УДК 517.9

Марина Геннадьевна Кот
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. фундаментальной математики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Marina Kot
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of Department of Fundamental Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: mtorkaylo@mail.ru

РЕЗОЛЬВЕНТНАЯ СХОДИМОСТЬ ОПЕРАТОРОВ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ С ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Уравнения и системы, записываемые в виде $L_0 u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$, возникают в разных приложениях и интенсивно изучаются. Входящее в это уравнение произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций, поэтому одной из основных задач является придание смысла выражению в левой части уравнения, т. е. фактически построение оператора, который соответствует данному формальному выражению. Это достигается с помощью специальных аппроксимаций оператора умножения на δ-функцию. Для исследования уравнений с δ-образными коэффициентами применяется подход, основные этапы которого: построение аппроксимаций рассматриваемого выражения с помощью операторов конечного ранга; нахождение явного вида резольвенты аппроксимирующего семейства; нахождение предела резольвенты и выделение случаев резонанса, когда предельный оператор не совпадает с $-\Delta$; описание спектра построенных предельных операторов; исследование поведения собственных значений аппроксимирующих операторов. Цель данной работы заключается в нахождении предела резольвенты и выделении случаев резонанса.

Ключевые слова: *обобщенная функция, асимптотика, резонанс, оператор.*

Resolvent Convergence of Operators Approximating a System of Equations with Delta-Shaped Coefficients

The equations can be written as $L_0 u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$, there are in different applications and studied intensively. In this equation work δu not determined in the classical theory of generalized functions, so one of the main objectives is to give meaning to the expression on the left side of the equation, that is, the actual construction of the operator, which corresponds to a given formal expression. This is achieved by special approximations multiplication by δ-function. For the study of equations with δ-shaped coefficients an approach is used, the main steps of which are: the construction of approximations considered expressions with operators of finite rank; finding the explicit form approximating the resolvent family; resolvent limit of determi nation and allocation of cases of resonance; description of the spectrum constructed limit operators; study of the behavior of the eigenvalues of approximating operators. The purpose of this work is to find the limit of the resolvent and highlight cases of resonance.

Key words: *generalized function, asymptotic behavior, resonance, operator.*

Введение

Уравнения, записываемые в виде

$$\mathrm{L}_0 u = -\Delta u + a(\varepsilon)\delta u = f, \tag{1}$$

где δ есть δ-функция Дирака, возникают в разных приложениях [1] и интенсивно изучаются. Входящее в (1) произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций, поэтому одной из основных задач является придание смысла выражению в левой части (1), т. е. фактически построение оператора, соответствующего формальному выражению (1).

Один из основных подходов к определению понятия решения уравнения и построению таких решений основан на аппроксимации выражения в левой части (1) семейством корректно заданных операторов L_ε и затем нахождении предела резольвент

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mathrm{L}_\varepsilon-\lambda\right)^{-1}:=R(\lambda).$$

Если такой предел существует, то операторно-значная функция $R(\lambda)$ оказывается резольвентой некоторого оператора, который соответствует рассматриваемой аппроксимации формального выражения. В случае операторов в пространстве $L_2(R^3)$ скалярных функций было обнаружено, что в типичных случаях $R_0(\lambda)$ есть резольвента невозмущенного оператора $R_0(\lambda)=\left(-\Delta-\lambda I\right)^{-1}$, но возможны случаи *резонанса*, когда $R_0(\lambda)$ есть резольвента некоторого оператора, отличного от $-\Delta$. Резольвента $R_0(\lambda)$ действует по формуле

$$R_0(\lambda)f=E_\lambda * f,$$

где * – свертка функций, а $E_\lambda(x)$ – фундаментальное решение для оператора $-\Delta u-\lambda u,$ заданное формулой

$$E_\lambda(x)=\frac{1}{4\pi\|x\|}e^{-\mu\|x\|},$$

где $\mu^2=-\lambda,$ $\operatorname{Re}\mu>0$. Отметим, что $E_\lambda\in L_2(R^3)$.

Спектр оператора $-\Delta$ есть положительная полупрямая, причем спектр не содержит собственных значений. А у предельных операторов, отличных от $-\Delta$, имеется одно собственное значение. У аппроксимирующего оператора L_ε спектр может содержать (в зависимости от выбранного способа аппроксимации) конечный или даже бесконечный набор собственных значений. Поэтому общая задача заключается в описании поведения собственных значений аппроксимирующих операторов и выяснении того, как в пределе из них получается одно собственное значение.

Анализ систем уравнений обычно оказывается более сложным по сравнению с анализом одного уравнения и содержит большее число возможных вариантов.

Целью работы является исследование в пространстве вектор-функций $L_2(R^3)^2$ системы уравнений (1), где $u=\left(u_1,u_2\right)$, а коэффициент является матрицей вида

$$a(\varepsilon)=\begin{pmatrix}0 & a_1(\varepsilon)\\ a_2(\varepsilon) & 0\end{pmatrix}.$$

Специальный вид матрицы коэффициентов соответствует тому, что в рассматриваемой системе вторая компонента воздействует на первую, а первая воздействует на вторую. Заметим, что системы с такими матрицами коэффициентов возникают в квантовой механике.

Основная часть

Наиболее простыми являются аппроксимации с помощью операторов конечного ранга. Мы применяем подход, развитый в [2; 3] для исследования уравнений с δ-образными коэффициентами. Основные этапы этого подхода: построение аппроксимаций рассматриваемого выражения операторами конечного ранга; нахождение явного вида резольвенты аппроксимирующего семейства; нахождение предела резольвенты и выделение случаев резонанса; описание спектра построенных предельных операторов; исследование поведения собственных значений аппроксимирующих операторов. В данной работе рассматриваются первые три этапа вышеизложенного подхода.

1. Построение аппроксимации

Мы рассматриваем формальную систему

$$-\Delta u_1 + a_1(\varepsilon)\delta u_2 = f_1,$$
$$-\Delta u_2 + a_2(\varepsilon)\delta u_1 = f_2.$$

Пусть φ – финитная функция из пространства Шварца $D(R^3)$ [4], такая что $\int \varphi(x)dx = 1$. Тогда семейство гладких функций $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ задает аппроксимацию δ-функции как элемента пространства обобщенных функций, а семейство функционалов $\Phi_\varepsilon(u) = \int u(x)\varphi_\varepsilon(x)dx$ – аппроксимацию δ-функции как функционала. Поэтому для гладких функций u имеем $\Phi_\varepsilon(u)\varphi_\varepsilon \to u(0)\delta = \delta u$ [3], т. е. на гладких функциях семейство операторов $\Phi_\varepsilon(u)\varphi_\varepsilon$ сходится к произведению δu.

Таким образом, оператор

$$\mathrm{L}_\varepsilon u = -\Delta u + a(\varepsilon)\int u(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x) \tag{2}$$

задает аппроксимацию формального выражения $-\Delta u + a(\varepsilon)\delta u$ в покоординатной записи это семейство имеет вид

$$\mathrm{L}_\varepsilon(u)_1 = -\Delta u_1 + a_1(\varepsilon)\int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x), \tag{3}$$

$$\mathrm{L}_\varepsilon(u)_2 = -\Delta u_2 + a_2(\varepsilon)\int u_1(y)\phi_\varepsilon(y)dy\phi_\varepsilon(x). \tag{4}$$

Задача заключается в исследовании поведения решений уравнения $(\mathrm{L}_\varepsilon - \lambda)u = f$ при $\varepsilon \to 0$.

2. Резольвента аппроксимирующих операторов

При фиксированном $\varepsilon > 0$ найдем для данных аппроксимаций такие решения непосредственно, т. е. построим резольвенту $(\mathrm{L}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f = u$ и найдем, для каких λ она определена.

Лемма. *Резольвента* $(\mathrm{L}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ *аппроксимирующего семейства* $\mathrm{L}_\varepsilon(u)$ *записывается в виде*

$$(\mathrm{L}_\varepsilon - \lambda)^{-1} = R_0(\lambda)f - S(\varepsilon,\lambda)\cdot \tilde{f}\cdot(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x), \tag{5}$$

где

$$R_0(\lambda)f = \begin{bmatrix} R_0(\lambda)f_1 \\ R_0(\lambda)f_2 \end{bmatrix},\ \tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix},\ \tilde{f}_1 = \int (R_0(\lambda)f_2)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,\ \tilde{f}_2 = \int (R_0(\lambda)f_1)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$

и $S(\varepsilon,\lambda)$ *есть матрица вида*

$$S(\varepsilon,\lambda) = \frac{1}{1 - a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b^2(\varepsilon,\lambda)}\begin{bmatrix} a_1(\varepsilon) & -a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda) \\ -a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda) & a_2(\varepsilon) \end{bmatrix},$$

$$b(\varepsilon,\lambda) = \int (R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy. \tag{6}$$

Резольвента определена, если: $\lambda \notin R^+$ *и* $1 - a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)b^2(\varepsilon,\lambda) \neq 0$.

Доказательство.

Построение резольвенты эквивалентно нахождению решения системы

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 - \lambda u_1 + a_1(\varepsilon)\int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x) = f_1. \\ -\Delta u_2 - \lambda u_2 + a_2(\varepsilon)\int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy\varphi_\varepsilon(x) = f_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Из системы (7) получаем, если решение существует, то оно имеет вид

$$\begin{aligned} u_1(x) = R_\lambda f_1 - C_1(\varepsilon)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x), \\ u_2(x) = R_\lambda f_2 - C_2(\varepsilon)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x); \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} C_1(\varepsilon) = a_1(\varepsilon)\int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy, \\ C_2(\varepsilon) = a_2(\varepsilon)\int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy. \end{aligned} \tag{9}$$

Преобразовав выражения, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1(\varepsilon) + a_1(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_2(\varepsilon) = a_1(\varepsilon)\tilde{f}_1, \\ a_2(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_1(\varepsilon) + C_2(\varepsilon) = a_2(\varepsilon)\tilde{f}_2, \end{cases}$$

где

$$\tilde{f}_1 = \int (R_0(\lambda)f_2)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy, \quad \tilde{f}_2 = \int (R_0(\lambda)f_1)(y)\phi_\varepsilon(y)dy$$

и $b(\varepsilon,\lambda)$ задается формулой (6).

Система имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_1(\varepsilon)} & b(\varepsilon,\lambda) \\ b(\varepsilon,\lambda) & \dfrac{1}{a_2(\varepsilon)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(\varepsilon) \\ C_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix}.$$

Поэтому если $\det\begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_1(\varepsilon)} & b(\varepsilon,\lambda) \\ b(\varepsilon,\lambda) & \dfrac{1}{a_2(\varepsilon)} \end{bmatrix} \neq 0$, то $\begin{bmatrix} C_1(\varepsilon) \\ C_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_1(\varepsilon)} & b(\varepsilon,\lambda) \\ b(\varepsilon,\lambda) & \dfrac{1}{a_2(\varepsilon)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix}$.

Выполнив все необходимые вычисления, получаем

$$\begin{bmatrix} C_1(\varepsilon) \\ C_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon,\lambda) \right) \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_2(\varepsilon)} & -b(\varepsilon,\lambda) \\ -b(\varepsilon,\lambda) & \dfrac{1}{a_1(\varepsilon)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, решение (8) представляется в виде

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0(\lambda)f_1 \\ R_0(\lambda)f_2 \end{bmatrix} - S(\varepsilon,\lambda) \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix} (R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x),$$

что эквивалентно (5). Лемма доказана.

3. Предел резольвент

Основной задачей является исследование поведения построенных резольвент (8) при $\varepsilon \to 0$. В полученное выражение входят величины, имеющие вид и поведение, аналогичные скалярному случаю. Пусть

$$\left(u_0^1, u_0^2\right) = \left(E_\lambda * f_1, E_\lambda * f_2\right).$$

Тогда

$$\tilde{f}_1(\varepsilon) \to u_0^2(0), \quad \tilde{f}_2(\varepsilon) \to u_0^1(0).$$

Кроме того, известно, что $E_\lambda(\varepsilon) = E_\lambda * \varphi_\varepsilon \to E_\lambda$, причем сходимость имеет место не только в смысле обобщенных функций, но и в $L_2(R^3)$.

Из существования указанных пределов получаем, что нахождение предела резольвент сводится к нахождению предела

$$\lim_{\varepsilon \to 0} S(\varepsilon, \lambda) := D(\lambda) \tag{10}$$

и предел резольвент имеет вид

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) f - D(\lambda) \begin{bmatrix} u_0^2(0) \\ u_0^1(0) \end{bmatrix} \cdot E(\lambda).$$

В трехмерном случае для величины (6) имеет место разложение [3]

$$b(\varepsilon, \lambda) = M \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\mu}{4\pi} + o(\varepsilon),$$

где

$$M(\varepsilon, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \int \left(\int \varphi(y) \overline{\varphi}(x - y) dy \right) \frac{1}{\|x\|} dx.$$

Задача заключается в том, чтобы выяснить, для каких коэффициентов $a(\varepsilon)$ существует ненулевой предел (10), и найти это предел.

Рассмотрим коэффициенты $a_1(\varepsilon)$ и $a_2(\varepsilon)$, для которых обратные величины имеют вид

$$\frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-2}^1 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + o(\varepsilon), \quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + o(\varepsilon). \tag{11}$$

В скалярном случае наиболее содержательные результаты имеют место именно для коэффициентов такого вида.

Теорема. *Для коэффициентов $a_1(\varepsilon)$ и $a_2(\varepsilon)$ вида (11) предел $D(\lambda)$ может быть ненулевым только в трех случаях:*

1) $$\frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_0^1 + k_1^1 \varepsilon + k_2^1 \varepsilon^2 + o(\varepsilon), \quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + o(\varepsilon),$$

т. е. $k_{-2}^1 = 0, k_{-1}^1 = 0.$

Тогда

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{k_{-2}^2}{k_0^1 k_{-2}^2 - M^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

если $k_0^1 k_{-2}^2 - M^2 \neq 0$.

В случае, когда $k_0^1 k_{-2}^2 = M^2$, *предел (10) равен бесконечности.*

$$2)\ \frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + k_1^1\varepsilon + o(\varepsilon),\ \ \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + k_1^2\varepsilon + o(\varepsilon),$$

т. е. $k_{-2}^1 = 0, k_{-2}^2 = 0$ *и при этом выполнено условие резонанса* $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M^2$.
Тогда

$$D(\lambda) = \frac{1}{k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + \dfrac{M\mu}{2\pi}} \begin{bmatrix} k_{-1}^2 & -M \\ -M & k_{-1}^1 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

$$3)\ \frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-2}^1 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + o(\varepsilon),\ \ \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_0^2 + k_1^2\varepsilon + k_2^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon),$$

т. е. $k_{-2}^2 = 0, k_{-1}^2 = 0.$
Тогда

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{k_{-2}^1}{k_0^2 k_{-2}^1 - M^2} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

если $k_0^2 k_{-2}^1 - M^2 \neq 0.$

В случае, когда $k_0^2 k_{-2}^1 = M^2$, *предел (10) равен бесконечности. Для всех остальных коэффициентов вида (11) предел (10) нулевой.*

Доказательство.

Запишем $S(\varepsilon, \lambda)$ в виде

$$S(\varepsilon,\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{\dfrac{1}{a_2(\varepsilon)}}{\dfrac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon,\lambda)} & \dfrac{-b(\varepsilon,\lambda)}{\dfrac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon,\lambda)} \\ \dfrac{-b(\varepsilon,\lambda)}{\dfrac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon,\lambda)} & \dfrac{\dfrac{1}{a_1(\varepsilon)}}{\dfrac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon,\lambda)} \end{bmatrix}.$$

Согласно (11)

$$\frac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} = k_{-2}^1 k_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^4} + \left(k_{-2}^1 k_{-1}^2 + k_{-1}^1 k_{-2}^2\right)\frac{1}{\varepsilon^3} + \left(k_{-2}^1 k_0^2 + k_{-1}^1 k_{-1}^2 + k_0^1 k_{-2}^2\right)\frac{1}{\varepsilon^2} +$$

$$+ \left(k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2\right)\frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 k_0^2 + o(\varepsilon).$$

$$b^2(\varepsilon,\lambda) = M^2 \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{M\mu}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\mu^2}{16\pi^2}.$$

Знаменатель запишется в виде

$$\frac{1}{a_1(\varepsilon)a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon,\lambda) = k_{-2}^1 k_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^4} + \left(k_{-2}^1 k_{-1}^2 + k_{-1}^1 k_{-2}^2\right)\frac{1}{\varepsilon^3} + \left(k_{-2}^1 k_0^2 + k_{-1}^1 k_{-1}^2 + k_0^1 k_{-2}^2 - M^2\right)\frac{1}{\varepsilon^2} +$$

$$+\left(k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + \frac{M\mu}{2\pi}\right)\frac{1}{\varepsilon} + (k_0^1 k_0^2 - \frac{\mu^2}{16\pi}) + o(\varepsilon).$$

Получаем, что для существования ненулевого предела (10) необходимо, чтобы хотя бы один из элементов матрицы при разложении по степеням ε в числителе и знаменателе имел одинаковую степень.

В общем случае разложение числителя имеет степень $\frac{1}{\varepsilon^2}$, а знаменателя – $\frac{1}{\varepsilon^4}$. Предел (10) в этом случае равен нулю. Для того, чтобы существовал ненулевой предел, необходимо, чтобы коэффициенты при $\frac{1}{\varepsilon^4}$ и $\frac{1}{\varepsilon^3}$ были равны нулю.

$$\begin{cases} k_{-2}^1 k_{-2}^2 = 0, \\ k_{-2}^1 k_{-1}^2 + k_{-1}^1 k_{-2}^2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим три случая.

1) $\begin{cases} k_{-2}^1 = 0, \\ k_{-1}^1 = 0. \end{cases}$

Степени числителя и знаменателя равны, тогда существует конечный ненулевой предел (12) если $k_0^1 k_{-2}^2 - M^2 \neq 0$.

2) $\begin{cases} k_{-2}^1 = 0, \\ k_{-2}^2 = 0. \end{cases}$

Степень числителя меньше степени знаменателя, таким образом, необходимо, чтобы коэффициент при $\frac{1}{\varepsilon^2}$ был равен нулю. Следовательно, для того, чтобы существовал ненулевой предел необходимо выполнение условия резонанса $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M^2$, и тогда справедливо (13).

Таким образом, при данном виде величин $a_1(\varepsilon)$ и $a_2(\varepsilon)$, получили условия резонанса, аналогичные условиям в скалярном случае.

3) $\begin{cases} k_{-2}^2 = 0, \\ k_{-1}^2 = 0. \end{cases}$

Аналогично случаю 1) получаем, что если $k_0^2 k_{-2}^1 - M^2 \neq 0$, то имеет место (14).

Теорема доказана.

Из пунктов 1) и 3) вышеизложенного доказательства видно, что при анализе системы возникают случаи, когда предел *D(λ)* равен бесконечности, т. е. предел резольвент не существует. Таким образом, в векторном случае появляются ситуации, которые не встречались в скалярном случае.

В терминах исходных коэффициентов случай 1) соответствует коэффициентам вида

$$a_1(\varepsilon) = a_0^1 + a_1^1\varepsilon + a_2^1\varepsilon^2 + o(\varepsilon),\ a_2(\varepsilon) = a_2^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon),$$

случай 2) –

$$a_1(\varepsilon) = a_1^1\varepsilon + a_2^1\varepsilon^2 + o(\varepsilon),\ \ a_2(\varepsilon) = a_1^2\varepsilon + a_2^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon),$$

а случай 3) – коэффициентам вида

$$a_1(\varepsilon) = a_2^1\varepsilon^2 + o(\varepsilon),\ \ a_2(\varepsilon) = a_0^2 + a_1^2\varepsilon + a_2^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon).$$

Заключение

Таким образом, построена резольвента, аппроксимирующая выражение вида (1), рассмотрены всевозможные случаи резонанса и в каждом из них найден предел резольвенты в явном виде.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио [и др.] ; пер. с англ. В. А. Гейлера [и др.]. – М. : Мир, 1991. – 566 с.
2. Антоневич, А. Б. Аппроксимации операторов с дельта-образными коэффициентами / А. Б. Антоневич, Т. А. Романчук // Актуальные проблемы математики : сб. науч. тр. ГрГУ им. Я. Купалы / редкол.: Е. А. Ровба [и др.]. – Гродно, 2008. – С. 11–28.
3. Антоневич, А. Б. Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций / А. Б. Антоневич, Т. А. Романчук // LAPLAMBERT. – Саарбрюккен, 2012. – 137 с.
4. Березин, Ф. А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 137, № 5. – С. 1011–1014.
5. Кот, М. Г. О резольвентной сходимости операторов, аппроксимирующих систему уравнений с δ-образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вестн. БГУ. Физика. Математика. Информатика. – 2015. – № 1. – С. 111–117.
6. Кот, М. Г. Асимптотика собственных вектор-функций операторов, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с δ-образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 3. – С. 15–26.
7. Романчук, Т. А. Явление резонанса для матрично-значных функций // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 8–16.
8. Кащенко, И. С. Асимптотическое разложение решений уравнений : метод. указания / И. С. Кащенко. – Ярославль : ЯрГУ, 2011. – 44 с.

REFERENCES

1. Rieshajemyje modeli v kvantovoj miekhanike / S. Al’beverio [i dr.] ; pier. s angl. V. A. Giejliera [i dr.]. – M. : Mir, 1991. – 556 s.
2. Antonievich, A. B. Approksimacii opieratorov s del’ta-obraznymi koefficientami / A. B. Antonievich, T. A. Romanchuk // Aktual’nyje probliemy matiematiki : sb. nauch. tr. GrGU im. Ya. Kupaly / riedkol.: Ye. A. Rovba [i dr.]. – Grodno, 2008. – S. 11–28.
3. Antonievich, A. B. Uravnienija s del’ta-obraznymi koefficientami: mietod koniechnomiernykh approksimacij / A. B. Antonievich, T. A. Romanchuk // LAPLAMBERT. – Saarbrjukken, 2012. – 137 s.

4. Bieriezin, F. A. Zamiechanije ob uravnienii Shredingiera s singuliarnym potencialom / F. A. Bieriezin, L. D. Faddiejev // Dokl. AN SSSR. – 1961. – T. 137, № 5. – S. 1011–1014.

5. Kot, M. G. O riezol'vientnoj skhodimosti opieratorov, approksimirujushchikh sistiem uravnienij s δ-obraznymi koefficientami / M. G. Kot // Viestn. BGU. Fizika. Matiematika. Informatika. – 2015. – № 1. – S. 111–117.

6. Kot, M. G. Asimptotika sobstviennykh viector-funkcij opieratorov, approksimirujushchikh diffieriencial'nyje uravnienija s δ-obraznymi koefficientami / M. G. Kot // Vies. Nac. acad. navuk Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2017. – № 3. – S. 15–26.

7. Romanchuk, T. A. Javlienije riezonansa dlia matrichno-znachnykh funkcij / T. A. Romanchuk // Vies. NAN Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2008. – № 2. – S. 8–16.

8. Kashchienko, I. S. Asimptotichieskoje razlozhenije rieshenij uravnienij : mietod ukazanija / I. S. Kashchienko. – Jaroslavl' : YArGU, 2011. – 44 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 24.01.2024