $V = (-u_4, u_3, -u_2)$ и $W = u_1$ задача Римана – Гильберта для системы (3) с граничным условием (15) приводится к виду (17), (18) (с тем лишь отличием, что $W|_{\partial\Omega} = f_1(y)$).

Заменой $V = (u_4, -u_3, -u_2)$ и $W = u_1$ задача Римана – Гильберта для системы (4) с граничным условием (14) приводится к виду (17), (18) (с тем лишь отличием, что $W|_{\partial\Omega} = f_1(y)$).

Заменой $V = (-u_4, u_3, u_2)$ и $W = -u_1$ задача Римана – Гильберта для системы (4) с граничным условием (16) приводится к виду (17), (18).

Что и требовалось доказать.

Заключение

В настоящей статье рассматривается подкласс $M(4; 1; 3)$ множества эллиптических систем псевдосимметрического типа в трехмерном пространстве.

Доказывается, что:

- 1) множество $M(4; 1; 3)$ имеет две компоненты гомотопической связности;
- 2) регуляризуемость задачи Римана – Гильберта для систем класса $M(4; 1; 3)$ равносильна невхождению специального векторного поля, построенного по коэффициентам задачи, в касательную плоскость к границе области в каждой точке;
- 3) множество регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для систем класса $M(4; 1; 3)$ имеет четыре компоненты гомотопической связности;
- 4) индекс регуляризуемой задачи Римана – Гильберта для систем класса $M(4; 1; 3)$ равен минус единице.

Отметим, что в четырехмерном пространстве для класса эллиптических систем псевдосимметрического типа отсутствуют регуляризуемые краевые задачи [15; 16].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Moisil, G. G. Fonctions holomorphes dans l'espace / G. G. Moisil, N. Theodorescu // *Mathematica*. – 1931. – Vol. 5. – P. 141–153.
2. Бицадзе, А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А. В. Бицадзе. – М. : Наука, 1966. – 202 с.
3. Шевченко, В. И. Гомотопическая классификация задач Римана – Гильберта для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // *Мат. физика : респ. межвед. сб.* – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.
4. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // *Докл. НАН Беларуси*. – 2002. – Т. 46, № 5. – С. 30–34.
5. Усс, А. Т. Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси*. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.
6. Басик, А. И. Гомотопическая классификация краевых задач Римана – Гильберта для некоторых классов эллиптических систем дифференциальных уравнений в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, А. Т. Усс // *Тр. Ин-та математики НАН Беларуси*. – 2004. – Т. 12, № 2. – С. 33–37.

7. Гельфанд, И. М. Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными / И. М. Гельфанд, И. Г. Петровский, Г. Е. Шиллов // Тр. Третьего Всесоюз. мат. съезда, Москва, июнь-июль 1956 : в 4 т. / АН СССР. – М., 1958. – Т. 3 : Обзорные доклады / редкол. А. А. Абрамов [и др.]. – С. 65–72.
8. Александров, П. С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры / П. С. Александров ; сост. А. С. Пархоменко. – М. : Наука, 1968. – 911 с.
9. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.
10. Лопатинский, Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я. Б. Лопатинский // Укр. мат. журн. – 1953. – Т. 5. – С. 123–151.
11. Басик, А. И. Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук // Математика. Інформаційні технології : зб. ст. – Луцьк, 2019. – № 6. – С. 12–18.
12. Басик, А. И. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. А. Грицук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16. – Doi: <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-7-16>
13. Гельфанд, И. М. Об эллиптических уравнениях / И. М. Гельфанд // Успехи мат. наук. – 1960. – Т. 15, вып. 3. – С. 121–132.
14. Шевченко, В. И. О некоторых краевых задачах для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Мат. физика : респ. межвед. сб. – Киев, 1970. – Вып. 8. – С. 172–186.
15. Виноградов, В. С. Граничная задача для псевдосимметрических систем / В. С. Виноградов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 161–163.
16. Басик, А. И. О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в $\mathbf{R}^4$ / А. И. Басик, А. Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410–412.

REFERENCES

1. Moisil, G. G. Fonctions holomorphes dans l'espase / G. G. Moisil, N. Theodorescu // Mathematica. – 1931. – Vol. 5. – P. 141–153.
2. Biczadze, A. V. Krajevyje zadachi dla elliptichieskikh uravnenij vtorgo poriadka / A. V. Biczadze. – M. : Nauka, 1966. – 202 s.
3. Shevchienko, V. I. Gomotopichieskaja klassifikacija zadach Rimana – Gil'berta dla golomorfnoho vektora / V. I. Shevchienko // Mat. fizika : riesp. miezhvied. sb. – Kijev, 1975. – Vyp. 17. – S. 184–186.
4. Uss, A. T. Gomotopichieskaja klassifikacija triokhmiernykh analogov sistiemy Koshi – Rimana / A. T. Uss // Dokl. NAN Bielarusi. – 2002. – Т. 46, № 5. – S. 30–34.
5. Uss, A. T. Krajevaja zadacha Rimana – Gil'berta dla triokhmiernykh analogov sistiemy Koshi – Rimana / A. T. Uss // Dokl. Nac. akad. nauk Bielarusi. – 2003. – Т. 47, № 6. – S. 10–15.
6. Basik, A. I. Gomotopichieskaja klassifikacija krajevyykh zadach Rimana – Gil'berta dla niekatorykh klassov elliptichieskikh sistiem diffierencial'nykh uravnenij v $\mathbf{R}^3$ / A. I. Basik, A. T. Uss // Tr. In-ta matematiki NAN Bielarusi. – 2004. – Т. 12, № 2. – S. 33–37.
7. Giel'fand, I. M. Tieorija sistiem diffierencial'nykh uravnenij s chastnymi proizvodnymi / I. M. Giel'fand, I. G. Pietrovskij, G. Ye. Shilov // Tr. Triet'jego Vsiesojuz. mat.

s'jezda, Moskva, ijun'-ijul' 1956 : v 4 t. / AN SSSR. – M., 1958. – T. 3 : Obzornyje doklady ; riedkol. A. A. Abramov [i dr.]. – S. 65–72.

8. Alieksandrov, P. S. Liekcii po analitichieskoj gieometrii, popolniennyje nieobkholdimymi sviedienijami iz algiebry / P. S. Alieksandrov ; sost. A. S. Parkhomienko. – M. : Nauka, 1968. – 911 s.

9. Agranovich, M. S. Elliptichieskije singuliarnyje integro-diffierencial'nyje opieratory / M. S. Agranovich // Uspiekh mat. nauk. – 1965. – T. 20, vyp. 5. – S. 3–120.

10. Lopatinskij, Ya. B. Ob odnom sposobie priviedienija granichnykh zadach dla sistemy diffierencial'nykh uravnenij elliptichieskogo tipa k rieguliarnym integral'nyim uravnenijam / Ya. B. Lopatinskij // Ukr. mat. zhurn. – 1953. – T. 5. – S. 123–151.

11. Basik, A. I. Gomotopichieskaja klassifikacija rieguliarizujemykh krajevykh zadach Rimana – Gil'berta dla odnogo klassa elliptichieskikh sistem v $\mathbf{R}^3$ / A. I. Basik, Ye. V. Gricuk // Matematika. Informacijni tekhnologiji : zb. st. – Luc'k, 2019. – № 6. – S. 12–18.

12. Basik, A. I. Zadacha Rimana – Gil'berta dla elliptichieskikh sistem ortogonal'nogo tipa v $\mathbf{R}^3$ / A. I. Basik, Ye. V. Gricuk, T. A. Gricuk // Vies. Nac. akad. navuk Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2020. – T. 56, № 1. – S. 7–16. – Doi: <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-7-16>

13. Giel'fand, I. M. Ob elliptichieskikh uravnenijakh / I. M. Giel'fand // Uspiekh mat. nauk. – 1960. – T. 15, vyp. 3. – S. 121–132.

14. Shevchienko, V. I. O niekotorykh krajevykh zadachakh dla golomorfного vektora / V. I. Shevchienko // Mat. fizika : riesp. miezhvied. sb. – Kijev, 1970. – Vyp. 8. – S. 172–186.

15. Vinogradov, V. S. Granichnaja zadacha dla psievdosimmetrichieskikh sistem / V. S. Vinogradov // Diffierenc. uravnenija. – 1985. – T. 21, № 1. – S. 161–163.

16. Basik, A. I. O krajevykh zadachakh dla elliptichieskikh psievdosimmetrichieskikh sistem piervogo poriadka v $\mathbf{R}^4$ / A. I. Basik, A. T. Uss // Diffierenc. uravnenija. – 2003. – T. 38, № 3. – S. 410–412.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 11.11.2024

УДК 519.9

Anastasia Zhuk¹, Helena Zashchuk², Tatsiana Karymava³^{1,2,3}*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Informatics of Brest State Technical University***Анастасія Ігорэўна Жук¹, Елена Николаевна Защук²,****Татьяна Ивановна Каримова³**^{1,2,3}*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. математики и информатики**Брестского государственного технического университета**e-mail: ¹aizhuk85@mail.ru; ²shvichkina@tut.by; ³kati_2007@mail.ru***SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE LEBESGUE SPACES**

Herein, we investigate systems of nonautonomous differential equations with generalized coefficients using the algebra of new generalized functions. We consider a system of nonautonomous differential equations with generalized coefficients as a system of equations in differentials in the algebra of new generalized functions. The solution of such a system is a new generalized function. It is shown that the different interpretations of the solutions of the given systems can be described by a unique approach of the algebra of new generalized functions. In this paper, for the first time in the literature, we describe associated solutions of the system of nonautonomous differential equations with generalized coefficients in the Lebesgue spaces $L_p(T)$ with functions that satisfy the linear growth condition.

Key words: algebra of new generalized functions, differential equations with generalized coefficients, functions of finite variation.

Системы дифференциальных уравнений в пространствах Лебега

Исследуются системы неавтономных дифференциальных уравнений в алгебре новых обобщенных функций. Система неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами рассматривается как система уравнений в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций. Решением таких систем является новая обобщенная функция. Показано, что различные интерпретации решений данных систем могут быть описаны при помощи единственного подхода, использующего новые обобщенные функции. В статье, в отличие от предшествующих работ, описаны ассоциированные решения систем неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в пространствах Лебега $L_p(T)$, содержащие функции, удовлетворяющие условию линейного роста.

Ключевые слова: алгебра новых обобщенных функций, дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами, функции ограниченной вариации.

Introduction

In this paper, we will consider the following system of equations with generalized coefficients on $T \in [0; a] \subset \mathbb{R}$

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^q f^{ij}(t, x(t)) \dot{L}^j(t), \quad i = \overline{1, p} \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

where $f^{ij}, i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$ are some functions, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), \dots, x^p(t)]$ and $\dot{L}^j(t), j = \overline{1, q}$ are functions of finite variation on T . $\dot{L}^j(t)$ are derivatives in the distributional sense or we can say that $\dot{L}^j(t)$ are derivatives in the Schwartz space. In general, since $\dot{L}^j(t)$ is the distribution and $f^{ij}(t, x(t))$ not smooth functions, the products $f^{ij}(t, x(t)) \dot{L}^j(t)$ are not well defined and the solution of system (1) essentially depends on the interpretation. System (1)

can describe the model of the rocket flight process or the model of the control problems with impulse actions. Let us recall some approaches to the interpretation of system (1).

The first approach is concerned with considering the system of equations in the framework of the distribution theory. According to this approach, once the product of distributions from some classes is defined, then one tries to find the solution of the system of equations (1) in these classes of distributions. For example, in papers [1; 2] the product of some distributions and discontinuous functions was defined. See also monograph [3] for another definition. Notice that the solutions of system (1) obtained using the products from [1–3] are different.

The second approach is to interpret system (1) as the following system of integral equations:

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{ij}(s, x(s)) \dot{L}^j(s) ds, \quad i = \overline{1, p},$$

where the integrals are understood in the Lebesgue-Stieltjes, Perron-Stieltjes, etc., sense [4; 5].

But in this approach the solution of the system of integral equations depends on the interpretation of the integral and the definition of the functions $x^i(t)$ in the discontinuity points of $L^j(t)$.

The third approach is based on the idea of the approximation of the solution of system (1) by the solutions of the system of ordinary differential equations, which are constructed using the smooth approximation of the functions $L^j(t)$. In monograph [3], it is shown that in this case the limit of the solutions of the smoothed equations exists.

In this paper, we will consider the system of equations (1) using the algebra of new generalized functions from [6]. Thus, we will interpret system of equations (1) as a system of equations in the differentials in the algebra of new generalized functions. Such interpretation says that the solution of system (1) is a new generalized function. In papers [7; 8] an ordinary nonlinear equation with generalized coefficients in the algebra of new generalized functions is considered.

In previous papers [9–12] the general view of system (1) were considered. The coefficients in such systems are generalized derivatives of arbitrary functions of finite variation $L^j(t)$. Using the given sequence of numbers $h_n \rightarrow 0$ we construct a sequence of approximating equations, and the generalized solution is defined as the limit of a sequence of the solutions of approximating equations.

It is found that generalized solution exists only under some additional conditions for the behaviour of the sequence h_n in the case of discontinuous functions $L^j(t)$ and different generalized solutions exist for different sequences h_n .

In papers [13; 14] the system of nonlinear differential equations, the coefficients of which are generalized derivatives of the continuous function of finite variation $L^j(t)$ is investigated.

The main purpose of this article is to show that under some conditions this new generalized function associates with some ordinary function, which is natural to call the solution of system (1).

We will describe associated solutions of the approximated systems used in previous similar articles, we will obtain the main results in the Lebesgue spaces $L_p(T)$ as in [15], but we will consider that functions f^{ij} , $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$ are functions that satisfy the linear growth condition.

The algebra of new generalized functions

In this section, we recall the definition of the algebra of new generalized functions from [6]. At first, we define an extended real line $\tilde{\mathfrak{R}}$ using a construction typical for non-standard analysis.

Let $\overline{\mathfrak{R}} = \{(x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in R \text{ for all } n \in N\}$ be a set of real sequences. We call two sequences $\{x_n\} \in \overline{\mathfrak{R}}$ and $\{y_n\} \in \overline{\mathfrak{R}}$ equivalent if there is a natural number N such that $x_n = y_n$ for all $n > N$.

The set $\tilde{\mathfrak{R}}$ of equivalence classes is called the extended real line, and any of the classes a generalized real number.

It is easy to see that $R \subset \tilde{\mathfrak{R}}$ because one may associate with any ordinary number $x \in R$ a class containing a stationary sequence with $x_n = x$. It is evident that $\tilde{\mathfrak{R}}$ is an algebra. The product $\tilde{x}\tilde{y}$ of two generalized real numbers is defined as the class of sequences equivalent to the sequence $\{x_n y_n\}$, where $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ are the arbitrary representatives of the classes $\tilde{x}$ and $\tilde{y}$, respectively.

For any segment $T = [0; a] \subset R$ one can construct an extended segment $\tilde{T}$ in a similar way. Let H denote the subset of $\tilde{\mathfrak{R}}$ of nonnegative „infinitely small numbers”:

$$H = \{\tilde{h} \in \tilde{\mathfrak{R}} : \tilde{h} = [\{h_n\}], h_n > 0 \text{ for all } n \in N, \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0\}. \quad (2)$$

Consider the set of sequences of infinity differentiable functions $\{f_n(x)\}$ on R . We will call two sequences $\{f_n(x)\}$ and $\{g_n(x)\}$ equivalent if for each compact set $K \subset R$ there is a natural number N such that $f_n(x) = g_n(x)$ for all $n > N$ and $x \in K$. The set of classes of equivalent functions is denoted by $\mathfrak{Z}(R)$ and its elements are called new generalized functions. Similarly one can define the space $\mathfrak{Z}(T)$ for any interval $T = [0; a]$.

For each distribution f we can construct a sequence $\{f_n\}$ of smooth functions such that f_n converges to f (i.e., one can consider the convolution of f with some δ -sequence). This sequence defines the new generalized function that corresponds to the distribution f . Thus the space of distribution is a subset of the algebra of new generalized functions. However, in this case, infinitely many new generalized functions correspond to one distribution (e. g. by taking a different δ -sequence). We will say that the new generalized function $\tilde{f} = [\{f_n\}]$ associates with the ordinary function or distribution f if f_n converges to f in some sense.

Let $\tilde{f} = [\{f_n\}]$ and $\tilde{g} = [\{g_n\}]$ be generalized functions. Then the composition $\tilde{f} \circ \tilde{g}$ is defined by $\tilde{f} \circ \tilde{g} = [\{f_n \circ g_n\}] \in \mathfrak{Z}(R)$. Similarly, one can define the value of the new generalized function $\tilde{f}$ at the generalized real point $\tilde{x} = [\{x_n\}] \in \tilde{\mathfrak{R}}$ as $\tilde{f}(\tilde{x}) = [\{f_n(x_n)\}]$.

For each $\tilde{h} = [\{h_n\}] \in H$ and $\tilde{f} = [\{f_n\}] \in \mathfrak{Z}(R)$ we define a differential $d_{\tilde{h}} \tilde{f} \in \mathfrak{Z}(R)$ by $d_{\tilde{h}} \tilde{f} = [\{f_n(x + h_n) - f_n(x)\}]$. The construction of the differential was proposed by Lazakovich (see [6]).

Now we can give an interpretation of system of equations (1) using the introduced algebras. Let $L(t), t \in [0; a] = T$ be a right-continuous function of finite variation. We replace

ordinary functions in system (1) by corresponding new generalized functions and then write differentials in algebra.

So we have

$$d_{\tilde{h}} \tilde{x}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^q \tilde{f}^{ij}(\tilde{t}, \tilde{x}(\tilde{t})) d_{\tilde{h}} \tilde{L}^j(\tilde{t}), i = \overline{1, p} \quad (3)$$

with the initial value $\tilde{x}|_{[0; \tilde{h})} = \tilde{x}_0$, where $\tilde{h} = [\{h_n\}] \in H$, $\tilde{t} = [\{t_n\}] \in T$, $\tilde{x} = [\{x_n\}]$, $\tilde{f} = [\{f_n\}]$, $\tilde{x}_0 = [\{x_{0n}\}]$ and $\tilde{L} = [\{L_n\}]$ are elements of $\mathfrak{Z}(R)$. Moreover $\tilde{f}$ and $\tilde{L}$ are associated with f and L , respectively. If $\tilde{x}$ is associated with some function x then we say that x is a solution of system (3).

The following theorem from [16] gives necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solutions of system (3).

Theorem 2.1. If the following equality holds for some representatives

$$\{f_n^{ij}\} \in \tilde{f}^{ij}, \{L_n^j\} \in \tilde{L}^j, \{x_n^i\} \in \tilde{x}^i, \{x_{0n}^i\} \in \tilde{x}_0^i,$$

for all sufficiently large $n \in N$ and for all $l = 0, 1, \dots$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{d^l}{dt^l} [x_{0n}^i(h_n - t) - x_{0n}^i(t)] - \sum_{j=1}^q \frac{d^l}{dt^l} [f_n^{ij}(t, x_{0n}(t)) [L_n^j(h_n + t) - L_n^j(t)]] \right) = 0,$$

then a solution of system (3) exists and is unique.

The purpose of the present paper is to investigate the case when the solution $\tilde{x}$ of system (3) is associated with some function and to describe all possible associated solutions.

Main results

In this section, we will formulate the main results of this article.

In this paper, we consider specific types of representatives of the new generalized functions (mnemofunctions). We take the following convolutions as representatives of $\tilde{L}$ from system (3)

$$L_n^j(t) = (L^j * \rho_n^j)(t) = \int_0^{\frac{1}{\gamma^j(n)}} L^j(t+s) \rho_n^j(s) ds, \quad (4)$$

where

$$\rho_n^j(t) = \gamma^j(n) \rho^j(\gamma^j(n)t), \rho^j \geq 0, \sup \rho^j \subseteq [0; 1], \int_0^1 \rho^j(s) ds = 1$$

and $f_n = f * \tilde{\rho}_n$, $\tilde{\rho} \in C^\infty(R^{z+1})$, $\int_{[0;1]^{z+1}} \tilde{\rho}(x_0, x_1, \dots, x_z) dx_0 dx_1 \dots dx_z = 1$, $\tilde{\rho} \geq 0$, $\sup \tilde{\rho} \subseteq [0; 1]^{z+1}$.

If the function $\gamma^j(n)$ is some monotonic function such as $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h_n \rightarrow 0}} \gamma^j(n) = \infty$, we will assume that for $j = \overline{1, w}$ $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h_n \rightarrow 0}} \gamma^j(n)h_n = \infty$ and for $j = \overline{w+1, q}$ $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h_n \rightarrow 0}} \gamma^j(n)h_n = 0$.

Using representatives, we can rewrite system (3) in the following form:

$$\begin{cases} x_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^q f_n^{ij}(t, x_n(t)) [L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)], i = \overline{1, z} \\ x_n(t)|_{[0; h_n)} = x_{0n}(t) \end{cases} \quad (5)$$

The solution $\tilde{x}$ of system (3) is associated with some function if and only if the sequence $\{x_n\}$ of the solutions of system (5) converges.

Therefore, we have to investigate the limiting behavior of the sequence $\{x_n\}$.

Let t be an arbitrary point of T . There exist $m_t \in N$ and $\tau_t \in [0; h_n)$ such that $t = \tau_t + m_t h_n$. Set $t_k = \tau_t + k h_n$ for $k = 0, 1, \dots, m_t$. Then the solution of system (5) can be written as

$$x_n^i(t) = x_{0n}^i(\tau_t) + \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(t_k, x_n(t_k)) [L_n^j(t_{k+1}) - L_n^j(t_k)], i = \overline{1, z}. \quad (6)$$

Let $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$, $t \in T = [0; a]$ be a right-continuous function of finite variation. We will assume that $L^j(t) = L(a)$ if $t > a$ and $L^j(t) = L(0)$ if $t < 0$. Let us denote by $\text{var } L(u) = \sum_{j=1}^q \text{var } L^j(u)$ the total variation of the function $L = [L^1, L^2, \dots, L^q]$ on the interval T .

Suppose that f is a function that satisfy the linear growth condition with a constant M then for all $x \in R$ and $t \in T$:

$$|f(t, x)| \leq M(1 + |x|). \quad (7)$$

In order to describe the limits of the sequence x_n , we consider the following system of integral equations

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{ij}(s, x(s)) dL^{jc}(s) + \sum_{\substack{\mu_r \leq t}} S^i(\mu_r, x(\mu_r-), \Delta L(\mu_r)), i = \overline{1, z} \quad (8)$$

where $L^{jc}(t)$ is the continuous part and $L^{jd}(t)$ is discontinuous part of the function $L^j(t)$, μ_r , $r = 1, 2, \dots$ — discontinuity points of the function $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$, $\Delta L^j(\mu_r) = L^{jd}(\mu_r+) - L^{jd}(\mu_r-)$, $j = \overline{1, q}$ is the size of the jump

$$S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u),$$

where $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ is the solution of the integral equation

$$\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^w u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s-, \mu, x, u)) dH(s-1) +$$

$$+ \sum_{j=\overline{w+1}}^q u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s, \mu, x, u)) ds, i = \overline{1, z}.$$

Here and in what follows all integrals are understood in the Lebesgue-Stieltjes sense.

Theorem 3.1. Let $f^{ij}, i = \overline{1, z}, j = \overline{1, q}$ are functions that satisfy the linear growth condition (7) and L^j right-continuous functions of finite variation. Suppose that $\int_T |x_{n_0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0, \gamma^j(n) \rightarrow \infty$ and $\gamma^j(n)h_n \rightarrow \infty$ for $j = \overline{1, w}$ and $\gamma^j(n)h_n \rightarrow 0$ for $j = \overline{w+1, q}$, then the solution $x_n(t)$ of (5) converges to the solution $x(t)$ (8) in $L_p(T)$.

Theorem 3.2. Under the condition of theorem 2.1. let $f^{ij}, i = \overline{1, z}, j = \overline{1, q}$ are functions that satisfy the linear growth condition (7) and L^j right-continuous functions of finite variation.

Suppose that $\int_T |x_{n_0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0, \gamma^j(n) \rightarrow \infty$ and $\gamma^j(n)h_n \rightarrow \infty$ for $j = \overline{1, w}$ and $\gamma^j(n)h_n \rightarrow 0$ for $j = \overline{w+1, q}$, then the associated solution of (3) is the solution of (8) in the space $L_p(T)$.

Similar results for the system of nonautonomous differential equations in the space $L_1(t)$ have been obtained in [10].

Definition 3.3. We say that the function $x(t)$ is an I-associated (S-associated) solution of the system of equations in differentials (3) if it is associated solution (3) under conditions that $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h_n \rightarrow 0}} \gamma^j(n)h_n = \infty$ ($\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h_n \rightarrow 0}} \gamma^j(n)h_n = 0$.) and the representatives of the functions $\tilde{f}$ and $\tilde{L}$ are set by formula (4). In this case, we name $d_{\tilde{h}} \tilde{L}^j$ as an I-associated (S-associated) coefficient.

Let $f : R^z \rightarrow R$. We set

$$f_n(t) = (f * \tilde{\rho}_n)(t) = \int_{[0, 1/n]^z} f(t+s) \tilde{\rho}_n(s) ds,$$

where $\tilde{\rho}_n(t) \in C^\infty(R^z), \tilde{\rho}_n(t) \geq 0, \text{supp } \tilde{\rho}_n(t) \subset [0, 1/n]^z, \int_{[0, 1/n]^z} \tilde{\rho}_n(s) ds = 1, n \in N$.

Consider the case when $\gamma^j(n) = n$ then $\tilde{\rho}_n(t) \in n^z \tilde{\rho}(nt), \tilde{\rho}_n(t) \in C^\infty(R^z), \text{supp } \tilde{\rho} \subset [0, 1]^z, \int_{[0, 1]^z} \tilde{\rho}_n(s) ds = 1, n \in N$.

Remark 3.4. Let $\gamma^j(n) = n$, then we can define the set H from (2) using the following subsets:

$$I = \{\tilde{h} \in H : \frac{1}{n} = o(h_n), n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0, \text{ for all } h_n \in \tilde{h}\},$$

$$S = \{\tilde{h} \in H : h_n = o(\frac{1}{n}), h_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \text{ for all } h_n \in \tilde{h}\}.$$

We name the generalized differential $d_{\tilde{h}}$ as I-generalized (S-generalized) differential and denote $d_{\tilde{h}}^I (d_{\tilde{h}}^S)$, if $\tilde{h} \in I (\tilde{h} \in S)$.

Note, that the I-generalized (S-generalized) differential makes sense only for the new generalized function $\tilde{L}^j$ with representatives (4), where $\gamma^j(n) = n$.

According to equation (3), we will consider the systems of equations with I-generalized and S-generalized differentials:

$$\begin{cases} d_{\tilde{h}}^I \tilde{x}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^q \tilde{f}^{ij}(\tilde{t}, \tilde{x}(\tilde{t})) d_{\tilde{h}}^I \tilde{L}^j(\tilde{t}), \\ \tilde{x}|_{[0, \tilde{h})} = \tilde{x}^0. \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} d_{\tilde{h}}^S \tilde{x}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^q \tilde{f}^{ij}(\tilde{t}, \tilde{x}(\tilde{t})) d_{\tilde{h}}^S \tilde{L}^j(\tilde{t}), \\ \tilde{x}|_{[0, \tilde{h})} = \tilde{x}^0. \end{cases} \quad (10)$$

Remark 3.5. In case $\gamma^j(n) = n$ definition 3.3 will take the following form: we will say that the function $x(t)$ is the I-associated (S-associated) solution of a system of equations in differentials (3) if it is associated solution (9) ((10)).

Let $\gamma^j(n) = n$. In order to describe the limits of the sequence x_n we consider the following system of integral equations

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{ij}(s, x(s)) dL^j(s), i = \overline{1, z} \quad (11)$$

Theorem 3.6. Let $f^{ij}, i = \overline{1, z}, j = \overline{1, q}$ are functions that satisfy the linear growth condition (7) and L^j continuous functions of finite variation. Suppose that $\int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ in the space $L_p(T)$ than the solution $x_n(t)$ of (5) converges to the solution $x(t)$ from (11) in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$.

Theorem 3.7. Under the condition of theorem 2.1. let $f^{ij}, i = \overline{1, z}, j = \overline{1, q}$ are functions that satisfy the linear growth condition (7) and L^j continuous functions of finite variation. Suppose that $\int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ in the space $L_p(T)$, than the associated solution of (3) is the solution of (11) in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$.

The proof of a similar theorem in another space and in an autonomous case can be seen in [11].

Let L^j be right-continuous functions of finite variation, $\gamma^j(n) = n$ and $\frac{1}{n} = o(h_n)$ as $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0$. In order to describe the limits of the sequence x_n , we consider the following system of integral equations

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^{t+} f^{ij}(s, x(s-)) dL^j(s), i = \overline{1, z} \quad (12)$$

Theorem 3.8. Let $f^{ij}, i = \overline{1, z}, j = \overline{1, q}$ are functions that satisfy the linear growth condition (7) and L^j right-continuous functions of finite variation. Suppose that

$\int_T |x_{n_0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ in the space $L_p(T)$ than the solution $x_n(t)$ of (5) converges to the solution $x(t)$ in the space $L_p(T)$ (12) as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$, and $\frac{1}{n} = o(h_n)$.

Theorem 3.9. Under the condition of theorem 2.1. let f^{ij} , $i = \overline{1, z}$, $j = \overline{1, q}$ are functions that satisfy the linear growth condition (7) and L^j right-continuous functions of finite variation. Suppose that $\int_T |x_{n_0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ than the I-associated solution of (3) is the solution of (12) in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$.

Similar results for the system of autonomous differential equations in other spaces have been obtained in [12].

Let L^j be right-continuous functions of finite variation, $\gamma^j(n) = n$ and $h_n = o(\frac{1}{n})$ as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$. In order to describe the limits of the sequence x_n , we consider the following system of integral equations

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{ij}(s, x(s)) dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \leq t} S^i(\mu_r, x(\mu_r-), \Delta L(\mu_r)), i = \overline{1, z} \quad (13)$$

where $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, and $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ is the solution of the integral equation

$$\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^q u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s, \mu, x, u)) ds, i = \overline{1, z}.$$

Theorem 3.10. Let f^{ij} , $i = \overline{1, z}$, $j = \overline{1, q}$ are functions that satisfy the linear growth condition (7) and L^j right-continuous functions of finite variation. Suppose that $\int_T |x_{n_0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ in the space $L_p(T)$, then the solution $x_n(t)$ of (5) converges to the solution $x(t)$ from (13) in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ and $h_n = o(\frac{1}{n})$.

Theorem 3.11. Under the condition of theorem 2.1. let f^{ij} , $i = \overline{1, z}$, $j = \overline{1, q}$ are functions that satisfy the linear growth condition (7) and L^j right-continuous functions of finite variation.

Suppose that $\int_T |x_{n_0}(\tau_t) - x_0| dt \rightarrow 0$ in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$, then the S-associated solution of (3) is the solution of (13) in the space $L_p(T)$ as $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$.

Similar results for such a system of autonomous differential equations in another spaces have been obtained in [17; 18].

Conclusion

The systems of nonautonomous differential equations with generalized coefficients using the algebra of new generalized functions are investigated. It is shown that different interpretations of the solutions of the given systems can be described by a unique approach of the algebra of new generalized functions.

In this paper, for the first time in the literature, we describe associated solutions of the system of nonautonomous differential equations with generalized coefficients in the Lebesgue spaces $L_p(T)$ with functions that satisfy the linear growth condition.

REFERENCES

1. Antosik, P. Products of measures and functions of finite variations, Generalized functions and operational calculus / P. Antosik, J. Legeza // Bulgarian Academy of Science. – 1979. – P. 20–26.
2. Pandit, S. G. Differential systems involving impulses / S. G. Pandit, S. G. Deo // Lecture Notes in Mathematics. Springer. – Berlin, 1982.
3. Zavalishchin, S. T. Dynamic Impulse Systems. Theory and Applications, mathematics and its Applications / S. T. Zavalishchin, A. N. Sesekin // Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.
4. Das, P. S. Existence and stability of measure differential equations / P. S. Das, R. R. Sharma // Czech. Math. J. – 1972. – Vol. 22, nr 1. – P. 145–158.
5. Ligeza, J. On generalized solutions of some differential nonlinear equations of order n / J. Ligeza // Ann. Polon. Math. – 1975. – Nr 31 (2). – P. 115–120.
6. Lazakovich, N. V. differentials in the algebra of generalized random processes / N. V. Lazakovich // Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. – 1994. – Nr 38 (5). – P. 23–27 (in Russian).
7. Yablonski, A. Differential equations with generalized coefficients / A. Yablonski // Nonlinear analysis: theory, methods and applications. – 2005. – Nr 63 (2). – P. 171–197.
8. Bedziuk, N. Yablonski, A. Differential equations with generalized coefficients / N. Bedziuk, A. Yablonski // Nonlinear differential equations and applications NoDEA. – 2010. – Nr 17. – P. 249–270.
9. Zhuk, A. I. Systems of quasidifferential equations in the direct product of algebras of mnemofunctions. Symmetric case / A. I. Zhuk, A. K. Khmyzov // Vestn. BSU. Ser. 1, Physics. Mathematics. Informatics. – 2010. – Nr 1 (2). – S. 87–93 (in Russian).
10. Zhuk, A. I. Estimation of a convergence rate to associated solutions of differential equations with generalized coefficients in the algebra of mnemofunctions / A. I. Zhuk, O. L. Yablonski // Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. – 2015. – Nr 59 (2). – P. 17–22 (in Russian).
11. Zhuk, A. I. Nonautonomous systems of differential equations in the algebra of generalized functions / A. I. Zhuk, O. L. Yablonski // Proceedings of the Institute of Mathematics. – 2011. – Nr 19 (1). – P. 43–51 (in Russian).
12. Zhuk, A. I. Associated solutions of the system of nonautonomous differential equations with generalized coefficients. Mixed case / A. I. Zhuk, O. L. Yablonski, S. A. Spaskov // BSPU Bulletin. Series 3. Physics. Mathematics. Informatics. Biology. Geography. – 2019. – Nr 3 (101). – P. 16–22 (in Russian).
13. Zhuk, A. I. Systems of differential equations in the algebra of generalized functions / A. I. Zhuk, O. L. Yablonski // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. – 2011. – Nr 1. – P. 12–16 (in Russian).
14. Zhuk, A. I. Differential equations with generalized coefficients in Cartesian product of algebras of mnemofunctions / A. I. Zhuk, T. I. Karimova // Vestnik of Brest State Technical University. Series: Physics. Mathematics. Informatics. – 2018. – Nr 5 (112). – P. 59–62 (in Russian).
15. Zhuk, A. I. On associated solution of the system of non-autonomous differential equations in the Lebesgue spaces. / A. I. Zhuk, H. N. Zashchuk // Journal of the Belarusian

State University. Mathematics and Informatics. – 2022. – 1. – 6–13. – DOI: 10.33581/2520-6508-2022-1-5-13

16. Karimova, T. I. About associated solutions nonhomogeneous systems of equations in differentials in the algebra of generalized stochastic processes / T. I. Karimova, O. L. Yablonski // Vestn. BSU. Ser. 1, Physics. Mathematics. Informatics. – 2009. – Nr 2. – P. 81–86 (in Russian).

17. Zhuk, A. I. Nonautonomic systems of differential equations with generalized coefficients in the algebra of mnemofunctions / A. I. Zhuk, O. L. Yablonski // Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. – 2013. – Nr 57 (6). – P. 20–23 (in Russian).

18. Zhuk, A. I. About associated solutions of the system of differential equations with generalized coefficients / A. I. Zhuk, H. N. Zashchuk // Vestnik of Brest State Tekhnical University. Series: Physics. Mathematics. Informatics. – 2020. – Nr 5 (123). – P. 5–8 (in Russian).

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 13.11.2024

УДК 512.542

Екатерина Владимировна Зубей*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. фундаментальной математики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Ekaterina Zubei***Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University**e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru*

О КОМПОЗИЦИОННЫХ ФАКТОРАХ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С OS -ПРОПЕРЕСТАНОВОЧНОЙ СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППОЙ*

Конечная ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Подгруппа A группы G называется OS -проперестановочной в G , если существует подгруппа B такая, что $G = N_G(A)B$, AB является подгруппой группы G и подгруппа A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B . Для $r < 7$ перечислены все неабелевы композиционные факторы группы, в которой силовская r -подгруппа OS -проперестановочна. Доказана разрешимость группы с OS -проперестановочными силовскими 2- и 3-подгруппами.

Ключевые слова: конечная группа, OS -проперестановочная подгруппа, группа Шмидта, силовская подгруппа, p -разрешимая группа.

On Composition Factors of a Finite Group with OS -Propermutable Sylow Subgroup

A finite non-nilpotent group whose all proper subgroups are nilpotent, is called the Schmidt group. A subgroup A of a group G is called OS -propermutable in G if there is a subgroup B such that $G = N_G(A)B$, AB is a subgroup of G and A permutes with all Schmidt subgroups of B . For $r < 7$, all non-Abelian composition factors of a group G in which a Sylow r -subgroup is OS -propermutable. One described the solubility of a group G with OS -propermutable Sylow 2- and 3-subgroups is proved.

Key words: finite group, OS -propermutable subgroup, Schmidt group, Sylow subgroup, p -soluble group.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Конечная ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Начало изучению таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [1]. Подробный обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп приведен в статье В. С. Монахова [2].

Поскольку группы Шмидта присутствуют в качестве подгруппы в каждой ненильпотентной группе, то они являются универсальными подгруппами групп. Поэтому свойства заключенных в группе подгрупп Шмидта оказывают существенное влияние на строение самой группы. Исследованиям строения групп по свойствам подгрупп Шмидта посвящены, например, работы Я. Г. Берковича, В. А. Ведерникова, В. Д. Мазурова, В. С. Монахова, С. А. Сыскина.

Говорят, что подгруппы A и B перестановочны, если $AB = BA$, т. е. множество всех элементов ab , где $a \in A$, $b \in B$ образует подгруппу. Подгруппа группы G называется перестановочной или квазинормальной, если она перестановочна со всеми подгруппами из G . В 1962 г. О. Кегель [3] ввел понятие S -квазинормальной подгруппы.

**Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках выполнения задания «Конечные группы с формационно-арифметическими свойствами»*

структурных объектов» (№ госрегистрации 20211467) ГПНИ «Конвергенция – 2025», подпрограмма «Математические модели и методы» на 2021–2025 гг.

Определение 1. Подгруппа H группы G называется S -квазинормальной в G , если H перестановочна с каждой силовой подгруппой группы G .

Группы с S -квазинормальной подгруппой изучали многие авторы: М. Асаад, А. А. Гелиель, А. Баллестер-Болинше (1989), А. Баллестер-Болинше и П. Агилера (1996, 1998) и др.

С. Сринивасан доказал, что если максимальные подгруппы силовских подгрупп группы G нормальны или S -квазинормальны в G , то G сверхразрешима.

Позже А. Шаалан доказал, что если каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 S -квазинормальна в группе G , то G является сверхразрешимой.

Одной из первых работ, посвященных перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта, является работа Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [4]. В этой работе были получены следующие результаты.

Теорема 1 [4, теорема 2]. Пусть каждая не лежащая в $S(G)$ 2-нильпотентная подгруппа Шмидта H четного порядка перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G , порядки которых взаимно просты с H . Тогда группа G разрешима.

Теорема 2 [4, теорема 6]. Пусть все силовые p -подгруппы группы G перестановочны со всеми p -замкнутыми pd -подгруппами Шмидта. Тогда группа G p -разрешима.

Теорема 3 [4, теорема 7]. Пусть каждая силовая 2-подгруппа группы G перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка. Тогда группа G разрешима.

Теорема 4 [4, теорема 8]. Если каждая p -замкнутая pd -подгруппа Шмидта порядка $p^\alpha q^\beta$ перестановочна со всеми силовскими q -подгруппами группы G , то G p -разрешима.

Теорема 5 [4, следствие 3]. Если каждая максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из G , то G разрешима.

Результаты работы [4] развили В. Н. Княгина и В. С. Монахов. В работе [5] они установили признаки r -разрешимости групп с условием перестановочности силовой r -подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта.

Получены также признаки разрешимости групп, в которых некоторые подгруппы Шмидта перестановочны. Одним из основных результатов работы является следующая теорема.

Теорема 6 [5]. (1) Если некоторая силовая r -подгруппа группы G перестановочна со всеми не содержащимися в $S_r(G)$ 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка, то группа G r -разрешима.

(2) Если некоторая силовая r -подгруппа группы G перестановочна со всеми не содержащимися в $S_r(G)$ 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка и $r \notin \{3, 5\}$, то G r -разрешима.

(3) Если некоторая силовая r -подгруппа группы G перестановочна со всеми не содержащимися в $S_r(G)$ r -замкнутыми rd -подгруппами Шмидта, то G r -разрешима.

(4) Если каждая не содержащаяся в $S_r(G)$ r -замкнутая rd -подгруппа Шмидта порядка $r^\alpha q^\beta$ перестановочна с некоторой силовской q -подгруппой группы G , то G r -разрешима.

Здесь $S_r(G)$ – наибольшая нормальная r -разрешимая подгруппа группы G для простого r .

В этой теореме ограничение $r \notin \{3, 5\}$ отбросить нельзя. Примерами служат группы $SL(2, 8)$ и $SL(2, 4)$. В простой группе $PSL(2, 7)$ нет 7-нильпотентных $7d$ -подгрупп Шмидта. Поэтому группа, в которой силовская r -подгруппа перестановочна со всеми r -нильпотентными rd -подгруппами Шмидта, не обязана быть r -разрешимой.

В работе [6] были получены локальные аналоги результатов работы Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [4, следствия 2–4].

Поскольку для любой подгруппы в группе существует добавление, то вполне естественно рассмотреть перестановочность с подгруппами из добавления. Так, в работе [7] было предложено следующее понятие.

Определение 2. Подгруппа A называется *полунормальной* в группе G , если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AB_i – собственная в G подгруппа для всех собственных подгрупп B_i из B .

В. С. Монахов и В. Н. Княгина [8] исследовали группы, в которых имеются полунормальные подгруппы Шмидта четного порядка. В работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 7 [8, теорема 1]. Если A – полунормальная подгруппа Шмидта группы G и подгруппа A^G неразрешима, то A является 2-замкнутой $\{2, 3\}$ -подгруппой.

Теорема 8 [8, теорема 2]. Если в группе G все $\{2, 3\}$ -подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2, 5\}$ -подгруппы Шмидта полунормальны, то группа G разрешима.

Применив идею О. Кегеля и понятие полунормальной подгруппы, в [9] введено следующее понятие.

Определение 3. Подгруппа A называется S -полунормальной (или SS -перестановочной) в группе G , если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и A перестановочна с каждой силовской подгруппой из B . В этом случае подгруппу B будем называть S -добавлением к A в G .

В работе [10] установлена разрешимость группы с S -полунормальными сверхразрешимыми подгруппами Шмидта четного порядка, перечислены неабелевы композиционные факторы группы, в которой несверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка S -полунормальны, доказаны признаки частичной разрешимости групп, некоторые подгруппы Шмидта которых S -полунормальны.

По аналогии с полунормальной подгруппой (определение 2) можно исследовать группы, в которых некоторая силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта из добавления к этой силовской подгруппе. В. С. Монахов предложил следующее понятие.

Определение 4. Подгруппа A группы G называется OS -полунормальной в G , если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B . В этой ситуации подгруппу B будем называть OS -добавлением к подгруппе A в группе G .

Обозначение OS связано с Отто Юльевичем Шмидтом.

Понятие OS -полуноormalьной подгруппы является обобщением понятия полуноormalьной подгруппы.

Автором в работе [11] изучено строение группы, у которой некоторая силовская подгруппа OS -полуноormalьна.

В. Н. Тютянов и П. В. Бычков [12] установили, что неабелевы композиционные факторы группы, в которой нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, принадлежат множеству

$$\Omega = \{PSL(2, 2^n), n \geq 2; PSL(2, q), q = 2^k + 1; PSU(4, 2) \simeq PSp(4, 3); PSp(4, 2^n), n \geq 2; Sz(2^{2n+1}), n \geq 1\}.$$

В работе [13] описаны неабелевы композиционные факторы группы, у которой некоторая силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта нечетного порядка, доказана следующая теорема.

Теорема 9 [13]. Если некоторая силовская p -подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка из G , то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL(2, 7)$ или группам из множества Ω .

В теории конечных групп часто встречается ситуация, когда подгруппы A и B группы G не являются перестановочными, но в G имеется такой элемент x , для которого имеет место $AB^x = B^xA$.

А. Н. Скиба [14] предложил концепцию X -перестановочных подгрупп.

Определение 5. [14]. Пусть X – непустое множество из группы G .

(1) Подгруппа A называется X -перестановочной с подгруппой B , если существует элемент $x \in X$ такой, что $AB^x = B^xA$.

(2) Подгруппа A называется X -перестановочной в G , если A X -перестановочна со всеми подгруппами из G .

Он в соавторстве с коллегами (В. Го, К. П. Шамо) опубликовали цикл работ, в которых установлены признаки разрешимости, сверхразрешимости групп при условии, что некоторые подгруппы X -перестановочны, где X – некоторое непустое множество группы.

А. Н. Скиба и И. Сяолян [15] рассмотрели еще одно обобщение полуноormalьной подгруппы.

Определение 6. Подгруппа A называется проперестановочной в группе G , если существует подгруппа B такая, что $G = N_G(A)B$ и AX – подгруппа для каждой подгруппы X из B . Подгруппу B в дальнейшем будем называть продобавлением к A в G .

Идеи работ [11] и [15] привели к следующему понятию.

Определение 7. Подгруппа A группы G называется OS -проперестановочной в G , если существует подгруппа B такая, что $G = N_G(A)B$, AB является подгруппой группы G и подгруппа A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B . В этой ситуации подгруппу B будем называть OS -прдобавлением к A в G .

Автором в работе [16] установлена для простого числа $r \geq 7$ r -разрешимость группы, в которой силовская r -подгруппа OS -проперестановочна.

В настоящей работе для $r < 7$ перечислены все неабелевы композиционные факторы группы, в которой силовская r -подгруппа OS -проперестановочна, также доказана разрешимость группы с OS -проперестановочными силовскими 2- и 3-подгруппами.

Теорема А. Пусть в группе G силовская p -подгруппа OS -проперестановочна.

(1) Если $p = 2$, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL(2, 7)$. В частности, группа G $\{2, 3, 7\}$ -разрешима.

(2) Если $p = 3$, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $SL(2, 8)$ или являются $3'$ -группами.

(3) Если $p = 5$, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $SL(2, 4)$ или являются $5'$ -группами.

(4) Если $p \geq 7$, то группа G p -разрешима.

Отсюда вытекает разрешимость группы с OS-проперестановочными силовскими 2- и 3-подгруппами.

1. Используемые обозначения и результаты

Все обозначения и используемые определения соответствуют [17], [18].

Пусть p – простое число. Группа с нормальной силовской p -подгруппой называется p -замкнутой. Группа, содержащая нормальную подгруппу, индекс которой совпадает с порядком силовской p -подгруппы, называется p -нильпотентной. Если порядок подгруппы X делится на простое число p , то говорят, что X – pd -подгруппа. Обозначим через $H^G = \langle H^x \mid x \in G \rangle$ наименьшую нормальную в G подгруппу, содержащую подгруппу H . Центр и коммутант группы G обозначаются через $Z(G)$ и G' соответственно. Симметрическая и знакопеременная группы степени n обозначаются через S_n и A_n ; диэдральная, циклическая и элементарная абелева группы порядков k , m и p^t обозначаются через D_k , Z_m и E_{p^t} соответственно, $[A]B$ – прямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B . (1)

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначим через π' . Итак, $\pi \subseteq P$ и $\pi' = P \setminus \pi$. Символом π обозначается также функция, определенная на множестве N следующим образом: $\pi(m)$ – множество простых чисел, делящих натуральное число m , а $\pi(G) = \pi(|G|)$. Зафиксируем множество простых чисел π . Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то натуральное число m называется π -числом. Группа G называется: π -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$; π' -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$. Если $|\pi(G)| = 1$, то группа G называется *примарной*, при $|\pi(G)| = 2$ – *бипримарной*.

Субнормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G_{i+1} для всех $i = 0, 1, \dots, m-1$. Ряд (1) называется *композиционным*, если G_i является максимальной нормальной подгруппой группы G_{i+1} для каждого i , фактор-группы G_{i+1}/G_i называются *композиционными факторами* этого ряда, а числа $|G_{i+1}/G_i|$, $i = 0, 1, \dots, m-1$ – индексами композиционного ряда.

Группа называется π -разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо разрешимыми π -группами, либо π' -группами.

В следующей лемме приведены свойства групп Шмидта, полученные самим О. Ю. Шмидтом в 1924 г.

Лемма 1 [1]. Пусть S – группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) $S = [P]Q$, где P – нормальная силовская p -подгруппа, Q – ненормальная силовская q -подгруппа, p и q – различные простые числа;

(2) $Q = \langle y \rangle$ – циклическая подгруппа и $y^q \in Z(S)$;

(3) $|P/P'| = p^m$, где m – показатель числа p по модулю q .

Условимся называть $S_{\langle p,q \rangle}$ -группой группу Шмидта с нормальной силовской p -подгруппой P и циклической силовской q -подгруппой Q . Минимальным добавлением к подгруппе A в группе G называется такая подгруппа B , что $G = AB$ и $AB_1 \neq G$ для всех собственных подгрупп B_1 из B .

Лемма 2 [4, лемма 1]. Если K и D – подгруппы группы G , подгруппа D нормальна в K и $K/D = S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами:

(1) L – p -замкнутая $\{p, q\}$ -подгруппа;

(2) все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны;

(3) L содержит $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и $L = ([P]Q)^L = Q^L$.

Лемма 3 [18, VI.4.10]. Пусть A и B – подгруппы группы G такие, что $G \neq AB$ и $AB^g = B^g A$ для всех $g \in G$. Тогда либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$.

Лемма 4 [7, лемма 11]. Если простая группа G является произведением p -подгруппы P и подгруппы Шмидта S , то справедливо одно из следующих утверждений:

(1) $p = 2$, $G \simeq \text{PSL}(2, 7)$, $P \simeq D_8$, $S \simeq [Z_7]Z_3$;

(2) $p = 3$, $G \simeq \text{SL}(2, 8)$, $P \simeq Z_9$, $S \simeq [E_8]Z_7$;

(3) $p = 5$, $G \simeq \text{PSL}(2, 5)$, $P \simeq Z_5$, $S \simeq A_4 \simeq [E_4]Z_3$.

Лемма 5. (1) Если группа G является произведением двух подгрупп A и B взаимно простых порядков и K – субнормальная в G подгруппа, то $K = (K \cap A)(K \cap B)$, [19, лемма 1].

(2) Пусть H , K и N – попарно перестановочные подгруппы группы G . Если H холлова, то $N \cap HK = (N \cap H)(N \cap K)$, [8, лемма 5].

Лемма 6 [16, лемма 6]. Пусть A – OS-проперестановочная подгруппа группы G и B ее OS-продобавление.

(1) Для любого элемента $g \in G$ подгруппа B^g будет OS-продобавлением к подгруппе A в группе G .

(2) Для любого элемента $g \in G$ подгруппа A^g будет OS-проперестановочной в группе G , а подгруппы B и B^g – ее OS-продобавлениями.

Лемма 7 [16, лемма 7]. Пусть A – OS-проперестановочная подгруппа группы G и B – ее OS-продобавление.

(1) Если $N \triangleleft G$, то AN – OS-проперестановочна в G и B является OS-продобавлением к AN в G .

(2) Если $N \triangleleft G$, то AN/N – OS-проперестановочна в G/N и BN/N является OS-продобавлением к AN/N в G/N .

(3) Если A – OS -проперестановочная подгруппа группы G и B – OS -продобавление в G , то $A^G = A(A^G \cap B)$ и A OS -проперестановочна в A^G и $A^G \cap B$ – OS -продобавление к A в A^G .

Лемма 8. Пусть A – неединичная OS -проперестановочная подгруппа простой группы G и B – ее минимальное OS -продобавление. Тогда все собственные подгруппы в B нильпотентны, т. е. либо B нильпотентна, либо B есть группа Шмидта.

Доказательство. Предположим, что в B имеется собственная ненильпотентная подгруппа. Тогда существует подгруппа Шмидта $S < B$ и $AS < G$. Из леммы 6 (1) следует, что $AS^g = S^g A$ для любого $g \in G$. По лемме 3, либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$, что противоречит условию доказываемого предложения. Поэтому предположение неверно, и B либо нильпотентная подгруппа, либо группа Шмидта.

Лемма 9. Пусть R – неединичная OS -проперестановочная r -подгруппа простой группы G и B – ее минимальное OS -продобавление. Тогда для R , B , и G возможны только следующие изоморфизмы:

- (1) $R \simeq Z_5$, $B \simeq A_4$, $G \simeq PSL(2, 5)$;
- (2) $R \simeq D_8$, $B \simeq [Z_7]Z_3$, $G \simeq PSL(2, 7)$;
- (3) $R \simeq Z_9$, $B \simeq [E_8]Z_7$, $G \simeq SL(2, 8)$.

Доказательство. Так как G – простая группа, то $R^G = G$ и $G = RB$, R – OS -проперестановочна в G по лемме 6. Согласно лемме 8 и теореме Виланда – Кегеля, подгруппа B является группой Шмидта $B = [P]Q$. По лемме 4, группа $G \in \{PSL(2, 7), PSL(2, 5), SL(2, 8)\}$. Факторизации этих групп известны [20], искомые факторизации указаны в пунктах (1) – (3).

Лемма 10. Пусть U подгруппа группы G и N нормальная подгруппа в G . Если все подгруппы Шмидта из U содержатся в N , то UN/N нильпотентна.

Доказательство. В силу изоморфизма $UN/N \simeq U/U \cap N$ достаточно доказать, что $U/U \cap N$ нильпотентна. Предположим обратное и пусть $D = U \cap N$, K/D подгруппа Шмидта в U/D . По лемме 2, существуют подгруппы $S \leq L \leq K \leq U$ такие, что $K = LD$ подгруппа Шмидта и $S^L = L$. По условию, $S \leq N \cap U = D$. Следовательно, $K = LD = S^L D \leq D$, противоречие с $K/D \neq 1$. Лемма доказана.

Лемма 11. Предположим, что в группе G силовская p -подгруппа OS -проперестановочна. Если H – субнормальная подгруппа в P^G , то силовская p -подгруппа из H OS -проперестановочна в H .

Доказательство. Поскольку P OS -проперестановочна в G , отсюда следует, что $G = N_G(P)B$ и P перестановочна со всеми подгруппами Шмидта группы B . Пусть H_p – силовская p -подгруппа из H такая, что $H_p = P \cap H$.

Предположим, что $P^G = G$. Тогда по условию мы имеем, что H субнормальна в G , и, по лемме 7 (3), $G = P^G = P(P^G \cap B) = PB$.

Воспользуемся индукцией по порядку G . Предположим, что H нормальна в G . Тогда H перестановочна с подгруппами P и B . По лемме 5,

$$H = (P \cap H)(B \cap H) = H_p(B \cap H) = N_H(H_p)(B \cap H).$$

Пусть S – подгруппа Шмидта в $B \cap H$. По условию $SP = PS$. С $S \leq B \cap H$, мы имеем это по тождеству Дедекинда:

$$H \cap SP = S(H \cap P) = SH_p = H \cap PS = (H \cap P)S = H_p S.$$

Следовательно, силовская p -подгруппа H_p группы H OS-проперестановочна в H и $B \cap H$ является OS-дополнением к H_p в H .

Пусть теперь H ненормальна в G . Поскольку H субнормальна в G , имеем, что H субнормальна в H^G и $H^G < G$. Согласно доказанному, силовская p -подгруппа группы H^G OS-проперестановочна в H^G . Теперь, по индукции, силовская p -подгруппа группы H OS-проперестановочна в H .

Следовательно, $P^G < G$. Поскольку H субнормальна в P^G , то отсюда следует, что H субнормальна в $P^G = P^{P^G}$.

По лемме 7 (3), $P^G = P(P^G \cap B)$ и P OS-проперестановочна в P^G . Тогда силовская p -подгруппа группы H OS-проперестановочна в H по индукции. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы А

Ясно, что p -разрешимость группы G эквивалентна утверждению (4'). Если $p \geq 7$, то все неабелевы композиционные факторы группы G являются p' -группами.

Поскольку P OS-проперестановочна в G , то отсюда следует, что $G = N_G(P)B$ и P перестановочна со всеми подгруппами Шмидта группы B .

Предположим, что $P^G = G$. Тогда, по лемме 7 (3),

$$G = P^G = P(P^G \cap B) = PB.$$

Будем доказывать все утверждения одновременно. Воспользуемся индукцией по порядку группы G . Пусть H/K – произвольный неабелевый композиционный фактор группы G . Тогда H – субнормальная подгруппа группы G , подгруппа K нормальна в H и фактор-группа H/K простая. Кроме того, $H \leq P^G = G$. Если $H \neq G$, то, по лемме 11, H_p OS-проперестановочна в H и, по индукции, H/K – подгруппа из пунктов (1) – (3), (4'). В этом случае теорема доказана.

Следовательно, $H = G$. Тогда G/K – простая группа и $(PK/K)^G = G/K$. По лемме 7 (3), $G/K = (PK/K)(BK/K)$.

По теореме Виланда – Кегеля, подгруппа BK/K ненильпотента, а, по лемме 10, в подгруппе B существует подгруппа Шмидта S такая, что S не содержится в K . По условию, $PS = SP$, а из леммы 6 следует, что $PS^x = S^x P$ для всех $x \in G$. Поэтому

$$(PK/K)(SK/K)^{xK} = (SK/K)^{xK}(PK/K).$$

Так как G/K – простая группа, то из леммы 3 заключаем, что $G/K = (PK/K)(SK/K)$. У группы Шмидта фактор-группы либо циклические, либо являются вновь группами Шмидта. По теореме Виланда – Кегеля, подгруппа $SK/K \simeq S/S \cap K$ не циклическая, поэтому SK/K – группа Шмидта и применима лемма 9. Из этой леммы следует, что $p \leq 5$ и $G/K \simeq PSL(2, 7)$ при $p = 2$, $SL(2, 8)$ при $p = 3$ или $SL(2, 4)$ при $p = 5$.

Пусть $P^G < G$, тогда G/P^G – p' -группа. Пусть H/K – произвольный неабелев композиционный фактор в P^G . Тогда H субнормальна в P^G , и, по лемме 11,

силовская p -подгруппа из H OS -проперестановочна в H . По индукции, все неабелевы компо-зиционные факторы из H и, следовательно, группы G удовлетворяют условиям (1) – (3), (4') теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. Если в группе G силовские 2- и 3-подгруппы OS -проперестановочны, то группа G разрешима.

Доказательство. Предположим, что группа G неразрешима и H/K – неабелев композиционный фактор группы G . По теореме А (1), $H/K \simeq PSL(2,7)$, поэтому $3 \in \pi(H/K)$. По условию, силовская 3-подгруппа группы G OS -проперестановочна. По теореме А (2), $H/K \simeq SL(2,8)$. Так как $PSL(2,7) \not\simeq SL(2,8)$, то имеем противоречие. Поэтому предположение неверно и G разрешима.

Следствие 2. Если в группе G силовские 2- и 7-подгруппы OS -проперестановочны, то группа G разрешима.

Доказательство. Предположим, что группа G неразрешима и H/K – неабелев композиционный фактор группы G . По теореме А (1), $H/K \simeq PSL(2,7)$, поэтому $7 \in \pi(H/K)$. По условию, силовская 7-подгруппа группы G OS -проперестановочна. По теореме 1 (4), группа G 7-разрешима, поэтому H/K 7-разрешима. Противоречие.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Шмидт, О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О. Ю. Шмидт // Мат. сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.
2. Монахов, В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В. С. Монахов // Тр. Укр. мат. конгресса – 2001. – Киев, 2002. – Секция 1. – С. 81–90.
3. Kegel, O. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78, 1. – P. 205–221.
4. Беркович, Я. Г. О перестановочности подгрупп конечной группы / Я. Г. Беркович, Э. М. Пальчик // Сиб. мат. журн. – 1967. – Т. 8, 4. – С. 741–753.
5. Княгина, В. Н. О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Тр. ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16, 3. – С. 130–139.
6. Княгина, В. Н. О π' -свойствах конечной группы, обладающей π -холловой подгруппой / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, 2. – С. 297–309.
7. Su, X. On seminormal subgroups of finite group / X. Su // J. Math. (Wuhan). – 1988. – Vol. 8, 1. – P. 7–9.
8. Княгина, В. Н. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, 4. – С. 448–458.
9. Ballester-Bolinches, A. Products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Assad. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 2010.
10. Монахов, В. С. О разрешимости конечной группы с S -полунормальными подгруппами Шмидта / В. С. Монахов, В. Н. Княгина, Е. В. Зубей // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, 11. – С. 1511–1518.
11. Монахов, В. С. О композиционных факторах конечной группы с OS -полунормальной силовской подгруппой / В. С. Монахов, Е. В. Зубей // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2018. – Т. 26, 1. – С. 88–94.

12. Тютянов, В. Н. Конечные группы с нильпотентными подгруппами нечетного порядка / В. Н. Тютянов, П. В. Бычков // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 84–86.
13. Трофимук, А. А. О перестановочности силовой подгруппы с подгруппами Шмидта нечетного порядка / А. А. Трофимук, Е. В. Зубей // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 69–71.
14. Guo, W. X -semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315, 1. – P. 31–41.
15. Yi, X. On S -propermutable subgroups of finite groups / X. Yi, A. N. Skiba // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2015. – Vol. 38, Nr 2. – P. 605–616.
16. Зубей, Е. В. Конечные группы с OS -проперестановочными подгруппами / Е. В. Зубей // Чебышев. сб. – 2021. – Т. 22, № 3. – С. 457–463.
17. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
18. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 796 p.
19. Монахов, В. С. О произведении 2-разложимой группы и группы Шмидта / В. С. Монахов // Докл. АН БССР. – 1974. – Т. 18, 10. – С. 871–874.
20. Монахов, В. С. Произведение конечных групп, близких к нильпотентным / В. С. Монахов // Конечные группы : сб. ст. – Минск : Наука и техника, 1975. – С. 70–100.

REFERENCES

1. Shmidt, O. Yu. Gruppy, vsie podgruppy kotorykh spicial'nyje / O. Yu. Shmidt // Mat. sb. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.
2. Monakhov, V. S. Podgruppy Shmidta, ikh sushchiestvovaniye i niekotoryje prilozheniya / V. S. Monakhov // Tr. Ukr. mat. kongressa – 2001. – Kiyev, 2002. – Sikcija 1. – С. 81–90.
3. Kegel, O. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78, 1. – P. 205–221.
4. Bierkovich, Ya. G. O pieriestanovochnosti podgrupp koniechnoj gruppy / Ya. G. Bierkovich, E. M. Pal'chik // Sib. mat. zhurn. – 1967. – Т. 8, 4. – С. 741–753.
5. Kniagina, V. N. O pieriestanovochnosti silovskikh podgrupp s podgruppami Shmidta / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // Tr. IMM UrO RAN. – 2010. – Т. 16, 3. – С. 130–139.
6. Kniagina, V. N. О π' -svoystvakh koniechnoj gruppy, obladajushchiej π' -khollovoj podgruppoy / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // Sib. mat. zhurn. – 2011. – Т. 52, 2. – С. 297–309.
7. Su, X. On seminormal subgroups of finite group / X. Su // J. Math. (Wuhan). – 1988. – Vol. 8, 1. – P. 7–9.
8. Kniagina, V. N. Koniechnyje gruppy s polunormal'nymi podgruppami Shmidta / V. N. Kniagina, V. S. Monakhov // Algiebra i logika. – 2007. – Т. 46, 4. – С. 448–458.
9. Ballester-Bolinches, A. Products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Assad. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 2010.
10. Monakhov, V. S. O razrieshimosti koniechnoj gruppy s S -polunormalnymi podgruppami Shmidta / V. S. Monakhov, V. N. Kniagina, Ye. V. Zubiej // Ukr. mat. zhurn. – 2018. – Т. 70, 11. – С. 1511–1518.
11. Monakhov, V. S. O kompozicionnykh faktorakh koniechnoj gruppy s OS -polunormal'noj silovskoj podgruppoy / V. S. Monakhov, Ye. V. Zubiej // Tr. In-ta matematiki NAN Bielarusi. – 2018. – Т. 26, 1. – С. 88–94.

12. Tiutianov, V. N. Koniechnyje grupy s nil'potentnymi podgruppami niechiotnogo poriadka / V. N. Tiutianov, P. V. Bychkov // Problemy fiziki, matematiki i tiehniki. – 2018. – № 3 (36). – S. 84–86.
13. Trofimuk, A. A. O pieriestanovochnosti silovskoj podgruppy s podgruppami Shmidta niechiotnogo poriadka / A. A. Trofimuk, Ye. V. Zubiej // Problemy fiziki, matematiki i tiehniki. – 2019. – № 1 (38). – S. 69–71.
14. Guo, W. X -semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315, 1. – P. 31–41.
15. Yi, X. On S -propermutable subgroups of finite groups / X. Yi, A. N. Skiba // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2015. – Vol. 38, Nr 2. – P. 605–616.
16. Zubiej, Ye. V. Koniechnyje grupy s OS-propieriestanovochnymi podgruppami / Ye. V. Zubiej // Chiebyshch. sb. – 2021. – T. 22, № 3. – S. 457–463.
17. Monakhov, V. S. Vviedeniye v tieoriju koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk, 2006. – 207 s.
18. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 796 p.
19. Monakhov, V. S. O proizvedenii 2-razlozhimoy gruppy i gruppy Shmidta / V. S. Monakhov // Dokl. AN BSSR. – 1974. – T. 18, 10. – S. 871–874.
20. Monakhov, V. S. Proizvedeniye koniechnykh grupp, blizkikh k nil'potentnym / V. S. Monakhov // Koniechnyje grupy : sb. st. – Minsk : Nauka i tiehnika, 1975. – S. 70–100.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 04.11.2024

УДК 512.542

Полина Александровна Павлушко¹, Александр Александрович Трофимук²¹студент 4-го курса физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²д-р физ.-мат. наук, доц., зав. каф. фундаментальной математики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Polina Pavlushko¹, Alexander Trofimuk²¹4-th Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics

of Brest State A. S. Pushkin University

²Doctor of Physical and Mathematical Sciences,

Head of the Department of Fundamental Mathematics

of Brest State A. S. Pushkin University

email: ¹polinapavlushko@gmail.com; ²alexander.trofimuk@gmail.com**О КОМПОЗИЦИОННЫХ ФАКТОРАХ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ,
У КОТОРОЙ НЕКОТОРЫЕ ПОДГРУППЫ ЯВЛЯЮТСЯ tcc-ПОДГРУППАМИ***

Подгруппа A группы G называется tcc -подгруппой в G , если для подгруппы A существует добавление T в группе G такое, что для каждой подгруппы A_1 из A и каждой подгруппы T_1 из T существует элемент $x \in \langle A_1, T_1 \rangle$ такой, что A_1 перестановочна с T_1^x . В работе получено описание композиционных pd -факторов группы, у которой каждая максимальная подгруппа из некоторой силовой p -подгруппы имеет силовайзер, который является tcc -подгруппой.

Ключевые слова: tcc -подгруппа, максимальная подгруппа, силовская подгруппа, силовайзер, композиционные факторы.

On Composition Factors of a Finite Group in Which Some Subgroups are tcc -Subgroups

A subgroup A of a group G is called a tcc -subgroup of G if there is a supplement T to A in G such that for each subgroup A_1 of A and each subgroup T_1 of T there is an element $x \in \langle A_1, T_1 \rangle$ such that A_1 permutes with T_1^x . In this paper, we obtain a description of the pd -composition factors of a group in which each maximal subgroup of some Sylow p -subgroup has a sylowizer that is a tcc -subgroup.

Key words: tcc -subgroup, maximal subgroup, Sylow subgroup, sylowizer, composition factors.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1; 2]. Запись $H \leq G$ означает, что H – подгруппа группы G . Если $H \leq G$ и $H \neq G$, то пишем $H < G$. Запись $H \trianglelefteq G$ означает, что H – нормальная подгруппа группы G . Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Заметим, что равенство $AB = BA$ равносильно тому, что $AB \leq G$.

Согласно [3], подгруппы A и B группы G называются *тотально перестановочными*, если каждая подгруппа из A перестановочна с каждой подгруппой из B . Напомним, что *добавлением (дополнением)* к подгруппе A в группе G называется подгруппа T такая, что $G = AT$ ($G = AT$ и $A \cap T = 1$).

В работе [4] было предложено следующее определение: подгруппы A и B называются X -перестановочными, если A перестановочна с B^x для некоторого $x \in X$, где X – некоторое непустое подмножество группы G .

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках выполнения задания «Конечные группы с формационно-арифметическими свойствами структурных объектов» (№ госрегистрации 20211467) ГПНИ «Конвергенция – 2025», подпрограмма «Математические модели и методы» на 2021–2025 гг.

Если $X = \langle A, B \rangle$, то X -перестановочные подгруппы A и B называются *сс-перестановочными* подгруппами [5]. Очевидно, что если подгруппы A и B перестановочны, то они сс-перестановочны. Естественным обобщением тотально перестановочных подгрупп стало понятие тсс-перестановочных подгрупп: подгруппы A и B группы G называются *тсс-перестановочными*, если каждая подгруппа из A сс-перестановочна с каждой подгруппой из B . Результаты, связанные исследованием групп с заданными системами сс-перестановочных и тсс-перестановочных подгрупп, отражены в монографии [6].

В работе [7] было введено следующее понятие: подгруппа A группы G называется *тсс-подгруппой* в G , если для подгруппы A существует добавление T в группе G такое, что A и T тсс-перестановочны. Подгруппу T в дальнейшем будем называть *тсс-добавлением* к подгруппе A в группе G . Кроме того, в [7] изучены свойства тсс-подгрупп, а также строение конечной группы, у которой сомножители силовские и максимальные подгруппы являются тсс-подгруппами.

Теорема А. *Группа G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

- (1) *каждая максимальная подгруппа из G является тсс-подгруппой в G ;*
- (2) *каждая силовская подгруппа из G является тсс-подгруппой в G ;*
- (3) *$G = AB$, где A и B – сверхразрешимые тсс-подгруппы в G .*

Группы, у которых 2-максимальные подгруппы, максимальные подгруппы из силовских подгрупп, минимальные подгруппы удовлетворяют некоторому типу перестановочности, исследовались многими авторами [8; 9].

В теореме В изучено строение конечной группы, у которой 2-максимальные подгруппы, максимальные подгруппы из силовских подгрупп или все минимальные подгруппы являются тсс-подгруппами.

Теорема В. 1. *Пусть H – нормальная подгруппа группы G . Предположим, что G/H сверхразрешима и каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из H является тсс-подгруппой в G . Тогда группа G сверхразрешима.*

2. *Если каждая 2-максимальная подгруппа из G является тсс-подгруппой в G , то группа G сверхразрешима.*

3. *Если каждая максимальная подгруппа из каждой нециклической силовской подгруппы разрешимой группы G является тсс-подгруппой в G , то группа G сверхразрешима.*

Понятие силовайзера было введено Гашюцем в [10]. Подгруппа S группы G называется *силовайзером* p -подгруппы R в G , если S – максимальная среди подгрупп группы G , в которых R является силовской p -подгруппой. Гашюц [10] показал, что силовайзеры данной p -подгруппы в разрешимой группе не всегда сопряжены, а также привел некоторые достаточные условия, при которых p -подгруппа имеет сопряженные силовайзеры.

В настоящей работе предложены новые признаки p -сверхразрешимости группы с заданными системами тсс-подгрупп.

Теорема 1. *Пусть P – силовская p -подгруппа группы G и G p -разрешима. Если каждая максимальная подгруппа из P имеет силовайзер, который является тсс-подгруппой в G , то G p -сверхразрешима.*

Следствие 1. *Если каждая максимальная подгруппа из каждой силовской подгруппы разрешимой группы G имеет силовайзер, который является тсс-подгруппой в G , то группа G сверхразрешима.*

Если предположить, что группа не является p -разрешимой, то естественным является описание композиционных pd -факторов группы. Доказана следующая

Теорема 2. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G . Если каждая максимальная подгруппа из P имеет силовайзер, который является тсс-подгруппой, то каждый неабелевый композиционный pd -фактор группы G изоморфен одной из следующих подгрупп:

- 1) $PSL(2, 7)$ и $p = 7$;
- 2) $PSL(2, 11)$ и $p = 11$, M_{11} и $p = 11$;
- 3) M_{23} и $p = 23$;
- 4) $PSL(2, 2^t)$ и $p = 2^t + 1 > 3$ – простое число Ферма;
- 5) $PSL(n, q)$, $n \geq 3$ – простое, $(n; q-1) = 1$ и $p = \frac{q^n - 1}{q - 1}$;
- 5) A_p и $p \geq 5$.

1. Вспомогательные результаты

Приведем известные результаты, которые неоднократно будут использоваться в доказательствах.

Через G' , $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в G p - и p' -подгруппы соответственно; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G . Элементарная абелева группа порядка p^t и циклическая группа порядка m обозначаются E_{p^t} и Z_m соответственно, а $A \rtimes B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B .

Лемма 2.1 ([11, лемма 5]) Предположим, что p -разрешимая группа G не принадлежит pU , но $G/K \in pU$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) $Z(G) = O_p(G) = \Phi(G) = 1$;
- (2) группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N , $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$;
- (3) G – примитивная группа; $G = N \rtimes M$, где M – максимальная подгруппа в группе G с единичным ядром;
- (4) N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n , $n > 1$;
- (5) если подгруппа M – абелева, то M циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$.

Здесь pU – класс всех p -сверхразрешимых групп.

Лемма 2.2 ([7, лемма 3.1]). Пусть A – тсс-подгруппа группы G и Y – тсс-добавление к A в G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) A – тсс-подгруппа в H для каждой подгруппы H группы G такой, что $A \leq H$;
- (2) AN/N – тсс-подгруппа в G/N для каждой $N \trianglelefteq G$;

(3) для каждой $A_1 \trianglelefteq A$ и $X \leq Y$ существует $u \in Y$ такой, что $A_1 X^u \leq G$. В частности, $A_1 M \leq G$ для некоторой максимальной подгруппы M группы Y и $A_1 H \leq G$ для некоторой π -холловой подгруппы H разрешимой группы Y и любого $\pi \subseteq \pi(G)$.

Доказательство.

1. Так как Y – тсс-добавление к A в G , то $G = AY$, A и Y – тсс-перестановочные подгруппы из G . По тождеству Дедекинда $H = H \cap AY = A(H \cap Y)$. Так как $H \cap Y \leq Y$, то для любых $X \leq A$ и $Z \leq H \cap Y$ существует элемент $u \in \langle X, Z \rangle$ такой, что $XZ^u \leq G$. Поэтому A и $H \cap Y$ тсс-перестановочны и, значит, A – тсс-подгруппа в H .

2. Так как $G = AY$, то $G/N = (AN/N)(YN/N)$. Пусть B/N – произвольная подгруппа из AN/N и X/N – произвольная подгруппа в YN/N . Так как $N \leq B \leq AN$, то, по тождеству Дедекинда, $B = B \cap AN = (B \cap A)N$.

Аналогично, $X = X \cap YN = (X \cap Y)N$. Так как $B \cap A \leq A$ и $X \cap Y \leq Y$, то $(B \cap A)(X \cap Y)^u \leq G$ для некоторого $u \in \langle B \cap A, X \cap Y \rangle$. Поэтому

$$(B/N)(X/N)^{uN} = (B \cap A)(X \cap Y)^u N/N \leq G/N$$

для $uN \in \langle B \cap A, X \cap Y \rangle N/N \subseteq \langle B, X \rangle N/N = \langle B/N, X/N \rangle$. Значит, AN/N – тсс-подгруппа в G/N .

3. Так как A – тсс-подгруппа группы G , то, по определению, для каждой $A_1 \trianglelefteq A$ и $X \leq Y$ существует $u \in \langle A_1 X \rangle$ такой, что $A_1 X^u \leq G$. Так как $u \in G = AY = YA$, то $u = ua$ для некоторых $y \in Y$ и $a \in A$. Тогда

$$A_1 X^u = A_1 X^{ya} = A_1 (X^y)^a = A_1^a (X^y)^a = (A_1 X^y)^a \leq G.$$

Поэтому существует подгруппа $A_1 X^y$ в группе G для некоторого $y \in Y$. Очевидно, что если X – π -холлова подгруппа группы Y , то $H = X^y$ – π -холлова подгруппа группы Y . Поэтому $A_1 H \leq G$. Аналогично и в случае, когда X – максимальная подгруппа группы Y . Тогда $M = X^y$ – максимальная подгруппа группы Y и $A_1 M \leq G$.

Лемма 2.3 ([10]). Пусть R – p -подгруппа группы G и $N \trianglelefteq G$.

1. Предположим, что $N \leq R$. Тогда S – силовайзер R в G тогда и только тогда, когда $N \leq S$ и S/N – силовайзер R/N в G/N .

2. Предположим, что N – p' -группа. Тогда S – силовайзер R в G тогда и только тогда, когда $N \leq S$ и S/N – силовайзер RN/N в G/N .

3. Предположим, что R – силовская p -подгруппа в RN . Тогда S – силовайзер R в G тогда и только тогда, когда S/N – силовайзер RN/N в G/N .

Лемма 2.4 ([12, теорема 1]). Пусть G – группа, $p \in \pi(G)$. Предположим, что каждая подгруппа простого порядка p дополняема в G . Если G не является p -разрешимой, то неабелевы композиционные pd -факторы группы G изоморфны одной из следующих подгрупп:

- 1) $PSL(2, 7)$ и $p = 7$;
- 2) $PSL(2, 11)$ и $p = 11$, M_{11} и $p = 11$;
- 3) M_{23} и $p = 23$;

4) $PSL(2, 2^t)$ и $p = 2^t + 1 > 3$ – простое число Ферма;

5) $PSL(n, q), n \geq 3$ – простое, $(n; q-1) = 1$ и $p = \frac{q^n - 1}{q - 1}$;

6) A_p и $p \geq 5$.

В дальнейшем для удобства проводимых доказательств неабелевы композиционные pd -факторы группы из заключения леммы 2.4 будем считать принадлежащими множеству Ω .

2. Доказательство теоремы 1 и теоремы 2

Теорема 1. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G и G p -разрешима. Если каждая максимальная подгруппа из P имеет силовайзер в G , который является тсс-подгруппой в G , то G p -сверхразрешима.

Доказательство.

Предположим, что теорема неверна и группа G – контрпример минимального порядка. Пусть N – неединичная нормальная подгруппа группы G . Если $P \leq N$, то G/N – p' -подгруппа, а следовательно G/N p -сверхразрешима.

Предположим, что $P \not\leq N$. Пусть $\bar{P}_1 = X/N$ – максимальная подгруппа силовской p -подгруппы $\bar{P}$ из G/N . Тогда существует силовская p -подгруппа P в G такая, что $\bar{P} = PN/N$. Далее, $X = X \cap PN = (X \cap P)N$. Так как $P \cap N = X \cap P \cap N$, то

$$\begin{aligned} p &= |\bar{P} : \bar{P}_1| = |PN/N : X/N| = |PN : X| = \\ &= |PN : (X \cap P)N| = \frac{|P \parallel N \parallel X \cap P \cap N|}{|P \cap N \parallel X \cap P \parallel N|} = |P : X \cap P|. \end{aligned}$$

Значит, $P_1 = X \cap P$ – максимальная подгруппа в P .

Так как $P \not\leq N$, то $P_1 \cap N = N_p = N \cap P$ и P_1 – силовская p -подгруппа в P_1N . Пусть S – силовайзер для P_1 в G . По лемме 2.3 (3), S/N – силовайзер для P_1N/N в G/N . По условию, S – тсс-подгруппа в G . По лемме 2.2 (2), S/N – тсс-подгруппа в G/N . Тогда по индукции группа G/N p -сверхразрешима.

По лемме 2.1, группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N , $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N) \leq P$, $G = N \rtimes M$, N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n , $n > 1$.

Пусть P_1 – максимальная подгруппа в P . По условию теоремы, существует силовайзер S для подгруппы P_1 в G и S – тсс-подгруппа в G . Тогда существует подгруппа Y в G такая, что $SY = G$ и, по лемме 2.2 (3), $SY_p \leq G$ для некоторой силовской p -подгруппы Y_p и $SY_q = S$ для некоторой силовской q -подгруппы Y_q , $q \in \pi(Y)$, $q \neq p$ из тсс-добавления Y . Поэтому $SY_p = G$ и $|G : S| = p$.

Предположим, что $N = P$. Так как $|G : S| = p$, то $G = SP$ и P_1 нормальна в G , т. к. G p -замкнута. Противоречие. Если $N < P$, то $P = N \rtimes M_p$. Очевидно, что существует максимальная подгруппа P_2 в P такая, что $M_p \leq P_2$. По условию теоремы, существует силовайзер T подгруппы P_2 в G и T – тсс-подгруппа в G . По доказан-

ноту вышэ $|G:T| = p$ і T – максімальная падгрупа ў G . Так як $N \not\leq T$, то $NT = G$. Пасколькі $N \cap T$ нормальна ў $G = NT$, то $N \cap T = 1$ і $|N| = p$. Пратыворечце.

Тэарэма 2. *Пусть P – сілавая p -падгрупа групы G . Если каждая максимальная подгруппа из P имеет силовайзер в G , который является тсс-подгруппой, то каждый неабелевый композиционный pd -фактор группы G изоморфен одной из следующих подгрупп:*

- 1) $PSL(2, 7)$ и $p = 7$;
- 2) $PSL(2, 11)$ и $p = 11$, M_{11} и $p = 11$;
- 3) M_{23} и $p = 23$;
- 4) $PSL(2, 2^t)$ и $p = 2^t + 1 > 3$ – простое число Ферма;
- 5) $PSL(n, q)$, $n \geq 3$ – простое, $(n; q-1) = 1$ и $p = \frac{q^n - 1}{q - 1}$;
- 6) A_p и $p \geq 5$.

Доказательство.

Пусть P_1 – максимальная подгруппа в P . По условию теоремы, существует силовайзер S подгруппы P_1 в G и S – тсс-подгруппа в G .

Тогда $SY = G$ и Y – тсс-добавление к S в G . По лемме 2.2 (3), $SY_p \leq G$ для некоторой силовой p -подгруппы Y_p и $SY_q = S$ для некоторой силовой q -подгруппы Y_q , $q \in \pi(Y)$, $q \neq p$. Поэтому $SY_p = G$, $|G:S| = p$ и $G = SP$.

Предположим, что G – простая группа. Тогда G/S_G изоморфна подгруппе симметрической группы S_p степени p , поскольку $|G:S| = p$. Так как G – простая группа, то $S_G = 1$ и G изоморфна подгруппе симметрической группы S_p степени p . Поэтому $|P| = p$ и $P \cap S = 1$, т. к. $|G:S| = p$. Значит, P – дополняемая подгруппа в группе G . По лемме 2.4, $G \in \Omega$.

Предположим, что G непростая группа. Значит, существует минимальная нормальная подгруппа N в G такая, что

$$N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k,$$

где N_i , $i = 1, \dots, k$ – неабелевы простые группы, изоморфные между собой.

Предположим, что N – p' -группа. Пусть P_1N/N – максимальная подгруппа силовой p -подгруппы PN/N группы G/N , где P_1 – максимальная подгруппа в P и S/N – силовайзер для P_1N/N в G/N .

По лемме 2.3 (2), S – силовайзер подгруппы P_1 в G . По условию, S – тсс-подгруппа в G . По лемме 2.2 (2), подгруппа S/N – тсс-подгруппой в G/N .

По индукции, все неабелевы композиционные pd -факторы группы G/N изоморфны подгруппам из Ω . Так как N – p' -группа, то все неабелевы композиционные pd -факторы группы G изоморфны подгруппам из Ω .

Значит, $p \in \pi(N)$. Если $P \leq N$, то G/N – p' -подгруппа. Если $P \not\leq N$, то $P_1 \cap N = N_p = N \cap P$ и P_1 – силовая p -подгруппа в P_1N . Пусть S – силовайзер

для P_1 в G . По лемме 2.3 (3), S/N – силовайзер для P_1N/N в G/N . По условию, S – тсс-подгруппа в G . По лемме 2.2 (2), S/N – тсс-подгруппа в G/N . По индукции, все неабелевы композиционные pd -факторы группы G/N изоморфны подгруппам из Ω .

Исследуем все неабелевы композиционные pd -факторы, которые лежат ниже, чем N . Так как $|G:S|=p$ и $S \leq SN \leq G$, то $|SN:S|=1$ или $|SN:S|=p$. Если $|SN:S|=1$, то $SN=S$ и $N \leq S$. Если $N \cap P = N_p \leq \Phi(P)$, то N p -нильпотентна по лемме Тате. Так как N p -нильпотентна, то N_i p -нильпотентна для любого i . Поскольку N_i – простая группа, то N_i – p' -группа для любого i . Поэтому в этом случае теорема доказана. Если $N_p \not\leq \Phi(P)$, то существует максимальная подгруппа P_0 в P такая, что $N_p P_0 = P$. Пусть S_0 – силовайзер подгруппы P_0 в G . Тогда, по доказанному выше, $|G:S_0|=p$ и

$$G = S_0 P = S_0 N_p P_0 = S_0 N_p = S_0 N.$$

Поэтому существует силовайзер S_0 такой, что $S_0 N = G$ и $|G:S_0|=p$.

Таким образом, будем считать, что в обоих случаях существует силовайзер S такой, что $|SN:S|=p$. Тогда $|SN:S|=p=|N:N \cap S|$ и $N \cap S$ – максимальная подгруппа в N . Очевидно, что существует N_r нормальная в N , $r \in \{1, \dots, k\}$, такая, что $N_r \not\leq N \cap S$ и $N = N_r(N \cap S)$. Тогда

$$p = |N:N \cap S| = |N_r:N_r \cap N \cap S| = |N_r:N_r \cap S|.$$

Поэтому

$$N_r / (N_r \cap S)_{N_r} \cong S_p.$$

Так как N_r – простая группа, то $(N_r \cap S)_{N_r} = 1$ и $N_r \cong S_p$. Тогда $|(N_r)_p|=p$ и $N_r \cap S$ – p' -группа. Поэтому $N_r = (N_r)_p(N_r \cap S)$ и $(N_r)_p$ дополняема в N_r . По лемме 2.4, $N_r \in \Omega$, а значит, все неабелевы композиционные pd -факторы группы G , лежащие ниже N , изоморфны подгруппам из Ω .

Заключение

Полученные в данной работе результаты являются основой для исследования композиционных факторов конечной группы, у которой максимальные подгруппы из некоторой силовской p -подгруппы являются тсс-подгруппами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – С. 207.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin : Springer-Verlag, 1967.
3. Carocca, A. p -supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Mathematical Journal. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.
4. Скиба, А. Н. Н-перестановочные подгруппы / А. Н. Скиба // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2003. – № 4. – С. 37–39.
5. Guo, W. Criteria of supersolvability for products of supersoluble groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – Vol. 68, Nr 3–4. – P. 433–449.

6. Трофимук, А. А. Конечные факторизуемые группы с ограничениями на сомножители / А. А. Трофимук. – Минск : БГУ, 2021. – 262 с.
7. Trofimuk, A. A. On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups / A. A. Trofimuk // Journal of Algebra and Its Applications. – 2021. – 2150020 (18 p.).
8. Monakhov, V. S. Finite groups with subnormal non-cyclic subgroups / V. S. Monakhov, A.A. Trofimuk // Journal of Group Theory. – 2014. – Vol. 17, Nr 5. – P. 889–895.
9. Guo, W. Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups σ -permutably embedded / W. Guo, A. N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20. – P. 169–183.
10. Gaschütz, W. Sylowisatoren / W. Gaschütz // Math. Z. – 1971. – Vol. 122, Nr 4. – P. 319–320.
11. Монахов, В. С. О р-сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с нормальными сомножителями / В. С. Монахов, И. К. Чирик // Тр. ИММ УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 3. – С. 256–267.
12. Monakhov, V. S. Finite groups with complemented subgroups of prime orders / V. S. Monakhov, V. N. Kniahina // J. Group Theory. – 2015. – Nr 18. – P. 905–912.

REFERENCES

1. Monakhov, V.S. Introduction to the Theory of Final Groups and Their Classes / V. S. Monakhov. – Minsk: Vysh. Shkola, 2006. – 207 p.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin : Springer-Verlag, 1967.
3. Carocca, A. p-supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Mathematical Journal. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.
4. Skiba, A. N. Н-периестановочныя падгрупы / A. N. Skiba // Izv. Gomiel. Gos. un-ta im. F. Skoriny. – 2003. – № 4. – С. 37–39.
5. Guo, W. Criteria of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – Vol. 68, Nr 3–4. – P. 433–449.
6. Trofimuk, A. A. Koniechnyie faktorizijemyie grupy s ograniczenijami na somnozhiteli / A. A. Trofimuk. – Minsk : BGU, 2021. – 262 s.
7. Trofimuk, A. A. On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups / A. A. Trofimuk // Journal of Algebra and Its Applications. – 2021. – 2150020 (18 p.).
8. Monakhov, V. S. Finite groups with subnormal non-cyclic subgroups / V. S. Monakhov, A.A. Trofimuk // Journal of Group Theory. – 2014. – Vol. 17, Nr 5. – P. 889–895.
9. Guo, W. Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups σ -permutably embedded / W. Guo, A. N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20. – P. 169–183.
10. Gaschütz, W. Sylowisatoren / W. Gaschütz // Math. Z. – 1971. – Vol. 122, Nr 4. – P. 319–320.
11. Monakhov, V. S. О р-сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с нормальными сомножителями / V. S. Monakhov, I. K. Chirik // Тр. ИММ УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 3. – С. 256–267.
12. Monakhov, V. S. Finite groups with complemented subgroups of prime orders / V. S. Monakhov, V. N. Kniahina // J. Group Theory. – 2015. – Nr 18. – P. 905–912.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 05.11.2024

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай, рускай ці англійскай мове ў адным экзэмпляры аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша (14 000 – 20 000 знакаў), у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc, *.docx ці *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармату А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарыны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Усе малюнкi і фотаздымкі павінны быць толькі ў чорна-белым выкананні. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 (у рэдакцыі загада ад 01.10.2024 № 230). Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках ([1–4], [1; 3], [1, с. 32], [2, с. 52–54], [3, л. 5], [4, л. 60б.]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў (аўтараў не больш за 5) на мове артыкула;
- звесткі пра аўтара/аўтараў (навуковая ступень, званне, пасада, месца працы/вучобы) на мове артыкула;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- звесткі пра аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- e-mail аўтара/аўтараў;
- назва артыкула на мове артыкула;
- анатацыя ў аб'ёме 100–150 слоў і ключавыя словы на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- назва артыкула на англійскай мове;
- анатацыя і ключавыя словы на англійскай мове.

Звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы ўнізе.

Асноўны тэкст структуруюцца ў адпаведнасці з патрабаваннямі Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў:

- Уводзіны (пастаўка мэты і задач даследавання).
- Асноўная частка (матэрыялы і метады даследавання; вынікі і іх абмеркаванне).
- Заклучэнне (фармулююцца асноўныя вынікі даследавання, указваецца іх навізна, магчымасці выкарыстання).
- Спіс выкарыстанай літаратуры; спіс літаратуры павінен уключаць не больш за 20–22 крыніцы і абавязкова ўтрымліваць публікацыі, у тым ліку замежныя, па тэме даследавання за апошнія 10 гадоў.

➤ References – спіс выкарыстанай літаратуры, які прадубліраваны лацінскім алфавітам (колькасць крыніц, прыведзеных у спісе і ў References, павінна супадаць).

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе (вучыцца) аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў);
- вынікі правэркі тэксту на прадмет арыгінальнасці пры дапамозе інструмента «Антыплагіят» (арыгінальнасць павінна складаць не менш за 70 %).

Усе артыкулы абавязкова праходзяць «сляпое» рэцэнзаваанне. Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегія не разглядае і не вяртае. Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Рукапіс артыкула і дакументы дасылаць на адрас: 224016, г. Брэст, бульвар Касманаўтаў, 21, рэдакцыя часопіса «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта», электронны варыянт артыкула накіроўваць на e-mail: vesnik@brsu.by.

Карэктары *А. А. Іванюк, Л. М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *Г. Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 31.12.2024. Фармат 60×84/8. Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Рызаграфія.

Ум. друк. арк. 16,51. Ул.-выд. арк. 11,20. Тыраж 50 экз. Заказ № 427.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.