УДК 519.6 + 517.983.54

Олег Викторович Матысик
канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Oleg Matysik
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: matysikoleg@mail.ru

АПРИОРНЫЙ ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ЯВНОЙ СХЕМЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ЛИНЕЙНЫМ НЕПРЕРЫВНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Для решения операторных уравнений первого рода с линейным непрерывным оператором в банаховом пространстве предлагается явная итерационная схема. Исследована сходимость итерационного метода в случае априорного выбора числа итераций при точной и приближенной правых частях уравнения, получены оценка погрешности и априорный момент останова. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении линейных операторных уравнений, а также при решении прикладных некорректных задач.

Ключевые слова: *некорректное уравнение первого рода, явная итерационная схема, банахово пространство, линейный непрерывный оператор, априорный момент останова.*

A priori Choice of the Regularization Parameter in the Explicit Iteration Scheme for Solving Ill-Posed Problems with a Linear Continuous Operator

An explicit iterative scheme is proposed to solve operator equations of the first kind with a linear continuous operator in a Banach space. The convergence of the iterative method is investigated in the case of a priori choice of the number of iterations with the exact and approximate right sides of the equation, an error estimate and an a priori stopping moment are obtained. The results obtained can be used in theoretical studies of the solution of linear operator equations, and solving ill-posed problems applied.

Key words: *ill-posed equation of the first kind, explicit iteration scheme, Banach space, linear continuous operator, a priori stopping moment.*

Введение

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач.

Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике и управлении, может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \tag{1}$$

с заданным оператором $A: X \to Y$ и элементом y, X и Y – метрические пространства, а в особо оговариваемых случаях – банаховы или даже гильбертовы. Ж. Адамаром (J. Hadamard) [1] было введено следующее понятие корректности:

Определение. *Задачу отыскания решения $x \in X$ уравнения* (1) *называют корректной (или корректно поставленной, или корректной по Адамару), если при любой фиксированной правой части $y = y_0 \in Y$ уравнения* (1) *его решение*:

а) существует в пространстве X ;

б) определено в пространстве X однозначно;

в) устойчиво в пространстве X, *т. е. непрерывно зависит от правой части* $y \in Y$. *В случае нарушения любого из этих условий задачу называют некорректной (некорректно поставленной); более конкретно при нарушении условия в) ее принято называть неустойчивой.*

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора A^{-1} на всем пространстве Y.

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир.

О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались.

Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи.

К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения первого рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2, обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии и т. д.

Рассмотрим хорошо известные примеры некорректно поставленных задач.

Пример 1. *Задача дифференцирования функции* $u(t)$, *известной приближенно.*

Пусть $z_1(t)$ есть производная функции $u_1(t)$. Функция $u_2(t) = u_1(t) + N \sin \omega t$. В метрике C отличается от $u_1(t)$ на величину $\rho_c(u_1, u_2) = |N|$ при любых значениях ω. Однако производная $z_2(t) = u_2'(t)$ отличается от $z_1(t)$ в метрике C на величину $|N\omega|$, которая может быть произвольно большой при достаточно больших значениях $|\omega|$.

Заметим, что задача нахождения производной n-го порядка от функции $u(t)$ сводится к решению интегрального уравнения первого рода: $\int\limits_0^1 \frac{1}{(n-1)!}(t-\tau)^{n-1} z(\tau) d\tau = u(t)$. Таким образом, эта задача не обладает свойством устойчивости, что приводит к большим затруднениям при приближенном вычислении производных.

Пример 2. *Численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике* l_2.

Пусть $f_1(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cos t$. Если вместо a_n брать коэффициенты $c_n = a_n + \varepsilon / n$ для $n \geq 1$ и $c_0 = a_0$, получим ряд $f_2(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cos nt$.

Коэффициенты этих рядов отличаются (в метрике l_2) на величину $\varepsilon_1 = \left\{ \sum\limits_{n=0}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \right\}^{1/2} = \varepsilon \left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{1/2} = \varepsilon \sqrt{\frac{\pi^2}{6}}$, которую выбором числа ε можно сделать сколь угодно малой. Вместе с этим разность $f_2(t) - f_1(t) = \varepsilon \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nt$ может быть сколь угодно большой (при $t = 0$ последний ряд расходится).

Таким образом, если уклонение суммы ряда брать в метрике C, суммирование ряда Фурье не является устойчивым.

Пример 3. *Задача Коши для уравнения Лапласа в двумерном случае.*

Она состоит в нахождении решения уравнения $\Delta u(x,y)=0$ по начальным данным, т. е. в нахождении решения, удовлетворяющего условиям

$$u(x,0)=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0}=\varphi(x),\quad -\infty<x<\infty,$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – заданные функции.

Если взять $f_1(x)\equiv 0,\quad \varphi_1(x)=\frac{1}{a}\sin ax,$ то решением задачи Коши будет функция $u_1(x,y)=\frac{1}{a^2}\sin ax\times \operatorname{sh} ay,\ a>0.$ (Здесь $\operatorname{sh} ay=\frac{(ay)^z-(ay)^{-z}}{2}$ – гиперболический синус). Если же взять $f_2(x)=\varphi_2(x)\equiv 0,$ то решением такой задачи Коши будет функция $u_2(x,y)\equiv 0.$ Если уклонения начальных данных и решений оценивать в метрике *C*, то имеем $\rho_C(f_1,f_2)=\sup_x|f_1(x)-f_2(x)|=0,\quad \rho_C(\varphi_1,\varphi_2)=\sup_x|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|=\frac{1}{a}.$ Последняя величина при достаточно больших значениях *a* может быть сделана сколь угодно малой. Однако уклонения решений

$$\rho_C(u_1,u_2)=\sup_x|u_1(x,y)-u_2(x,y)|=\sup_x\left|\frac{1}{a^2}\sin ax\times \operatorname{sh} ay\right|=\frac{1}{a^2}\operatorname{sh} ay$$

при любом фиксированном $y>0$ может быть произвольно большим при достаточно больших значениях a (т. к. при $a\to\infty$ $\operatorname{sh} ay\to\infty$ быстрее, чем $\frac{1}{a^2}\to 0$). Таким образом, задача неустойчива и, следовательно, некорректна.

Пример 4. *Задача аналитического продолжения функции, известной на части области, на всю область.*

Пусть *D* – конечная область, *E* – дуга кривой, принадлежащая области *D*. Тогда задача аналитического продолжения функции, заданной на дуге кривой *E*, на всю область *D* является неустойчивой.

В самом деле, пусть z_0 – точка на границе области *D*, расстояние которой до *E* равно $d>0$ и $f_1(z)$ – аналитическая в *D* функция. Функция $f_2(z)=f_1(z)+\frac{\varepsilon}{z-z_0}$, где ε – заданное положительное число, также аналитична в *D*. На множестве *E* эти функции отличаются одна от другой на величину $\varepsilon/(z-z_0)$, модуль которой не превосходит ε/d, т. е. $|f_2(z)-f_1(z)|\le\varepsilon/d$ на множестве *E*. Величина ε/d может быть сделана произвольно малой путем выбора соответствующего значения числа ε. Однако в области разность функций $f_2(z)-f_1(z)=\varepsilon/(z-z_0)$ не ограничена по модулю.

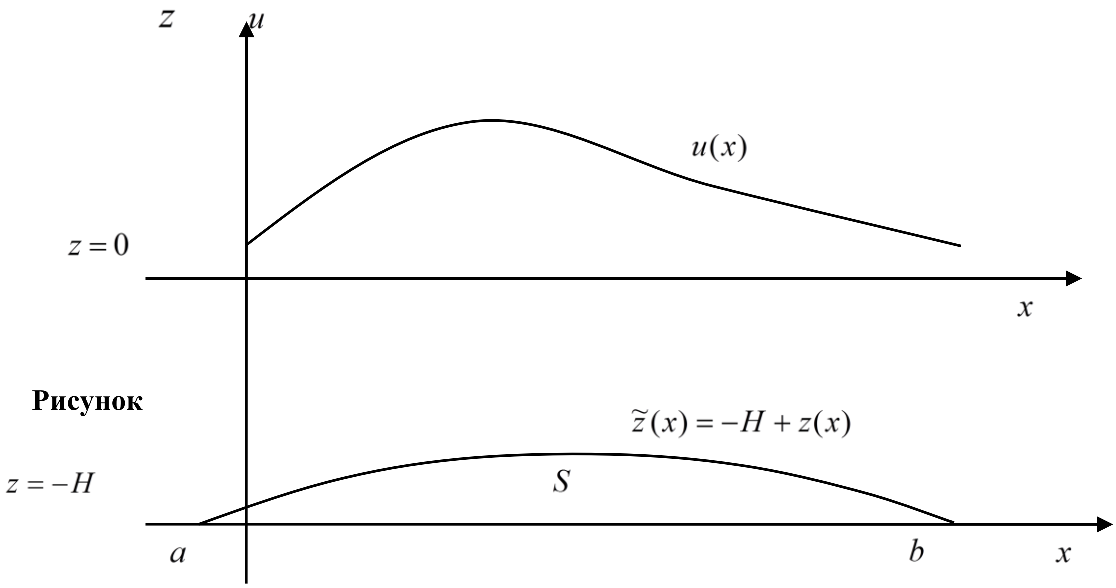
Пример 5. *Обратная задача гравиметрии.*

Пусть имеется тело, плотность которого отлична от плотности окружающей среды. Определить форму тела по аномалии напряжения силы тяжести, создаваемой им на поверхности земли.

Предложим, что среда, находящаяся под поверхностью земли ($z=0$), состоит из масс с известными плотностями ρ_1 и ρ_2, разделенных границей $z(x)$ (рисунок).

Пусть $\tilde{z}(x) = -H$ всюду, кроме отрезка $a \le x \le b,$ на котором $\tilde{z}(x) = -H + z(x).$

Такая конфигурация масс создает на поверхности земли аномалию напряжения силы тяжести



Рисунок

$\Delta g = -\left.\dfrac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0}$, где V – потенциал масс с плотностью $\rho = \rho_2 - \rho_1$, заполняющих область S (рисунок). Так как $V = \int\limits_S \dfrac{\rho}{2\pi} \ln\left(\dfrac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta,$ где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (z-\eta)^2}$, то

$$\Delta g = -\frac{\rho}{2\pi}\int\limits_a^b \int\limits_{-H}^{-H+z(\xi)} -\frac{\partial}{\partial \eta} \ln\frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta\Big|_{z=0} = \frac{\rho}{2\pi}\int\limits_a^b \ln\frac{(x-\xi)^2 + H^2}{(x-\xi)^2 + (H - z(\xi))^2}\, d\xi.$$

Аномалия напряжения силы тяжести на поверхности земли может быть измерена. Таким образом, задача определения функции $z(x)$ сводится к решению нелинейного интегрального уравнения первого рода $Az = \int\limits_a^b \ln\dfrac{(x-\xi)^2 + H^2}{(x-\xi)^2 + (H - z(\xi))^2}\, d\xi = u(x),$ где $u(x) = \dfrac{2\pi}{\rho}\Delta g.$

Здесь A – нелинейный интегральный оператор. Нетрудно показать неустойчивость решения этого уравнения к малым изменениям правой части $u(x)$.

Пример 6. *Рассмотрим задачу об изучении спектрального состава светового излучения (задача спектроскопии).*

Пусть наблюдаемое излучение неоднородно и распределение плотности энергии по спектру характеризуется функцией $z(s)$, где s – частота (или энергия).

Пропуская это излучение через измерительную аппаратуру, мы получаем экспериментальный спектр $u(x)$.

Здесь x может быть частотой, а может выражаться также в терминах напряжений и силы тока измерительной аппаратуры.

Если измерительная аппаратура линейна, то функциональная связь между $z(s)$ и $u(x)$ дается формулой

$$Az \equiv \int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds = u(x),$$

где $K(x,s)$ – аппаратная функция, предполагаемая известной. Она представляет экспериментальный спектр (как функция x), если на прибор падает монохроматическое излучение частоты единичной интенсивности (это и есть δ – функция $\delta(s-x)$). Здесь a и b – границы спектра.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы, поскольку они легко реализуются на ПЭВМ. Различные итерационные схемы решения некорректно поставленных задач были предложены в работах [2–13].

В настоящей статье в банаховом пространстве исследуется *явный метод итераций Ландвебера* [2] $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right)$, $x_{0,\delta} = 0$ решения операторных уравнений первого рода с линейным непрерывным оператором.

Метод итерации [2] для решения некорректных задач подробно изучен в гильбертовом пространстве. Этому методу посвящены работы А. С. Апарцина, В. К. Иванова, А. С. Крянева, М. М. Лаврентьева, В. А. Морозова, М. А. Красносельского и И. В. Емелина, А. Б. Бакушинского, В. Н. Страхова, О. А. Лисковца, С. М. Оганесяна, В. Ч. Старостенко, Г. В. Хромовой и др. Различные схемы итерационных методов решения некорректных задач в гильбертовых пространствах изучаются в монографиях М. М. Лаврентьева [3], Г. М. Вайникко и А. Ю. Веретенникова [4], А. А. Самарского и П. Н. Вабищевича [5], В. Ф. Савчука и О. В. Матысика [6–7; 9].

Однако практически отсутствуют работы, в которых исследуется сходимость метода итераций решения некорректных задач в банаховом пространстве. В настоящей статье изучен априорный выбор числа итераций для этого метода в банаховом пространстве: доказана сходимость метода, получены априорная оценка погрешности и априорный момент останова.

Рассмотренный в статье итерационный метод найдет практическое применение в прикладной математике: он может быть использован для решения задач, встречающихся в теории оптимального управления, математической экономике, геофизике, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, диагностике плазмы, в наземной или воздушной геологоразведке, при решении обратной кинематической задачи сейсмики, космических исследованиях (спектроскопии) и медицине (компьютерной томографии).

Основная часть

1. Постановка задачи.

В банаховом пространстве E исследуется операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – линейный непрерывный оператор, действующий в пространстве E. Нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением, следовательно, задача (1) некорректна и имеет единственное решение. Приведем уравнение (1) к виду, удобному для итераций. Для этого уравнение $Ax - y = 0$ умножим на параметр $(-\alpha)$ и к обеим частям уравнения добавим x, получим $x - \alpha(Ax - y) = x$; $x = (I - \alpha A)x + \alpha y$, где I – единичный оператор. Обозначим $B = I - \alpha A$, $f = \alpha y$. Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$x = Bx + f. \tag{2}$$

Для отыскания решения уравнения (1) используем итерационный процесс

$$x_{n+1} = Bx_n + f,\ (n = 0,1,2,\ldots). \tag{3}$$

Однако на практике часто точная правая часть уравнения (1) неизвестна, а вместо нее известно δ – приближение $f_\delta : \| f - f_\delta \| \le \delta$. Тогда метод (3) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + f_\delta,\ (n = 0,1,2,\ldots). \tag{4}$$

2. Сходимость метода при точной правой части уравнения.

Изложение материала раздела 2 аналогично [14; 15].

Изучим уравнение

$$x = Bx. \tag{5}$$

Рассмотрим последовательность

$$x_n = Bx_{n-1}. \tag{6}$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть оператор B преобразует в себя замкнутое множество* $M \subset E$ *и является оператором сжатия* $\| Bx - By \| \le q \| x - y \|,\ (x, y \in M,\ 0 < q < 1)$. *Тогда итерационный процесс* (6) *при любом начальном приближении* $x_0 \in M$ *сходится к единственному решению* x^* *уравнения* (5).

Верно неравенство

$$\| x_n - x^* \| \le \frac{q^n}{1-q} \| x_0 - Bx_0 \|,\ (n = 1,2,\ldots). \tag{7}$$

Теорема 1 и неравенство (7) вытекают из принципа сжимающих отображений [16, с. 75]. Уравнение (5) имеет, очевидно, решение $x^* = 0$.

Оценка (7) не может быть улучшена в общем случае, однако при дополнительных предположениях можно гарантировать более быструю сходимость.

Вернемся к уравнению (2). Если $\| B \| < 1$, то из теоремы 1 следует, что последовательные приближения (3) сходятся. Докажем более точное утверждение.

Теорема 2. *Пусть спектральный радиус* $\rho(B)$ *оператора B удовлетворяет неравенству* $\rho(B) < 1$. *Тогда последовательные приближения* (3) *сходятся к решению* x^* *уравнения* (2) *и для каждого* ε, $0 < \varepsilon < 1 - \rho(B)$, *справедлива оценка*

$$\| x_n - x^* \| \le c(\varepsilon) [\rho(B) + \varepsilon]^n \| x_0 - Bx_0 - f \|.$$

Доказательство. Введем в банаховом пространстве *E* такую эквивалентную норму $\| \cdot \|_*$, при которой норма линейного оператора *B* сколь угодно близка к его спектральному радиусу, т. е.

$$m(\varepsilon) \| x \| \le \| x \|_* \le M(\varepsilon) \| x \|,\ (x \in E), \tag{8}$$

$$\| Bx \|_* \le [\rho(B) + \varepsilon] \| x \|_*,\ (x \in E). \tag{9}$$

Покажем, как построить такую эквивалентную норму (8), (9).

Известно, что спектральный радиус $\rho(B) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| B^n \|}$ и $\rho(B) \le \| B \|$. Определим такое *n*, что $\sqrt[n]{\| B^n \|} \le \rho(B) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – заданное число.

Положим

$$\| x \|_* = [\rho(B)+\varepsilon]^{n-1} \| x \| + [\rho(B)+\varepsilon]^{n-2} \| Bx \| + \ldots + \| B^{n-1} x \| .$$

Очевидно,

$$[\rho(B)+\varepsilon]^{n-1} \| x \| \le \| x \|_* \le \left\{ [\rho(B)+\varepsilon]^{n-1} + [\rho(B)+\varepsilon]^{n-2} \| B \| + \ldots + \| B^{n-1} \| \right\} \| x \| ,$$

т. е. нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ эквивалентны. $\| B \|_* = \sup\limits_{\|x\|_* \le 1} \| Bx \|_* \le \rho(B)+\varepsilon$ [14, с. 16]. Так как в любой норме $\rho(B) \le \| B \|_*$, то $\rho(B) \le \| B \|_* \le \rho(B)+\varepsilon$. Таким образом, норму $\|\cdot\|_*$ из (8), (9) можно построить.

Из (9) вытекает, что уравнение (2) можно рассматривать как уравнение (5) со сжимающим оператором. Поэтому приближения (3) сходятся к x^*. Из (9) и (7) вытекает оценка $\left\| x_n - x^* \right\|_* \le \dfrac{[\rho(B)+\varepsilon]^n}{1-\rho(B)-\varepsilon} \| x_0 - Bx_0 - f \|_*$. Из этой оценки и из (8) следует

$$\left\| x_n - x^* \right\| \le c(\varepsilon) [\rho(B)+\varepsilon]^n \| x_0 - Bx_0 - f \| ,$$

где $c(\varepsilon) = \dfrac{1}{m(\varepsilon)[1-\rho(B)-\varepsilon]}$. Теорема 2 доказана.

3. Сходимость метода при приближенной правой части уравнения.

Покажем, что итерационный метод (4) можно сделать сходящимся, если разумным образом согласовывать число итераций n с уровнем погрешности δ.

Ниже, под сходимостью метода (4) понимается утверждение о том, что приближения (4) сколь угодно близко подходят к точному решению операторного уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод (4) сходится, если $\lim\limits_{\delta \to 0} \left(\inf\limits_n \left\| x^* - x_{n,\delta} \right\| \right) = 0$.

Рассмотрим $\left\| x^* - x_{n,\delta} \right\| \le \left\| x^* - x_n \right\| + \left\| x_n - x_{n,\delta} \right\|$.

В разделе 3 показано, что $\left\| x^* - x_n \right\| \to 0,\ n \to \infty$. Докажем, что $\left\| x_n - x_{n,\delta} \right\| \to 0$.

Из (2) при $x_0 = f$ получаем $x_1 = Bf + f$, $x_2 = B(Bf + f) + f = B^2 f + Bf + f$.

Предположим, что при $n = k$ $x_k = B^k f + B^{k-1} f + \ldots + Bf + f$ и, используя (2), найдем $x_{k+1} = Bx_k + f = B(B^k f + B^{k-1} f + \ldots + Bf + f) + f = B^{k+1} f + B^k f + \ldots + Bf + f$.

Итак, по индукции доказано, что $x_n = B^n f + B^{n-1} f + \ldots + Bf + f$.

Аналогично имеем, что $x_{n,\delta} = B^n f_\delta + B^{n-1} f_\delta + \ldots + Bf_\delta + f_\delta$. Отсюда

$$\left\| x_n - x_{n,\delta} \right\| = B^n (f - f_\delta) + B^{n-1} (f - f_\delta) + \ldots + B(f - f_\delta) + (f - f_\delta) . \tag{10}$$

Пусть $\rho(B) < 1$ и для $\forall \varepsilon$ выполняется $0 < \varepsilon < 1 - \rho(B)$, тогда $\|B\|_* \le \rho(B) + \varepsilon < 1$

и
$$\left\| x_n - x_{n,\delta} \right\|_* \le \left\| B^n (f - f_\delta) \right\|_* + \left\| B^{n-1} (f - f_\delta) \right\|_* + \ldots + \| B(f - f_\delta) \|_* +$$
$$+ \| f - f_\delta \|_* \le (n+1) \| f - f_\delta \|_* \le M(\varepsilon)(n+1)\delta ,$$

т. к. $\|f - f_\delta\| \le \delta$. Следовательно, $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le d(\varepsilon)(n+1)\delta$, где $d(\varepsilon) = \dfrac{M(\varepsilon)}{m(\varepsilon)}$.

$$\|x^* - x_{n,\delta}\| \le c(\varepsilon)[\rho(B)+\varepsilon]^n \|x_0 - Bx_0 - f\| + d(\varepsilon)(n+1)\delta \cdot \qquad (11)$$

Из оценки (11) следует, что если выбирать n зависящим от δ так, чтобы $n\delta \to 0$ при $n \to \infty$, $\delta \to 0$, то метод итерации (4) сходится.

Итак, доказана

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $\rho(B) < 1$ *и для каждого* ε $0 < \varepsilon < 1 - \rho(B)$. *Тогда последовательные приближения* (4) *сходятся к решению* x^* *уравнения* (2), *если число итераций n выбирать в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0$ при $n \to \infty$, $\delta \to 0$.

Оценку погрешности (11) можно уточнить, если воспользоваться неравенством (9), по которому $\|B(f - f_\delta)\|_* \le [\rho(B)+\varepsilon]\|f - f_\delta\|_*$. Из (10)

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_* = \left\|B^n(f - f_\delta)\right\|_* + \left\|B^{n-1}(f - f_\delta)\right\|_* + \ldots + \|B(f - f_\delta)\|_* + \|f - f_\delta\|_* \le$$

$$\le \left\{[\rho(B)+\varepsilon]^n + [\rho(B)+\varepsilon]^{n-1} + \ldots + [\rho(B)+\varepsilon] + 1\right\}\|f - f_\delta\|_* =$$

$$= \frac{1 - [\rho(B)+\varepsilon]^{n+1}}{1 - \rho(B) - \varepsilon}\|f - f_\delta\|_* \le \frac{1 - [\rho(B)+\varepsilon]^{n+1}}{1 - \rho(B) - \varepsilon} M(\varepsilon)\delta = k(\varepsilon)\left\{1 - [\rho(B)+\varepsilon]^{n+1}\right\}\delta,$$

где $k(\varepsilon) = \dfrac{M(\varepsilon)}{1 - \rho(B) - \varepsilon}$.

Поэтому $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le l(\varepsilon)\left\{1 - [\rho(B)+\varepsilon]^{n+1}\right\}\delta$, и, следовательно,

$$\|x^* - x_{n,\delta}\| \le c(\varepsilon)[\rho(B)+\varepsilon]^n \|x_0 - Bx_0 - f\| + l(\varepsilon)\left\{1 - [\rho(B)+\varepsilon]^{n+1}\right\}\delta, \qquad (12)$$

где $l(\varepsilon) = \dfrac{k(\varepsilon)}{m(\varepsilon)}$.

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Пусть спектральный радиус* $\rho(B)$ *оператора B удовлетворяет условию* $\rho(B) < 1$. *Тогда при любом* ε, $0 < \varepsilon < 1 - \rho(B)$ *для итерационного процесса* (4) *справедлива оценка погрешности* (12).

Оптимизируем по n оценку погрешности (11). Для ее минимизации производную по n от правой части неравенства (11) приравняем нулю. Получим

$$c(\varepsilon)[\rho(B)+\varepsilon]^n \|x_0 - Bx_0 - f\| \ln[\rho(B)+\varepsilon] + d(\varepsilon)\delta = 0;$$

$$[\rho(B)+\varepsilon]^n = \frac{-d(\varepsilon)\delta}{c(\varepsilon)\|x_0 - Bx_0 - f\| \ln[\rho(B)+\varepsilon]}. \qquad (13)$$

Так как по условию теоремы 4 $0 < \varepsilon < 1 - \rho(B)$, то $\rho(B) + \varepsilon < 1$ и, следовательно, $\ln[\rho(B)+\varepsilon] < 0$, значит, правая часть равенства (13) положительна. Из (13) получаем априорный момент останова итераций $n_{\text{опт}} = \log_{[\rho(B)+\varepsilon]} \dfrac{-d(\varepsilon)\delta}{c(\varepsilon)\|x_0 - Bx_0 - f\| \ln[\rho(B)+\varepsilon]}$.

Подставим $n_{\text{опт}}$ в (11), тогда оптимальная оценка погрешности для приближений (4) примет вид

$$\left\|x^* - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le c(\varepsilon)\left\|x_0 - Bx_0 - f\right\|\left[\rho(B)+\varepsilon\right]^{\log_{[\rho(B)+\varepsilon]}\frac{-d(\varepsilon)\delta}{c(\varepsilon)\|x_0 - Bx_0 - f\|\ln[\rho(B)+\varepsilon]}} +$$

$$+ d(\varepsilon)\left\{\log_{[\rho(B)+\varepsilon]}\frac{-d(\varepsilon)\delta}{c(\varepsilon)\|x_0 - Bx_0 - f\|\ln[\rho(B)+\varepsilon]} + 1\right\}\delta =$$

$$= \frac{-d(\varepsilon)\delta}{\ln[\rho(B)+\varepsilon]} + d(\varepsilon)\left\{\log_{[\rho(B)+\varepsilon]}\frac{-d(\varepsilon)\delta}{c(\varepsilon)\|x_0 - Bx_0 - f\|\ln[\rho(B)+\varepsilon]} + 1\right\}\delta.$$

Заключение

В настоящей статье изучены некоторые свойства предложенной явной схемы итераций решения некорректных задач с линейным непрерывным оператором: доказана сходимость приближений с априорным выбором параметра регуляризации в банаховом пространстве, получены оценка погрешности и априорный момент останова.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.

2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.

3. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : СО АН СССР, 1962. – 92 с.

4. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.

5. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.

6. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2008. – 196 с.

7. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.

8. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2014. – Nr. 2 (116). – P. 89–95.

9. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT, 2015. – 188 с.

10. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel’skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr. 3. – P. 373–389.

11. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – Nr. 2 (119). – P. 33–41.

12. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr. 300. – P. 290–299.

13. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr. 416. – P. 1–12.

14. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 456 с.

15. Красносельский, М. А. Позитивные линейные системы / М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, А. В. Соболев. – М. : Наука, 1985. – 256 с.

16. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1976. – 544 с.

REFERENCES

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.

2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.

3. Lavrient'jev, M. M. O niekotorykh niekorriektnykh zadachakh matiematichieskoj fiziki / M. M. Lavrient'jev. – Novosibirsk : SO AN SSSR, 1962. – 92 s.

4. Vajnikko, G. M. Iteracionnyje procedury v niekorriektnykh zadachakh / G. M. Vajnikko, A. Yu. Vierietiennikov. – M. : Nauka, 1986. – 178 s.

5. Samarskij, A. A. Chisliennyje mietody rieshenija obratnykh zadach matiematichieskoj fiziki / A. A. Samarskij, P. N. Vabishchievich. – M. : Editorial URSS, 2004. – 480 s.

6. Savchuk, V. F. Rieguliarizacija opieratornykh uravnienij v gilbiertovom prostranstvie / V. F. Savchuк, O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2008. – 196 s.

7. Matysik, O. V. Javnyje i niejavnyje iteracionnyje procedury rieshenija niekorriektno postavliennykh zadach / O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2014. – 213 s.

8. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approxima-ting right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2014. – Nr. 2 (116). – P. 89–95.

9. Matysik, O. V. Iteracionnaja rieguliarizacija niekorrektnykh zadach / O. V. Matysik. – Saarbrücken : LAP LAMBERT, 2015. – 188 s.

10. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr. 3. – P. 373–389.

11. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – Nr. 2 (119). – P. 33–41.

12. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr. 300. – P. 290–299.

13. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr. 416. – P. 1–12.

14. Priblizhennoje rieshenije opieratornykh uravnienij / M. A. Krasnosiel'skij [i dr.]. – M. : Nauka, 1969. – 456 s.

15. Krasnosiel'skij, M. A. Pozitivnyje liniejnyje sistiemy / M. A. Krasnosiel'skij, Ye. A. Lifshic, A. V. Soboliev. – M. : Nauka, 1985. – 256 s.

16. Kolmogorov, A. N. Eliemienty tieorii funkcij i funkcional'nogo analiza / A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin. – M. : Nauka, 1976. – 544 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.10.2023