УДК 512.542

***Полина Александровна Павлушко*[1], *Александр Александрович Трофимук*[2]**
[1]студент III курса физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]д-р физ.-мат. наук, доц., зав. каф. фундаментальной математики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
***Polina Pavlushko*[1], *Alexandr Trofimuk*[2]**
[1]1-st Student of the Faculty of Physics and Mathematics of Brest State A. S. Pushkin University
[2]Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Head of the Department of Fundamental Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: [1]polinapavlushko@gmail.com; [2]alexander.trofimuk@gmail.com

О ПРОИЗВОДНОЙ ДЛИНЕ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ИНДЕКСЫ НЕАБЕЛЕВЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП*

Исследуются конечные разрешимые группы с фиксированными индексами неабелевых максимальных подгрупп. В частности, установлено, что для разрешимой группы, максимальные подгруппы которой либо абелевы, либо имеют индексы, не делящиеся на $(n+1)$-ых степени простых чисел, производная длина $d(G/\Phi(G)) \le 3+n$. В работе получена оценка производной длины конечных разрешимых групп с малыми индексами неабелевых максимальных подгрупп. Исследованы такие A_4-свободные группы. Построены примеры, показывающие точность полученных оценок.

Ключевые слова: *производная длина, максимальные подгруппы, разрешимые группы.*

On the Derived Length of Soluble Groups with Restrictions on the Indices of Non-Abelian Maximal Subgroups

Finite soluble groups with fixed indices of non-Abelian maximal subgroups are studied. In particular, it is established that for a soluble group whose maximal subgroups are either Abelian or have indices not divisible by the $(n+1)$-th powers of prime numbers, the derived length is $d(G/\Phi(G)) \le 3+n$. In present paper we obtain an estimate for the derived length of finite soluble groups with small indices of non-Abelian maximal subgroups. Such A_4-free groups are studied. We also constructed examples that show the accuracy of the estimates

Key words: *the derived length, maximal subgroups, soluble groups.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

В теории конечных групп одними из центральных объектов, оказывающих существенное влияние на строение группы, являются максимальные подгруппы. За 70 лет сформировалось направление, связанное с изучением строения группы в зависимости от индексов максимальных подгрупп. К данному направлению относятся и результаты настоящей работы.

Б. Хупперт [2] в 1954 г. доказал, что группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы ее максимальных подгрупп являются простыми числами. В этой же работе Б. Хупперт сформулировал проблему о разрешимости конечной группы с индексами максимальных подгрупп, являющимися простыми числами или квадратами простых чисел.

Положительный ответ на это вопрос дал Ф. Холл [3] в 1958 г. Он установил разрешимость конечной группы, у которой индексы максимальных подгрупп есть простые числа или квадраты простых чисел.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ «Конвергенция – 2025», № госрегистрации 20211467).

Детальное исследование разрешимых групп, у которых индексы максимальных подгрупп есть простые числа или квадраты простых чисел, получено в работе [4]. Строение разрешимых групп, у которых индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел, получено в работе [5].

Для исследования свойств разрешимых групп в зависимости от произвольной величины индексов максимальных подгрупп В. С. Монахов [6] предложил на множестве всех разрешимых групп рассматривать следующие функции:

$$m_p(G) = \max\{\log_p |G:M| \mid M <_{max} G, |G:M| = p^a\},\ p \in \pi(G);$$
$$m(G) = \max_{p\in\pi(G)} m_p(G).$$

В [6] получены оценки инвариантов разрешимых групп для произвольных значений $m(G)$. В частности, для разрешимой группы G справедлива следующая оценка: $d(G/\Phi(G)) \le 3 + m(G)$. Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G.

Д. А. Ходанович [7] заметил, что в результате Ф. Холла для разрешимости группы достаточно ограничивать индексы только ненильпотентных максимальных подгрупп. Очевидно, что такие группы охватывают группы, у которых индексы неабелевых максимальных подгрупп ограничены. Кроме того, в [7] были установлены оценки нильпотентной длины и p-длины разрешимой группы, у которой ненильпотентные максимальные подгруппы имеют индексы, свободные от четвертых степеней. Информацию об оценках производной длины таких групп работа [7] не содержала. Однако если наложить ограничения на индексы неабелевых максимальных подгрупп, то получим следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть G – разрешимая группа, максимальные подгруппы которой либо абелевы, либо имеют индексы, не делящиеся на $(n+1)$-ых степени простых чисел. Тогда $d(G/\Phi(G)) \le 3 + n$. В частности:*

1) Если максимальные подгруппы либо абелевы, либо имеют индексы, свободные от четвертых степеней, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6.

2) Если максимальные подгруппы либо абелевы, либо имеют индексы, свободные от кубов, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Пример 1. Пусть E_{7^3} – элементарная абелева группа порядка 7^3 и S – экстраспециальная группа порядка 3^3. В системе компьютерной алгебры GAP построена группа $G = [E_{7^3}]([S]SL(2,3))$ порядка 222264 с единичной подгруппой Фраттини, у которой максимальные подгруппы имеют индексы, свободные от четвертых степеней. Производная длина группы G равна 6. Значит, оценка производной длины в теореме 1 (1) точная.

Пример 2. Пусть S – экстраспециальная группа порядка 3^3. В системе компьютерной алгебры GAP построена группа $G = [S]GL(2,3)$ порядка 1296, у которой максимальные подгруппы имеют индексы, свободные от кубов. Производная длина группы $G/\Phi(G)$ равна 5. Значит, оценка производной длины в теореме 1 (2) точная.

Разрешимые группы из п. 1 и п. 2 теоремы 1 имеют различные верхние границы производной длины. Однако, если индексы неабелевых максимальных подгрупп ограничить кубами малых простых чисел $p \in \{2,3,5,11,17\}$, то можно сохранить верхнюю оценку производной длины $G/\Phi(G)$, равную 5.

Следствие 1. *Пусть в разрешимой группе* G *максимальные подгруппы либо абелевы, либо имеют индексы, равные простому числу, квадрату простого числа или* p^3, *где* $p \in \{2,3,5,11,17\}$. *Тогда производная длина фактор-группы* $G/\Phi(G)$ *не превышает 5.*

Пример 3. В системе компьютерной алгебры GAP построена группа, подтверждающая точность полученной оценки производной длины в следствии 1. Так, группа $G = [E_{3^5}]GL(2,3)$ порядка 11664 с единичной подгруппой Фраттини имеет индексы максимальных подгрупп, принадлежащие множеству $\{2,\ 3, 2^2, 3^2, 3^3\}$, и производную длину, равную 5.

Напомним, что группа называется A_4-свободной, если она не содержит секций, изоморфных знакопеременной группе A_4.

Из теоремы Гуральника следует, что если индекс любой максимальной подгруппы группы G примарен, то группа G либо разрешима, либо $G/S(G)$ изоморфна простой группе $PSL(2,7)$. Здесь $S(G)$ – разрешимый радикал группы G. Так как в $PSL(2,7)$ есть подгруппа, изоморфная знакопеременной группе A_4, то любая A_4-свободная группа, у которой индексы максимальных подгрупп примарны, является разрешимой.

Следствие 2. *Пусть* G *–* A_4*-свободная группа.*

1) Если максимальные подгруппы либо абелевы, либо имеют индексы, свободные от четвертых степеней, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ *не превышает 5.*

2) Если максимальные подгруппы либо абелевы, либо имеют индексы, свободные от кубов, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ *не превышает* 3.

Пример 4. Пусть E_{7^3} – элементарная абелева группа порядка 7^3, S – экстраспециальная группа порядка 3^3 и Q_8 – группа кватернионов порядка 8. В системе компьютерной алгебры GAP построена A_4-свободная группа $G = [E_{7^3}]([S]Q_8)$ порядка 74088 с единичной подгруппой Фраттини, у которой максимальные подгруппы имеют индексы, свободные от четвертых степеней. Производная длина группы G равна 5. Значит, оценка производной длины в следствии 2 (1) точная.

Пример 5. Группа $G = [E_{3^2}]Q_8$ является A_4-свободной с единичной подгруппой Фраттини. Кроме того, G имеет индексы максимальных подгрупп, свободные от кубов, и производную длину равную 3. Следовательно, оценка производной длины, полученная в следствии 2 (2), является точной.

1. Вспомогательные результаты

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{FH} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{FF}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначают через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно.

Здесь $\rho(n)$ – максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп полной линейной группы $GL(n,\mathrm{P})$ над полем P. Значения $\rho(n)$ вычислены для всех n.

Пусть n и m – натуральные числа. Говорят, что m свободно от n-х степеней, если p^n не делит m для всех простых чисел p. При $n=4$ говорят, что m свободно от четвертых степеней, а при $n=3$ – свободно от кубов.

Для доказательства нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда $\mathfrak{NF}$ – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно [8, с. 36], произведение $\mathfrak{NF}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{NF}$ – насыщенная формация.

Лемма 2 ([9], лемма 13). *Если H – A_4-свободная разрешимая неприводимая подгруппа группы $GL(n,p)$. Тогда:*

1) если $n=2$, то H *метабелева*;

2) если $n=3$, то $H\in\mathfrak{A}^4$.

Лемма 3 ([9], лемма 7). *Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G)\in\mathfrak{A}^k$, когда $G\in\mathfrak{NA}^{k-1}$.*

Лемма 4 ([9], лемма 12). *Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n,p)$. Тогда:*

1) если $n=2$, то $H\in\mathfrak{N}^3\cap\mathfrak{A}^4$;

2) если $n=3$, то $H\in\mathfrak{N}^3\cap\mathfrak{A}^5$.

Лемма 5 ([10], теорема 7.1). *Если H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(3,2)$, то $H\in\mathfrak{A}^2$.*

Лемма 6 ([10], теорема 7.1). *Если H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(3,p)$, где $p\in\{3,5,11,17\}$, то $H\in\mathfrak{A}^3$.*

2. Доказательство теоремы 1

Применим индукцию по порядку группы G. Покажем, что $G\in\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(n)}$. Предположим, что $\Phi(G)\neq 1$ и $M/\Phi(G)$ – произвольная максимальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Тогда M – максимальная подгруппа группы G и по условию теоремы M либо абелева, либо ее индекс $|G:M|$ свободен от $(n+1)$-ых степеней.

Поэтому в первом случае фактор-группа $M/\Phi(G)$ является абелевой, а так как $|G:M|=|G/\Phi(G):M/\Phi(G)|$, то во втором случае индекс максимальной подгруппы $M/\Phi(G)$ в группе $G/\Phi(G)$ свободен от $(n+1)$-ых степеней. Таким образом, условие теоремы наследуют все фактор-группы $G/\Phi(G)$. Поэтому справедливо включение $G/\Phi(G)\in\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(n)}$. Так как по лемме 1 формация $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(n)}$ насыщенна, то $G\in\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(n)}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G)=1$.

По теореме III.4.5 [11] подгруппа Фиттинга $F=F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп F_i группы G, где $1\le i\le k$. Поэтому по теореме I.4.5 [11] для каждого F_i фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $Aut(F_i)$. По лемме I.9.6 [11] фактор-группа

$G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(F_i)$, $1 \le i \le k$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то

$$\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = C_G(F) = F \text{ и } G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = G/F.$$

Пусть F_i – элементарная абелева p_i-подгруппа. Ясно, что для каждого i существует максимальная подгруппа M_i в группе G, такая, что $G = [F_i]M_i$. Если M_i абелева, то $G \in \mathrm{N}\mathrm{A} \subseteq \mathrm{N}\mathrm{A}^{\rho(n)}$. Поэтому считаем, что индекс $F_i = |G : M_i| = p_i^{m_i}$, $m_i \le n$.

Поскольку $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(m_i, p_i)$ и неприводимая группа вполне приводима, то из определения функции $\rho(n)$ получаем, что $\rho(m_i) \le \rho(n)$ и $G/C_G(F_i) \in \mathrm{A}^{\rho(m_i)} \subseteq \mathrm{A}^{\rho(n)}$. Таким образом, для каждого i фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathrm{A}^{\rho(n)}$. Так как $\mathrm{A}^{\rho(n)}$ – формация, то $G/F \in \mathrm{A}^{\rho(n)}$. Значит, $G \in \mathrm{NA}^{\rho(n)}$ и по лемме 3 $G/\Phi(G) \in \mathrm{A}^{\rho(n)+1}$. Таким образом, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G))$ не превышает $\rho(n)+1$. Поскольку $\rho(n) \le n+2$, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G))$ не превышает $n+3$.

Очевидно, что если максимальные подгруппы либо абелевы, либо имеют индексы, свободные от четвертых степеней, то $n = 3$ и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6. Если максимальные подгруппы либо абелевы, либо имеют индексы, свободные от кубов, то $n = 2$ и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Теорема доказана.

3. Доказательство следствия 1

Вначале докажем, что $G \in \mathrm{F} = \mathrm{N}\mathrm{A}^4$. Воспользуемся индукцией по порядку G. Предположим, что $\Phi(G) \ne 1$ и $M/\Phi(G)$ – максимальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Тогда M – максимальная подгруппа группы G и по условию теоремы M либо абелева, либо ее индекс $|G : M|$ есть простое число, квадрат простого или p^3, где $p \in \{2,3,5,11,17\}$. В первом случае, фактор-группа $M/\Phi(G)$ абелева. Так как $|G : M| = |G/\Phi(G) : M/\Phi(G)|$, то во втором случае индекс максимальной подгруппы $M/\Phi(G)$ в группе $G/\Phi(G)$ есть простое число, квадрат простого или p^3, где $p \in \{2,3,5,11,17\}$. Таким образом, фактор-группа $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условию теоремы и $G/\Phi(G) \in \mathrm{F}$. Так как по лемме 1 формация F насыщенна, то $G \in \mathrm{F}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$.

Основываясь на доказательстве теоремы 1, рассмотрим следующие случаи.

Если M_i абелева, то $G \in \mathrm{N}\mathrm{A} \subset \mathrm{F}$. Поэтому считаем, что индекс $F_i = |G : M_i|$ есть простое число, квадрат простого или p_i^3, где $p_i \in \{2,3,5,11,17\}$. Поэтому возможны следующие варианты: $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$; $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$; $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(3, p_i)$, где $p_i \in \{2,3,5,11,17\}$.

В первом случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(F_i) \in \mathrm{A} \subset \mathrm{A}^4$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и по лемме 4 фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathrm{A}^4$.

В третьем случае, если $|F_i| = p_i^3$, где $p \in \{3,5,11,17\}$. Тогда $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3, p)$. Из лемм 5–6 следует, что $G/C_G(F_i) \in \mathrm{A}^3 \subset \mathrm{A}^4$.

Значит, $G/C_G(F_i) \in \mathrm{A}^4$. Так как A^4 – формация, то $G/F \in \mathrm{A}^4$. Поэтому $G \in \mathrm{F}$.

Итак, мы доказали, что $G \in \mathrm{NA}^4$. По лемме 3 $G/\Phi(G) \in \mathrm{A}^5$ и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

4. Доказательство следствия 2

Пусть G является A_4-свободной группой. Повторим предложенное в следствии 1 доказательство, рассмотрев случаи, когда $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$ и $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(3, p_i)$.

Если фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$, то по лемме 2 фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathrm{A}^2$.

Если фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3, p_i)$, то по лемме 2 фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathrm{A}^4$.

Значит, $G/C_G(F_i) \in \mathrm{A}^4$. Так как A^4 – формация, то $G/F \in \mathrm{A}^4$. Поэтому $G \in \mathrm{N}\mathrm{A}^4$ и по лемме 3 $G/\Phi(G) \in \mathrm{A}^5$. Таким образом, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Zeitschr. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
3. Холл, М. Теория групп / М. Холл. – М. : Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
4. Монахов, В. С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская // Мат. заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
5. Монахов, В. С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В. С. Монахов, М. В. Селькин, Е. Е. Грибовская // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.
6. Монахов, В. С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.
7. Ходанович, Д. А. О разрешимости конечной группы с ограниченными индексами ненильпотентных максимальных подгрупп / Д. А. Ходанович // Вестн. ПГУ. Сер. С, Фундамент. науки. – 2005. – № 4. – С. 18–22.
8. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

9. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

10. Bloom, D. The subgroups of $PSL(3,q)$ for Odd q / D. Bloom // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – Vol. 127, nr 1. – P. 150–178.

11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 793 p.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedienije v tieoriju koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk., 2006. – 207 s.

2. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Zeitschr. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

3. Kholl, M. Tieorija grupp / M. Kholl. – M. : Izd-vo inostr. lit., 1962. – 468 s.

4. Monakhov, V. S. O maksimal'nykh i silovskikh podgruppakh koniechnykh razrieshimykh grupp / V. S. Monakhov, Ye. Ye. Gribovskaja // Mat. zamietki. – 2001. – T. 70, № 4. – S. 603–612.

5. Monakhov, V. S. O razrieshimykh normal'nykh podgruppakh koniechnykh grupp / V. S. Monakhov, M. V. Siel'kin, Ye. Ye. Gribovskaja // Ukr. mat. zhurn. – 2002. – T. 54, № 7. – S. 940–950.

6. Monakhov, V. S. Zamiechanija o maksimal'nykh podgruppakh koniechnykh grupp / V. S. Monakhov // Dokl. NAN Bielarusi. – 2003. – T. 47, № 4. – S. 31–33.

7. Khodanovich, D. A. O razrieshimosti koniechnoj gruppy s ogranichiennymi indeksami nienil'potentnykh maksimal'nykh podgrupp / D. A. Khodanovich // Viestn. PGU. Sier. C, Fundamient. nauki. – 2005. – №. 4. – S. 18–22.

8. Shemietkov, L. A. Formacii koniechnykh grupp / L. A. Shemietkov. – M. : Nauka, 1978. – 272 s.

9. Monakhov, V. S. O koniechnykh razrieshimykh gruppakh fiksirovannogo ranga / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Sib. mat. zhurn. – 2011. – T. 52, № 5. – S. 892–903.

10. Bloom, D. The subgroups of $PSL(3,q)$ for Odd q / D. Bloom // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – Vol. 127, nr 1. – P. 150–178.

11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 793 p.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 04.04.2024