УДК 513.82

***Александр Андреевич Юдов*[1], *Елена Вячеславовна Кисилюк*[2]**
[1]*канд. физ.-мат. наук,*
доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]*преподаватель каф. прикладной математики и информатики*
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
***Alexander Yudov*[1], *Elena Kisilyuk*[2]**
[1]*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,*
Associate Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling
of Brest State A. S. Pushkin University
[2]*Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Informatics*
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: modelmath@brsu.brest.by

КЛАССИФИКАЦИЯ И ИССЛЕДВАНИЕ РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ, ПОРОЖДЕННЫХ ГРУППОЙ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

В работе изучаются однородные пространства, порожденные группой Ли движений постранства Минковского. Среди таких пространств выделяются редуктивные однородные пространства.

Ключевые слова: *группа, подгруппа, однородное пространство, группа Ли, алгебра Ли, коммутатор, редуктивное однородное пространство, редуктивное дополнение.*

Classification and Investigation of Reductive Homogeneous Spaces Generated by the Lie Group of Motions of the Minkowski Space

We study homogeneous spaces generated by the Lie group of motions of the Minkowski space. Among such spaces, reductive homogeneous spaces are singled out.

Key words: *group, subgroup, homogeneous space, Lie group, Lie algebra, commutator, reductive homogeneous space, reductive complement.*

Введение

Однородные пространства являются предметом исследования математиков на протяжении более ста лет. Актуальность исследования таких пространств объясняется тем, что они находят применение и служат аппаратом при исследовании геометрии, алгебры, теоретической физики. Особую важность представляют однородные пространства, порожденные группой Ли движений различных (псевдоевклидовых пространств). В этой области работали Э. Картан, Г. Вейль, П. К. Рашевский, К. Номидзу, Ш. Кобаяси, В. И. Ведерников, А. С. Феденко, И. В. Белько, В. Балащенко, С. Г. Кононов, А. А. Юдов и др.

В работе исследуются однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений пространства Минковского.

Нахождение редуктивных однородных пространств, порожденных группой Ли движений пространства Минковского

Определение 1. Однородное пространство H/G_i называется редуктивным, если алгебра Ли $\overline{H}$ группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G_i}, \tag{1}$$

причем подпространство m инвариантно относительно $ad\overline{G_i}$, где $ad\overline{G_i}$ – присоединенное представление алгебры Ли $\overline{G_i}$.

Рассмотрим однородное пространство H/G_{12}, где G_{12} – подгруппа Ли группы Ли *H* вращений шестимерного Лоренцового пространства, имеющая алгебру Ли $\overline{G_{12}} = \{i_5, i_6, i_9\}$, где:

$$i_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения системы инвариантности по способу, описанному выше, будем сводить задачу к рассмотрению двадцати случаев:

$$1^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda & \mu & \upsilon \\ 0 & 1 & 0 & \sigma & s & t \\ 0 & 0 & 1 & p & q & r \end{pmatrix}.$$

По строчкам в этой матрице записаны координаты базисных векторов X_1, X_2, X_3, определяющих инвариантные подпространства m, причем базис в алгебре $\overline{H}$ выберем следующим образом: $i_6, i_7, i_8, i_9, i_5, i_{10}$.

Таким образом, инвариантные подпространства $m = \{X_1, X_2, X_3\}$ задаются векторами:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_9 + \mu i_5 + \nu i_{10}, X_2 = i_7 + \sigma i_9 + s i_5 + t i_{10}, X_3 = i_8 + p i_9 + q i_5 + r i_{10}. \tag{2}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_8 + \lambda i_7, \\ [a, X_2] &= i_9 + \sigma i_7, \\ [a, X_3] &= i_6 + p i_7. \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{gathered} \alpha_1(i_6 + \lambda i_9 + \mu i_5 + \nu i_{10}) + \beta_1(i_7 + \sigma i_9 + s i_5 + t i_{10}) + \gamma_1(i_8 + p i_9 + q i_5 + r i_{10}) = i_5(\mu\alpha_1 + \\ + s\beta_1 + q\gamma_1) + i_6\alpha_1 + i_7\beta_1 + i_8\gamma_1 + i_9(\lambda\alpha_1 + \sigma\beta_1 + p\gamma_1) + i_{10}(\nu\alpha_1 + t\beta_1 + r\gamma_1). \end{gathered} \tag{4}$$

Сравнивая формулу (4) с первой формулой (3), получим:

$$\mu\alpha_1 + s\beta_1 + q\gamma_1 = 0, \gamma_1 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = \lambda, \delta_1 = 0, \lambda\alpha_1 + \sigma\beta_1 + p\gamma_1 = 0, \nu\alpha_1 + t\beta_1 + r\gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\lambda s + q = 0, \lambda\sigma + p = 0, \lambda t + r = 0.$

Сравнивая формулу (4) со второй формулой (3), получим:

$$\mu\alpha_2 + s\beta_2 + q\gamma_2 = 0, \alpha_2 = 0, \beta_2 = \sigma, \gamma_2 = 0, \lambda\alpha_2 + \sigma\beta_2 + p\gamma_2 = 1, \nu\alpha_2 + t\beta_2 + r\gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma s = 0, \sigma^2 = 1, \sigma t = 0.$

Аналогично, сравнивая формулу (4) с третьей формулой (3), получим:

$$\mu + ps = 0, \lambda + p\sigma = 0, \nu + tp = 0.$$

Таким образом, в случае 1^0 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda s + q = 0, \\ \lambda\sigma + p = 0, \\ \lambda t + r = 0, \\ \sigma s = 0, \\ \sigma^2 = 1, \\ \sigma t = 0, \\ \mu + ps = 0, \\ \lambda + p\sigma = 0, \\ \nu + tp = 0. \end{cases}$$

Из системы получаем следующее:

$$t = 0, s = 0, \mu = 0, q = 0, \nu = 0, r = 0, \sigma = \pm 1, p = \mp\lambda.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6 + \lambda i_9, i_7 \pm i_9, i_8 \mp \lambda i_9\}.$$

Аналогично рассматриваются случаи 2^0–20^0.

$$2^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & \mu & \upsilon \\ 0 & 1 & \sigma & 0 & s & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q & r \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 2^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_8 + \mu i_5 + \nu i_{10}, X_2 = i_7 + \sigma i_8 + s i_5 + t i_{10}, X_3 = i_9 + q i_5 + r i_{10}. \quad (5)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_8 + \lambda i_6, \\ [a, X_2] &= i_9 + \sigma i_6, \\ [a, X_3] &= i_7. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{aligned} &\alpha_1(i_6 + \lambda i_8 + \mu i_5 + \nu i_{10}) + \beta_1(i_7 + \sigma i_8 + s i_5 + t i_{10}) + \gamma_1(i_9 + q i_5 + r i_{10}) = i_5(\mu\alpha_1 + \\ &+ s\beta_1 + q\gamma_1) + i_6\alpha_1 + i_7\beta_1 + i_8(\lambda\alpha_1 + \sigma\beta_1) + i_9\gamma_1 + i_{10}(\nu\alpha_1 + t\beta_1 + r\gamma_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Сравнивая формулу (7) с первой формулой (6), получим:

$$\mu\alpha_1 + s\beta_1 + q\gamma_1 = 0, \alpha_1 = \lambda, \beta_1 = 0, \lambda\alpha_1 + \sigma\beta_1 = 1, \gamma_1 = 0, \nu\alpha_1 + t\beta_1 + r\gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\mu\lambda = 0, \lambda^2 = 1, \nu\lambda = 0.$

Сравнивая формулу (7) со второй формулой (6), получим:

$$\mu\alpha_2 + s\beta_2 + q\gamma_2 = 0, \alpha_2 = \sigma, \beta_2 = 0, \lambda\alpha_2 + \sigma\beta_2 = 0, \gamma_2 = 1, \nu\alpha_2 + t\beta_2 + r\gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует:

$$\mu\sigma + q = 0, \lambda\sigma = 0, \nu\sigma + r = 0.$$

Аналогично, сравнивая формулу (7) с третьей формулой (6), получим:

$$s = 0, \sigma = 0, t = 0.$$

Таким образом, в случае 2^0 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \mu\lambda = 0, \\ \lambda^2 = 1, \\ \nu\lambda = 0, \\ \mu\sigma + q = 0, \\ \lambda\sigma = 0, \\ \nu\sigma + r = 0, \\ s = 0, \\ \sigma = 0, \\ t = 0. \end{cases}$$

Из системы получаем следующее: $\lambda = \pm 1, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0, s = 0, t = 0, q = 0, r = 0.$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6 \pm i_8, i_7, i_9\}.$$

$$3^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & \mu & 0 & \nu \\ 0 & 1 & \sigma & s & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 3^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_8 + \mu i_9 + \nu i_{10}, X_2 = i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_{10}, X_3 = i_5 + p i_{10}. \quad (8)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_8 + \lambda i_6 + \mu i_7, \\ [a, X_2] &= i_9 + \sigma i_6 + s i_7, \\ [a, X_3] &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{gathered} \alpha_1(i_6 + \lambda i_8 + \mu i_9 + \nu i_{10}) + \beta_1(i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_{10}) + \gamma_1(i_5 + p i_{10}) = i_5\gamma_1 + i_6\alpha_1 + i_7\beta_1 + \\ i_8(\lambda\alpha_1 + \sigma\beta_1) + i_9(\mu\alpha_1 + s\beta_1) + i_{10}(\nu\alpha_1 + t\beta_1 + p\gamma_1). \end{gathered} \quad (10)$$

Сравнивая формулу (10) с первой формулой (9) и формулу (10) со второй формулой (9), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda^2 + \sigma\mu = 1, \\ \mu(\lambda + s) = 0, \\ \nu\lambda + t\mu = 0, \\ \sigma(\lambda + s) = 0, \\ s^2 = 1 - \mu\sigma, \\ \nu\sigma + ts = 0. \end{cases}$$

Из этой системы вытекает следующая система:

$$\begin{cases} \mu(\lambda + s) = 0, \\ \sigma(\lambda + s) = 0. \end{cases}$$

Данная система приводит к рассмотрению следующих двух случаев: $a)\lambda = -s; b)\mu = 0, \ \ \sigma = 0.$ Рассматривая исходную систему в случае $a)$, мы получаем следующее:

$$\lambda = \pm\sqrt{1-\sigma\mu}, \text{ где } 1-\sigma\mu \geq 0;$$

$$\begin{cases} \nu\lambda + t\mu = 0, \\ \nu\sigma - t\lambda = 0. \end{cases}$$

Определитель полученной системы отличен от нуля, следовательно, система имеет единственное решение.

Таким образом, $\nu = 0, t = 0.$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6 \pm \sqrt{1-\sigma\mu}\, i_8 + \mu i_9, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1-\sigma\mu}\, i_9, i_5 + p i_{10}\}.$$

Рассматривая исходную систему в случае $b)$, мы получаем следующее:

$$\begin{cases} \lambda^2 = 1, \\ \nu\lambda = 0, \\ s^2 = 1, \\ ts = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\lambda = \pm 1, \nu = 0, s = \pm 1, t = 0.$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6 + i_8, i_7 + i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 + i_8, i_7 - i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 - i_8, i_7 + i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 - i_8, i_7 - i_9, i_5 + p i_{10}\}.$$

$$4^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & \mu & \nu & 0 \\ 0 & 1 & \sigma & s & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 4^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_8 + \mu i_9 + \nu i_5, X_2 = i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_5, X_3 = i_{10}. \quad (11)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{gathered}[a, X_1] = i_8 + \lambda i_6 + \mu i_7, \\ [a, X_2] = i_9 + \sigma i_6 + s i_7, \\ [a, X_3] = 0.\end{gathered} \quad (12)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{gathered}\alpha_1(i_6 + \lambda i_8 + \mu i_9 + \nu i_5) + \beta_1(i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_5) + \gamma_1 i_{10} = i_5(\nu\alpha_1 + t\beta_1) + i_6\alpha_1 + i_7\beta_1 + \\ + i_8(\lambda\alpha_1 + \sigma\beta_1) + i_9(\mu\alpha_1 + s\beta_1) + i_{10}\gamma_1.\end{gathered} \quad (13)$$

Сравнивая формулу (13) с первой формулой (12) и формулу (13) со второй формулой (12), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda^2 + \sigma\mu = 1, \\ \mu(\lambda + s) = 0, \\ \nu\lambda + t\mu = 0, \\ \sigma(\lambda + s) = 0, \\ s^2 = 1 - \mu\sigma, \\ \nu\sigma + ts = 0. \end{cases}$$

Из этой системы вытекает следующая система:

$$\begin{cases} \mu(\lambda + s) = 0, \\ \sigma(\lambda + s) = 0. \end{cases}$$

Данная система приводит к рассмотрению следующих двух случаев: $a)\lambda = -s; b)\mu = 0,\ \sigma = 0.$ Рассматривая исходную систему в случае $a,$ мы получаем следующее:

$$\lambda = \pm\sqrt{1 - \sigma\mu}, \text{ где } 1 - \sigma\mu \geq 0;$$

$$\begin{cases} \nu\lambda + t\mu = 0, \\ \nu\sigma - t\lambda = 0. \end{cases}$$

Определитель полученной системы отличен от нуля, следовательно, система имеет единственное решение. Таким образом, $\nu = 0, t = 0.$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6 \pm \sqrt{1 - \sigma\mu}\, i_8 + \mu i_9, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1 - \sigma\mu}\, i_9, i_{10}\}.$$

Рассматривая исходную систему в случае $b,$ мы получаем следующее:

$$\begin{cases} \lambda^2 = 1, \\ \nu\lambda = 0, \\ s^2 = 1, \\ ts = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\lambda = \pm 1, \nu = 0, s = \pm 1, t = 0.$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6 + i_8, i_7 + i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6 + i_8, i_7 - i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6 - i_8, i_7 + i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6 - i_8, i_7 - i_9, i_{10}\}.$$

В случае 5^0 система инвариантности противоречива.

$$6^0 \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \mu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & 1 & \sigma & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 6^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_7 + \mu i_9 + \nu i_{10}, X_2 = i_8 + \sigma i_9 + s i_{10}, X_3 = i_5 + p i_{10}. \tag{14}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{gathered} [a, X_1] = i_8 + \lambda i_9 + \mu i_7, \\ [a, X_2] = i_6 + \sigma i_7, \\ [a, X_3] = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{gathered} \alpha_1(i_6 + \lambda i_7 + \mu i_9 + \nu i_{10}) + \beta_1(i_8 + \sigma i_9 + s i_{10}) + \gamma_1(i_5 + p i_{10}) = i_5\gamma_1 + i_6\alpha_1 + \\ + i_7\alpha_1\lambda + i_8\beta_1 + i_9(\alpha_1\mu + \beta_1\sigma) + i_{10}(\alpha_1\nu + \beta_1 s). \end{gathered} \tag{16}$$

Сравнивая формулу (16) с первой формулой (15), получим:

$$\gamma_1 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_1\lambda = \mu, \beta_1 = 1, \alpha_1\mu + \beta_1\sigma = \lambda, \alpha_1\nu + \beta_1 s = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma = \lambda, s = 0, \mu = 0.$

Сравнивая формулу (16) со второй формулой (15), получим:

$$\gamma_2 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_2\lambda = \sigma, \beta_2 = 0, \alpha_2\mu + \beta_2\sigma = 0, \alpha_2\nu + \beta_2 s = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma = \lambda, s = 0, \mu = 0.$

Отметим, что оставшаяся формула не приводит к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_9, i_5 + p i_{10}\}.$$

$$7^0 \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \mu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sigma & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 7^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_7 + \mu i_9 + \nu i_5, X_2 = i_8 + \sigma i_9 + s i_5, X_3 = i_{10}. \tag{17}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{gathered} [a, X_1] = i_8 + \lambda i_9 + \mu i_7, \\ [a, X_2] = i_6 + \sigma i_7, \\ [a, X_3] = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{gathered} \alpha_1(i_6 + \lambda i_7 + \mu i_9 + \nu i_5) + \beta_1(i_8 + \sigma i_9 + s i_5) + \gamma_1 i_{10} = i_5(\nu\alpha_1 + s\beta_1) + i_6\alpha_1 + \\ + i_7\lambda\alpha_1 + i_8\beta_1 + i_9(\mu\alpha_1 + \sigma\beta_1) + i_{10}\gamma_1. \end{gathered} \tag{19}$$

Сравнивая формулу (19) с первой формулой (18), получим:

$$\nu\alpha_1 + s\beta_1 = 0, \alpha_1 = 0, \lambda\alpha_1 = \mu, \beta_1 = 1, \mu\alpha_1 + \sigma\beta_1 = \lambda, \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $s = 0, \mu = 0, \sigma = \lambda.$

Сравнивая формулу (19) со второй формулой (18), получим:

$$\nu\alpha_2 + s\beta_2 = 0, \alpha_2 = 1, \lambda\alpha_2 = \sigma, \beta_2 = 0, \mu\alpha_2 + \sigma\beta_2 = 0, \gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует: $\nu = 0, \lambda = \sigma, \mu = 0.$

Отметим, что оставшаяся формула не приводит к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_9, i_{10}\}.$$

В случаях 8^0, 9^0 системы инвариантности противоречивы.

$$10^0 \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 10^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_7 + \mu i_8 + \nu i_9, X_2 = i_5, X_3 = i_{10}. \tag{23}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{gathered} [a, X_1] = i_8 + \lambda i_9 + \mu i_6 + \nu i_7, \\ [a, X_2] = 0, \\ [a, X_3] = 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\alpha_1(i_6 + \lambda i_7 + \mu i_8 + \nu i_9) + \beta_1 i_5 + \gamma_1 i_{10} = i_5\beta_1 + i_6\alpha_1 + i_7\alpha_1\lambda + i_8\alpha_1\mu + i_9\alpha_1\nu + i_{10}\gamma_1. \tag{25}$$

Сравнивая формулу (25) с первой формулой (24), получим:

$$\beta_1 = 0, \alpha_1 = \mu, \alpha_1\lambda = \nu, \mu\alpha_1 = 1, \nu\alpha_1 = \lambda, \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\mu = \pm 1, \nu = \pm\lambda.$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_6 + \lambda i_7 + i_8 + \lambda i_9, i_5, i_{10}\},$$
$$\{i_6 + \lambda i_7 - i_8 - \lambda i_9, i_5, i_{10}\}.$$

В случаях 11^0–13^0 системы инвариантности противоречивы.

$$14^0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 14^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_7 + \lambda i_8 + \mu i_{10}, X_2 = i_9 + \sigma i_{10}, X_3 = i_5 + t i_{10}. \tag{26}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_9 + \lambda i_6, \\ [a, X_2] &= i_7, \\ [a, X_3] &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_7 + \lambda i_8 + \mu i_{10}) + \beta_1(i_9 + \sigma i_{10}) + \gamma_1(i_5 + t i_{10}) = i_5\gamma_1 + i_7\alpha_1 + i_8\alpha_1\lambda + i_9\beta_1 + \\ + i_{10}(\mu\alpha_1 + \sigma\beta_1 + t\gamma_1). \end{aligned} \tag{28}$$

Сравнивая формулу (28) с первой формулой (27), получим:

$$\gamma_1 = 0, \lambda = 0, \alpha_1 = 0, \lambda\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1, \mu\alpha_1 + \sigma\beta_1 + t\gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma = 0.$

Сравнивая формулу (28) со второй формулой (27), получим:

$$\gamma_2 = 0, \alpha_2 = 1, \lambda\alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \mu\alpha_2 + \sigma\beta_2 + t\gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует: $\mu = 0.$

Отметим, что оставшаяся формула не приводит к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$имеют вид (базисы)

$$\{i_7, i_9, i_5 + i_{10}\}.$$

$$15^0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 15^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_7 + \lambda i_8 + \mu i_5, X_2 = i_9 + \sigma i_5, X_3 = i_{10}. \quad (29)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{gathered}[a, X_1] = i_9 + \lambda i_6,\\ [a, X_2] = i_7,\\ [a, X_3] = 0.\end{gathered} \quad (30)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\alpha_1(i_7 + \lambda i_8 + \mu i_5) + \beta_1(i_9 + \sigma i_5) + \gamma_1 i_{10} = i_5(\mu\alpha_1 + \sigma\beta_1) + i_7\alpha_1 + i_8\lambda\alpha_1 + i_9\beta_1 + i_{10}\gamma_1. \quad (31)$$

Сравнивая формулу (31) с первой формулой (30), получим:

$$\mu\alpha_1 + \sigma\beta_1 = 0, \lambda = 0, \alpha_1 = 0, \lambda\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1, \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma = 0$.

Сравнивая формулу (31) со второй формулой (30), получим:

$$\mu\alpha_2 + \sigma\beta_2 = 0, \alpha_2 = 1, \lambda\alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует: $\mu = 0, \lambda = 0$.

Отметим, что оставшаяся формула не приводит к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_7, i_9, i_{10}\}.$$

$$16^0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 16^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_7 + \lambda i_8 + \mu i_9, X_2 = i_5, X_3 = i_{10}. \quad (32)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{gathered}[a, X_1] = i_9 + \lambda i_6 + \mu i_7,\\ [a, X_2] = 0,\\ [a, X_3] = 0.\end{gathered} \quad (33)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\alpha_1(i_7 + \lambda i_8 + \mu i_9) + \beta_1 i_5 + \gamma_1 i_{10} = i_5\beta_1 + i_7\alpha_1 + i_8\lambda\alpha_1 + i_9\mu\alpha_1 + i_{10}\gamma_1. \quad (34)$$

Сравнивая формулу (34) с первой формулой (33), получим:

$$\beta_1 = 0, \lambda = 0, \alpha_1 = \mu, \lambda\alpha_1 = 0, \mu\alpha_1 = 1, \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\mu = \pm 1$.

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_7 + i_9, i_5, i_{10}\},$$
$$\{i_7 - i_9, i_5, i_{10}\}.$$

В случаях 17^0–20^0 системы инвариантности противоречивы.

Теорема 1. Относительно оператора i_5 инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

$$\{i_6 + \lambda i_9, i_7 \pm i_9, i_8 \mp \lambda i_9\},$$
$$\{i_6 \pm i_8, i_7, i_9\},$$
$$\{i_6 \pm \sqrt{1-\sigma\mu}\, i_8 + \mu i_9, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1-\sigma\mu}\, i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 + i_8, i_7 + i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 + i_8, i_7 - i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 - i_8, i_7 + i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 - i_8, i_7 - i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 \pm \sqrt{1-\sigma\mu}\, i_8 + \mu i_9, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1-\sigma\mu}\, i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6 + i_8, i_7 + i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6 + i_8, i_7 - i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6 - i_8, i_7 + i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6 - i_8, i_7 - i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_9, i_5 + p i_{10}\},$$
$$\{i_6 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_6 + \lambda i_7 + i_8 + \lambda i_9, i_5, i_{10}\},$$
$$\{i_6 + \lambda i_7 - i_8 - \lambda i_9, i_5, i_{10}\},$$
$$\{i_7, i_9, i_5 + i_{10}\},$$
$$\{i_7, i_9, i_{10}\},$$
$$\{i_7 + i_9, i_5, i_{10}\},$$
$$\{i_7 - i_9, i_5, i_{10}\}.$$

Теорема 2. Относительно операторов i_5, i_6, i_8 инвариантно только следующее четырехмерное подпространство алгебры Ли $\overline{H} : \{i_7, i_9, i_{10}\}$.

Условие прямой суммы для подпространства $m_1 = \{i_7, i_9, i_{10}\}$ выполняются, т. е.

$$\overline{H} = \overline{G_{12}} + m_1.$$

Таким образом, получена следующая теорема:

Теорема 3. Однородное пространство H / G_{12} редуктивно. Редуктивным дополнением является только следующее подпространство: i_7, i_9, i_{10}.

Заключение

В работе получено редуктивное однородное пространство.

Результаты работы могут быть применены для решения аналогичных задач в других евклидовых пространствах, а также в научно-исследовательской работе по дифференциальной геометрии и в теоретической физике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 413 с.
2. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцевых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1 (126). – С. 13–22.
3. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М. : Наука, 1967. – 664 с.
4. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.
5. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

REFERENCES

1. Kobajasi, Sh. Osnovy diffieriencial’noj gieomietrii : v 2 t. / Sh. Kobajasi, K. Nomidzu. – M. : Nauka, 1981. – T. 2. – 413 s.
2. Kopp, V. G. O podgruppakh vrashchienij piatimiernykh i shestimiernykh jevklidovykh i lorencevykh prostranstv / V. G. Kopp // Uchion. zap. Kazan. un-ta. – 1966. – № 1 (126). – S. 13–22.
3. Rashevskij, P. K. Rimanova gieomietrija i tenzornyj analiz / P. K. Rashevskij. – M. : Nauka, 1967. – 664 s.
4. Khelgason, S. Diffieriencial’naja gieomietrija i simmietrichieskije prostranstva / S. Khelgason. – M. : Mir, 1964. – 538 s.
5. Yudov, A. A. Klassifikacija odnomiernykh podmnogoobrazij prostranstva Minkovskogo, imiejushchikh kasatiel’nuju mnimojevklidovd i jevklidova tipa / A. A. Yudov, N. S. Kovalik // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2013. – № 1. – S. 106–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.10.2023