УДК 539.12...17; 539.128.2

Алиса Евгеньевна Дроздова[1], Роман Георгиевич Шуляковский[2]
[1]студент 5 курса физического факультета Белорусского государственного университета
[2]канд. физ.-мат. наук, доц., ведущий науч. сотрудник Института прикладной физики Национальной академии наук Беларуси,
ведущий науч. сотрудник Института ядерных проблем Белорусского государственного университета
Alisa Drazdova[1], Roman Shulyakovsky[2]
[1]5th Year Student of the Faculty of Physics of of Belarusian State University
[2]Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Lead Researcher of Institute of Applied Physics of of National Academy of Sciences of Belarus,
Lead Researcher of Institute for Nuclear Problems of Belarusian State University
e-mail: [1]alisadrozdova1706@gmail.com; [2]shulyakovsky@iaph.bas-net.by

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИНСТАНТОННЫЕ РЕШЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ O(3) МОДЕЛИ И В АБЕЛЕВОЙ МОДЕЛИ ХИГГСА*

Приведены точные аналитические инстантонные решения для нелинейной O(3) модели в двумерном евклидовом пространстве, которые описывают в пространстве Минковского (1+1) туннельные переходы между классически вырожденными вакуумами. Вычислена вероятность с экспоненциальной точностью. Получены приближенные инстантонные решения для абелевой модели Хиггса в двух измерениях.

Ключевые слова: *инстантон, нелинейная O(3) модель, абелева модель Хиггса.*

Analytical Instanton Solutions in the Nonlinear O(3) Model and in the Abelian Higgs Model

Exact analytical instanton solutions for the nonlinear O(3) model in 2-dimensional Euclidean space are presented. They describe tunnel transitions between classically degenerate vacua in Minkowski space (1+1). The probability is calculated with exponential accuracy. Approximate instanton solutions for the Abelian Higgs model in two dimensions are obtained.

Key words: *instanton, nonlinear O(3) model, Abelian Higgs model.*

Введение

Нелинейная O(3) модель в двумерном и трехмерном пространстве детально изучалась из-за присутствия в ней важных эффектов, свойственных намного более сложным неабелевым калибровочным теориям в четырехмерном пространстве. Также такая модель описывает ряд нетривиальных эффектов в ферромагнетаках. Статические солитонные решения нелинейной O(3) модели были найдены и изучены А. А. Белавиным и А. М. Поляковым в 1975 г. [1] в контексте исследования спиновых корреляций и возможности фазовых переходов в плоских ферромагнетиках в (1 + 2) измерениях. В обзоре [2] детально рассмотрены различные представления нелинейной O(3) модели (матричные, спинорные, а также подходы, связанные с введением аналога векторного калибровочного поля). Модифицированная нелинейная O(3) теория в (1 + 1) измерениях рассматривалась при ненулевых температурах как модель электрослабого сектора Стандартной Модели для изучения возможности инстантон-индуцированного нарушения барионного и лептонного чисел [3]. Рассматривались и другие двумерные скалярные теории для моделирования магнитных явлений. Так, инстантонные решения в скалярной модели синус-Гордона на пространственной окружности [4] рассматривались

**Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ Ф22МЦ-003 «Поиск процессов, индуцированных КХД-инстантонами, на Большом адронном коллайдере» (руководитель – Р. Г. Шуляковский).*

для иллюстрации когерентного туннелирования доменных стенок в ферромагнитной двухосно-анизотропно-спиновой цепочке [5]. В недавней работе [6] топологические решения нелинейной O(3) модели детально изучались с использованием методов Монте-Карло на решетках взаимодействующих спинов.

Неабелева SU(2) модель Хиггса в пространстве-времени (3 + 1) на классическом уровне находит применение для описания нитей Абрикосова в сверхпроводниках 2-го рода. Абелев U(1) аналог модели в пространстве-времени (2 + 1) содержит вихревые решения с конечной энергией – вортексы Нильсена – Олесена [7]. Это решение обладает конечной энергией, локализовано в пространстве, т. е. это солитон. Любое статическое солитонное решение в (D + 1) пространстве-времени автоматически является инстантоном в D-мерном евклидовом пространстве. Квантовое рассмотрение модели открывает не существующие в классическом варианте туннельные переходы, которые удобно описывать методом фейнмановских функциональных интегралов во мнимом времени с использованием инстантонных решений. Известно, что такие решения существуют, но аналитический вид не известен. В данной работе решения найдены приближенно. Подробно о нелинейных теоретико-полевых моделях изложено в монографиях [8; 9].

Инстантонные решения в нелинейной O(3) модели

Рассмотрим теорию вещественного свободного скалярного поля в пространстве-времени (D + 1):

$$L=\frac{1}{2}\partial_\mu \varphi^a(t,x)\partial^\mu \varphi^a(t,x). \tag{1}$$

Рассматривается трехкомпонентное поле: a = 1, 2, 3 – групповой индекс, по которому предполагается суммирование; μ = 0,1 – лоренцев индекс, по которому идет суммирование с метрикой $g_{\mu\nu}$ = diag(1, –1,...). Будем считать постоянную Планка и скорость света равными единице, как общепринято в теории поля. Модель (1) релятивистски инвариантна и инвариантна относительно преобразований группы вращений O(3) в трехмерном внутреннем пространстве.

Уравнения поля (Лагранжа – Эйлера), соответствующие лагранжиану (1), есть безмассовые уравнения Клейна – Фока – Гордона для каждого *a*:

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi^a = 0. \tag{2}$$

Энергия поля, соответствующая лагранжиану (1) (точнее, лагранжевой плотности), получаемая согласно теореме Нётер,

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty} dx \sum_{a=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi^a}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi^a}{\partial x}\right)^2\right). \tag{3}$$

Заметим, что скалярная полевая теория (1) может, в принципе, рассматриваться как экстраполяция ***одномерной классической модели Гейзенберга*** на несчетное число степеней свободы (значения «спинов», роль которых играют векторы $\vec{\varphi}_i = (\varphi_i^a)$, произвольны). Для нормировки таких векторов в теорию можно ввести ограничение (условие связи):

$$\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi} = \varphi^a\varphi^a = 1_3. \tag{4}$$

В этом случае теория носит название ***нелинейной O(3) – модели***. Учет условия (4) осуществляется, как и в теоретической механике, введением в теорию множителя Лагранжа $\lambda(t,x)$:

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi^a \partial^\mu \varphi^a + \frac{1}{2}\lambda \cdot (\varphi^a \varphi^a - 1). \quad (5)$$

Уравнения поля с учетом множителя Лагранжа примут вид:

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi^a + \lambda \varphi^a = 0. \quad (6)$$

Отсюда

$$\lambda = -\varphi^a \partial_\nu \partial^\nu \varphi^a. \quad (7)$$

Таким образом, уравнения поля для системы (6) станут нелинейными в отличие от уравнений (2):

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi^a - \varphi^b (\partial_\nu \partial^\nu \varphi^b) \varphi^a = 0. \quad (8)$$

Уравнения допускают точные аналитические солитонные решения в (2 + 1) пространстве-времени:

$$\varphi^a_{sol} = 2\frac{x^a r_0}{r^2 + r_0^2}, \quad a = 1,2; \qquad \varphi^3_{sol} = \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2}. \quad (9)$$

Это решение с единичным топологическим зарядом. Решения с произвольным топологическим зарядом впервые найдены в работе [1] и детально многократно обсуждались в дальнейшем [2]. Здесь r_0 – произвольный положительный параметр, $r^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Решение обладает симметрией окружности на плоскости (x, y). Энергия для статических решений

$$E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dxdy \sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{a=1}^{3} \partial_\sigma \varphi^a \partial_\sigma \varphi^a \quad (10)$$

имеет бесконечный непрерывный набор вакуумов (решений, минимизирующих функционал энергии (10). Это все не зависящие от координат (и, разумеется, статические) поля.

Решения (11) переводят вакуумное состояние системы $\varphi^a = -\delta^{a3}$ на пространственной бесконечности в вакуумное состояние $\varphi^a = +\delta^{a3}$ в начале координат. Вакуумы выбраны произвольно из соображений удобства, что не ограничивает общность рассмотрения задачи. Энергия для решения (9) называется массой солитона:

$$M_{sol} = E[\varphi^a_{sol}(r)] = 4\pi. \quad (11)$$

Плотность энергии максимальна в окрестности окружности радиуса r_0. Таким образом, система является моделью плоского ферромагнетика. Трехмерные векторы $\vec{\varphi}(x, y)$ соответствуют классическим спинам, равным единице по модулю (нормировка может быть любой). Решение (11) можно интерпретировать как домен, слой в окрестности окружности радиуса r_0 имеет смысл ***доменной стенки***. Кроме этого, благодаря спонтанному нарушению симметрии O(3), в вакууме системы могут появляться голдстоуновские моды – бесщелевые флуктуации, соответствующие одновременному повороту всех спинов, не меняющие энергию системы. Это модель спиновых волн в ферромагнетиках. В ***квантовом*** варианте теории поля такие флуктуации соответствуют появлению частицеподобных состояний (голдстоуновских бозонов) – магнонов.

Изучим нелинейную O(3) модель в пространстве времени (1 + 1), соответствующую одномерной скалярной теории Гейзенберга. Для нахождения инстантонных решений нужно перейти от пространства Минковского к пространству Евклида (или от действительного времени t к мнимому τ):

$$t = i\tau\,. \tag{12}$$

Действие исходной задачи после замены (12) примет вид:

$$S = \int dtdxL = iS_E = \int d\tau dxL_E. \tag{13}$$

Евклидово действие:

$$S = iS_E;\, S_E \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dxd\tau\partial_\mu\varphi^a\partial_\mu\varphi^a\,. \tag{14}$$

Евклидово действие формально совпадает со статической энергией (10). Суммирование по μ в (14) проводится в евклидовом пространстве с метрикой $\eta_{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\nu}$, верхние и нижние индексы неразличимы, группа Лоренца в двумерном пространстве – времени преобразуется в группу вращений $SO(2)$.

Инстантоном данной задачи является:

$$\varphi^1_{inst}(\tau,x) = \frac{2\tau\, r_0}{r^2+r_0^2},\ \varphi^2_{inst}(\tau,x) = \frac{2x\, r_0}{r^2+r_0^2},\ \varphi^3_{inst}(\tau,x) = \frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2}\,. \tag{15}$$

Здесь $r^2 = \sqrt{\tau^2+x^2}$. Евклидово действие на инстантоне совпадает с массой солитона:

$$S_E[\varphi^a_{inst}(r)] = 4\pi. \tag{16}$$

В полярных координатах решения могут быть представлены в виде:

$$\Phi_{inst}(r,\theta) = \frac{2\exp(i\theta)\, r_0}{r^2+r_0^2},\, \Phi^3_{inst}(r,\theta) = \frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2}, \tag{17}$$

При обратном переходе от двумерного пространства Евклида к пространству–времени Минковского размерности (1 + 1) можно считать, что радиальная координата соответствует действительному времени, а полярная – пространственной координате:

$$\begin{array}{ll} r \to t, & 0 \le r < \infty \to -\infty \le t < \infty, \\ \theta \to l, & 0 \le \theta < 2\pi \to 0 \le l < 2\pi. \end{array} \tag{18}$$

Одноинстантонный переход переводит замкнутую ферромагнитную цепочку из состояния «спин вниз» в состояние «спин вверх». Переход можно считать пространственно–однородным. Размер инстантона r_0 соответствует характерному времени туннелирования (одна из коллективных координат). Центр инстантона может быть любым (еще одна коллективная координата). Решение (17) соответствует центру в нуле на временной оси.

Лагранжиан (1) и действие (13) можно модифицировать, добавив в знаменатель «константу связи» g^2. Выражения формально станут похожими на соответствующие выражения в теории Янга – Миллса. При рассмотрении теории при конечных температурах g^2 будет иметь смысл температуры (постоянная Больцмана считается единичной и безразмерной).

Вероятность туннелирования с экспоненциальной точностью:

$$<\uparrow|\exp(-\hat{H}T)|\downarrow> \propto \exp(-S_E[\Phi_{inst}(r,\theta)]) = \exp(-8\pi/g^2). \tag{19}$$

Для вычисления предэкспоненциального множителя необходимо вычислить вторую вариацию действия, что приводит к корню из детерминанта в знаменателе:

$$<\uparrow|\exp(-\hat{H}T)|\downarrow>\approx\left[\det(6\varphi^a_{inst}\Delta\varphi^a_{inst}+\Delta)\right]^{-1/2}\exp(-4\pi/g^2). \tag{20}$$

Вычисление предэкспоненциального фактора сводится к произведению собственных значений соответствующего оператора. В реалистичных физических теориях это величина, близкая к единице.

Приближенные инстантонные решения в двумерной абелевой модели Хиггса

Рассмотрим лагранжиан абелевой модели Хиггса:

$$L=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+(D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi)-V(\varphi); \tag{21}$$

где $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ – тензор электромагнитного поля, φ – комплексное скалярное поле, A_μ – векторный потенциал, $D_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu$ – ковариантная производная, $V(\varphi)$ – потенциал Хиггса:

$$V(\varphi)=\lambda(|\varphi|^2-\rho^2)^2, \tag{22}$$

где λ и ρ – константы, определяющие форму потенциала.

Как хорошо известно, лагранжиан (21) в пространстве Минковского (3 + 1) имеет нетривиальное решение – струну Абрикосова. Решение от координаты z не зависит, локализовано, имеет бесконечную энергию, солитоном не является. Соответствующая задача в пространстве (2 + 1) имеет решение: статический солитон – вихрь Нильсена – Олесена [7]. Формально оно совпадает с инстантоном в пространстве Евклида (2 + 0), так, что любое приближенное аналитическое решение для вихря есть приближенное аналитическое решение для инстантона. Это инстантонное решение соответствует туннелированию в пространстве Минковского (1 + 1), то есть в рассматриваемой двумерной абелевой модели Хиггса.

Решение для статического солитона имеется решение в виде:

$$\varphi(r,\alpha)=\rho e^{i\alpha}F(r), \qquad A_i(r,\alpha)=-\frac{1}{er}\varepsilon_{ij}\frac{x_i}{r}A(r), \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &F(r)\to 1, \quad A(r)\to 1, \quad r\to\infty,\\ &F(r)\to 0, \quad A(r)\to 0, \quad r\to 0. \end{aligned} \tag{24}$$

То есть решение не известно аналитически, но хорошо известно численно. Известны также асимптотики.

Будем искать решение для инстантона $\varphi(\vec{r})$ в виде

$$\varphi(\vec{r})\approx\rho e^{i\theta(\vec{r})}, \qquad A_i(\vec{r})\to 0 \tag{25}$$

для немалых $\boldsymbol{r}$ (т. е. больших, чем характерный обратный масштаб массы хиггсовского поля $m_H\sim\sqrt{\lambda}\rho$). Векторный потенциал A_μ равен нулю с точностью до калибровочных преобразований. При подстановке анзатца (25) в уравнения движения получим уравнения и приближенные решения:

$$\partial_z\partial_{\bar{z}}e^{i\theta}-2\lambda\rho^2e^{-i\theta}=0, \qquad e^{i\theta}=a\,\mathrm{sech}(m_H|z|); \tag{26}$$

$$\varphi(\vec{r}) \approx \rho\,\mathrm{sech}(m_H\,|z|), \quad A_i(\vec{r}) \approx 0, \tag{27}$$

где введена комплексная координата $z = x^1 + ix^2$.

Действие на инстантоне есть формально масса солитона (энергия его основного состояния):

$$S_E = \int d^2x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \varphi)^* (D^\mu \varphi) + V(\varphi) \right) \sim \lambda. \tag{28}$$

Как и в предыдущем разделе, действие определит показатель подавляющей туннелирование экспоненты.

Заключение

В работе детально рассмотрена нелинейная O(3) модель в пространстве Минковского и в евклидовом пространстве. Рассмотрены солитонные решения в трехмерном варианте теории и приведены аналитические инстантонные решения в двумерном варианте модели. Дана оригинальная интерпретация инстантонных решений как решений, отвечающих за поворот спинов в одномерной замкнутой ферромагнитной цепочке. Для абелевой модели Хиггса получено приближенное аналитическое инстантонное решение, что актуально с точки зрения понимания и моделирования эффектов в теории электрослабых взаимодействий, отвечающих за нарушение барионной симметрии в видимой части Вселенной, а также для понимания явления спонтанного нарушения киральной инвариантности в сильных взаимодействиях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белавин, А. А. Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика / А. А. Белавин, А. М. Поляков // Письма в ЖЭТФ. –1975. – Т. 22, № 10. – С. 503–506.

2. Переломов, А. М. Решения типа инстантонов в киральных моделях / А. М. Переломов // УФН. – 1981. – Т. 134. – С. 577–609.

3. Mottola, E. Unsuppressed fermion-number violation at high temperature: An O(3) model / E. Mottola, A. Wipf // Phys. Rev. D. – 1989. – Vol. 39. – P. 588–602.

4. Шуляковский, Р. Г. Аналитические инстантонные решения в 2-мерных полевых моделях / Р. Г. Шуляковский // Письма в ЭЧАЯ. – 2008. – № 5. – С. 704–708.

5. Zheng, G.-P. Instantons in a ferromagnetic spin chain with biaxial anisotropy / G.-P. Zheng, J.-Q. Liang, W. M. Liu // Phys. Rev. B. – 2009. – Vol. 79. – P. 014415-1–014415-6.

6. Schenk, S. Exploring instantons in nonlinear sigma models with spin-lattice systems / S. Schenk, M. Spannowsky // Phys. Rev. B. – 2021. – Vol. 103. – P. 144436-1–014415-10.

7. Nielsen, H. Vortex-line models for dual strings / B. Nielsen, P. Olesen // Nucl. Phys. B. – 1973. – Vol. 61. – P. 45–61.

8. Раджараман, Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Р. Раджараман. – М. : Мир, 1985. – 416 с.

9. Рубаков, В. А. Классические калибровочные поля / В. А. Рубаков. – М. : Эдиториал УРСС, 1999. – 336 с.

REFERENCES

1. Bielavin, A. A. Mietastabl’nyje sostojanija dvukhmiernogo izotropnogo fierromagnietika / A. A. Bielavin, A. M. Poliakov // Pis’ma v ZhETF. – 1975. – T. 22, № 10. – P. 503–506.

2. Pierielomov, A. M. Riesheninja tipa instagonov v kiral’nykh modeliakh / A. M. Perelomov // UFN. – 1981. – T. 134. – S. 577–609.

3. Mottola, E. Unsuppressed fermion-number violation at high temperature: An O(3) model / E. Mottola, A. Wipf // Phys. Rev. D. – 1989. – Vol. 39. – P. 588–602.

4. Shuliakovskij, R. G. Analitichieskije instantonnyje rieshenija v 2-miernykh polievykh modeliakh / R. G. Shuliakovskij // Pis’ma v EChAJa. – 2008. – № 5. – S. 704–708.

5. Zheng, G.-P. Instantons in a ferromagnetic spin chain with biaxial anisotropy / G.-P. Zheng, J.-Q. Liang, W. M. Liu // Phys. Rev. B. – 2009. – Vol. 79. – P. 014415-1–014415-6.

6. Schenk, S. Exploring instantons in nonlinear sigma models with spin-lattice systems / S. Schenk, M. Spannowsky // Phys. Rev. B. – 2021. – Vol. 103. – P. 144436-1–014415-10.

7. Nielsen, H. Vortex-line models for dual strings / B. Nielsen, P. Olesen // Nucl. Phys. B. – 1973. – Vol. 61. – P. 45–61.

8. Radzharaman, R. Solitony i instantony v kvantovoj tieorii polia / R. Radzharaman. – M. : Mir, 1985. – 416 s.

9. Rubakov, V. A. Klassichieskije kalibrovochnyje polia / V. A. Rubakov. – M. : Editorial URSS, 1999. – 336 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.09.2023