

УДК 517.9

Марина Геннадьевна Кот*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Marina Kot***Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modelling
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: mtorkaylo@mail.ru***РЕЗОНАНСЫ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ
С ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Уравнения и системы, записываемые в виде $L_0 u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$, возникают в разных приложениях и интенсивно изучаются. Входящее в это уравнение произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций, поэтому одной из основных задач является придание смысла выражению в левой части уравнения, т. е. фактически построение оператора, который соответствует данному формальному выражению. Это достигается с помощью специальных аппроксимаций оператора умножения на δ -функцию. Для исследования уравнений с δ -образными коэффициентами применяется подход, основные этапы которого: построение аппроксимаций рассматриваемого выражения с помощью операторов конечного ранга; нахождение явного вида резольвенты аппроксимирующего семейства; нахождение предела резольвенты и выделение случаев резонанса, когда предельный оператор не совпадает с $-\Delta$; описание спектра построенных предельных операторов; исследование поведения собственных значений аппроксимирующих операторов. Цель данной работы заключается в нахождении резонансов для систем уравнений с дельта-образными коэффициентами.

Ключевые слова: обобщенная функция, асимптотика, резонанс, оператор.

Resonances for Systems of Equations with Delta-Shaped Coefficients

The equations can be written as $L_0 u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$, there are in different applications and studied intensively. In this equation work δu not determined in the classical theory of generalized functions, so one of the main objectives is to give meaning to the expression on the left side of the equation, that is, the actual construction of the operator, which corresponds to a given formal expression. This is achieved by special approximations multiplication by δ -function. For the study of equations with δ -shaped coefficients an approach is used, the main steps of which are: the construction of approximations considered expressions with operators of finite rank; finding the explicit form approximating the resolvent family; resolvent limit of determination and allocation of cases of resonance; description of the spectrum constructed limit operators; study of the behavior of the eigenvalues of approximating operators. The purpose of this work is the origin of resonances for mathematical systems with delta-shaped coefficients.

Key words: generalized function, asymptotic behavior, resonance, operator.

Введение

Уравнения, записываемые в виде

$$L_0 u \equiv -\Delta u + a(\varepsilon)\delta u = f, \quad (1)$$

возникают в разных приложениях [1] и интенсивно изучаются. Входящее в (1) произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций, поэтому одной из основных задач является придание смысла выражению в левой части (1), т. е. фактически построение оператора, соответствующего формальному выражению (1).

Один из основных подходов к определению понятия решения уравнения и построению таких решений основан на аппроксимации выражения в левой части (1) семейством корректно заданных операторов L_ε и затем нахождении предела резольвент

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (L_\varepsilon - \lambda I)^{-1} := R(\lambda).$$

Если такой предел существует, то операторно-значная функция $R(\lambda)$ оказывается резольвентой некоторого оператора, который соответствует рассматриваемой аппроксимации формального выражения. В случае операторов в пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$ скалярных функций было обнаружено, что в типичных случаях $R(\lambda)$ есть резольвента невозмущенного оператора $R_0(\lambda) = (-\Delta - \lambda I)^{-1}$, но возможны случаи резонанса, когда $R(\lambda)$ есть резольвента некоторого оператора, отличного от $-\Delta$ [2; 3]. Резольвента $R_0(\lambda)$ действует по формуле

$$R_0(\lambda)f = E_\lambda * f,$$

где $*$ – свертка функций, а $E_\lambda(x)$ – фундаментальное решение для оператора $-\Delta - \lambda I$, заданное формулой

$$E_\lambda(x) = \frac{1}{4\pi \|x\|} e^{-\mu \|x\|},$$

где $\mu^2 = -\lambda$, $\operatorname{Re} \mu > 0$. Отметим, что $E_\lambda \in L_2(\mathbb{R}^3)$.

Основная часть

Исследование систем с дельта-образными коэффициентами сводится к рассмотрению матрично-значных функций, представимых в виде $F(\mu, \varepsilon) = R(\varepsilon) + b(\varepsilon, \mu)I$. Задача заключается в получении условий на

$$R(\varepsilon) = \begin{pmatrix} R_{11}(\varepsilon) & R_{12}(\varepsilon) \\ R_{21}(\varepsilon) & R_{22}(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

при которых существует конечный ненулевой предел обратных матриц. В случае матриц размерности 2 обратная матрица-функция задается формулой

$$[F(\mu, \varepsilon)]^{-1} = \frac{1}{\det F(\mu, \varepsilon)} \begin{pmatrix} f_{22}(\mu, \varepsilon) & -f_{12}(\mu, \varepsilon) \\ -f_{21}(\mu, \varepsilon) & f_{11}(\mu, \varepsilon) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Проанализируем эту формулу в зависимости от вида $R(\varepsilon)$. Возникает несколько качественно различных случаев.

I. Пусть разложение $R(\varepsilon)$ начинается с $\frac{1}{\varepsilon}$:

$$R(\varepsilon) = R^{(-1)} \frac{1}{\varepsilon} + R^{(0)} + R^{(1)}\varepsilon + \dots,$$

где $R^{(-1)} \neq 0$. Тогда

$$F(\mu, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} F^{(k)}(\mu)\varepsilon^k,$$

где

$$F^{-1} = R^{(-1)} + M_{-1}I, F^0(\mu) = R^{(0)} - \frac{\mu}{4\pi}I, F^1(\mu) = R^{(1)} + M_1\mu^2I,$$

$$M_k = \frac{1}{4\pi} \int \left(\int \varphi(y)\varphi(x-y)dy \right) |x|^k dx.$$

Выпишем первые члены разложения определителя

$$\det F(\mu, \varepsilon) = \sum_{k=-2}^{\infty} \Delta_k(\mu) \varepsilon^k.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{-2} &= \det F^{(-1)} = (R_{11}^{(-1)} + M_{-1})(R_{22}^{(-1)} + M_{-1}) - R_{12}^{(-1)} R_{21}^{(-1)} \\ \Delta_{-1}(\mu) &= (R_{11}^{(-1)} + M_{-1}) \left(R_{22}^{(0)} - \frac{\mu}{4\pi} \right) + (R_{22}^{(-1)} + M_{-1}) \left(R_{11}^{(0)} - \frac{\mu}{4\pi} \right) - R_{12}^{(-1)} R_{21}^{(0)} - R_{12}^{(0)} R_{21}^{(-1)}. \end{aligned}$$

Заметим, что Δ_{-2} не зависит от μ , а $\Delta_{-1}(\mu)$ является линейной функцией переменной μ , за исключением случая, когда

$$(R_{11}^{(-1)} + M_{-1}) + (R_{22}^{(-1)} + M_{-1}) = 0.$$

Если $\Delta_{-2} \neq 0$, то разложение знаменателя (2) начинается с $\frac{1}{\varepsilon^2}$ и искомым предел есть нуль.

Если $\Delta_{-2} = 0$ и $\Delta_{-1}(\mu) \neq 0$, то разложение знаменателя (2) начинается с $\frac{1}{\varepsilon}$. Если при этом $F^{-1}(\mu) \neq 0$, то в числителе также имеются члены, содержащие $\frac{1}{\varepsilon}$, и в этом случае предел $D(\mu)$ отличен от нуля.

Здесь возникает особый случай, когда $F^{-1} = 0$, т. е. когда $R_{11}^{(-1)} + M_{-1} = 0$, $R_{22}^{(-1)} + M_{-1} = 0$, $R_{12}^{(-1)} = R_{21}^{(-1)} = 0$. В этом случае получаем, что $\Delta_{-1}(\mu) \equiv 0$, откуда следует, что в (2) разложения членов числителя и разложение знаменателя начинаются с нулевой степени ε , и в этом случае предел также отличен от нуля.

Получаем следующее утверждение.

Теорема. Пусть

$$R(\varepsilon) = R^{(-1)} \frac{1}{\varepsilon} + R^{(0)} + R^{(1)} \varepsilon + \dots,$$

где $R^{(-1)} \neq 0$. Резонанс имеет место в следующих случаях:

1) Если $\Delta_{-2} = 0$, $\Delta_{-1}(\mu) \neq 0$, $F^{(-1)} \neq 0$, то

$$D(\mu) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [R(\varepsilon) + b(\varepsilon, \mu) I]^{-1} = \frac{1}{\Delta_{-1}(\mu)} \begin{pmatrix} R_{22}^{(-1)} + M_{-1} & -R_{12}^{(-1)} \\ -R_{21}^{(-1)} & R_{11}^{(-1)} + M_{-1} \end{pmatrix} \neq 0.$$

2) Если $\Delta_{-2} = 0$, $\Delta_{-1} = 0$, $F^{(-1)} = 0$, $\Delta_0(\mu) \neq 0$, то

$$D(\mu) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [R(\varepsilon) + b(\varepsilon, \mu) I]^{-1} = \frac{1}{\Delta_0(\mu)} \begin{pmatrix} R_{22}^{(0)} - \frac{\mu}{4\pi} & -R_{12}^{(0)} \\ -R_{21}^{(0)} & R_{11}^{(0)} - \frac{\mu}{4\pi} \end{pmatrix} \neq 0.$$

II. Пусть разложение $R(\varepsilon)$ начинается с $\frac{1}{\varepsilon^2}$:

$$R(\varepsilon) = R^{(-2)} \frac{1}{\varepsilon^2} + R^{(-1)} \frac{1}{\varepsilon} + R^{(0)} + \dots,$$

где $R^{(-2)} \neq 0$. Тогда разложение определителя начинается с $\frac{1}{\varepsilon^4}$

$$\det F(\mu, \varepsilon) = \sum_{k=-4}^{\infty} \Delta_k(\mu) \varepsilon^k.$$

Так как в матрицу (2) входят члены, разложение которых начинается с $\frac{1}{\varepsilon^2}$, для существования конечного ненулевого предела необходимо и достаточно, чтобы разложение знаменателя также начиналось с $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Это выполнено тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{-2}(\mu) = 0, \Delta_{-3}(\mu) = 0, \Delta_{-2}(\mu) \neq 0.$$

Заметим, что здесь $\Delta_{-4} = \det R^{(-2)}$, а Δ_{-3} от μ и выражается через $R^{(-2)}, R^{(-1)}, M_{-1}$. Поэтому требуемые равенства есть условия на матрицу $R(\varepsilon)$.

Теорема. Пусть

$$R(\varepsilon) = R^{(-2)} \frac{1}{\varepsilon^2} + R^{(-1)} \frac{1}{\varepsilon} + R^{(0)} + \dots,$$

где $R^{(-2)} \neq 0$. Резонанс имеет место только при условиях

$$\Delta_{-4} = 0, \Delta_{-3} = 0, \Delta_{-2}(\mu) \neq 0,$$

и тогда

$$D(\mu) = \frac{1}{\Delta_{-2}(\mu)} \begin{pmatrix} R_{22}^{(-2)} & -R_{12}^{(-2)} \\ -R_{21}^{(-2)} & R_{11}^{(-2)} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, условия резонанса записаны как условия на матрицу $R(\varepsilon)$. Поскольку в исходное уравнение входит матрица коэффициентов $A(\varepsilon)$, рассмотрим, какие $A(\varepsilon)$ соответствуют $R(\varepsilon)$, описанным выше.

Фактически это частный случай задачи: имея разложение $R(\varepsilon)$ по степеням ε , найти разложение обратных матриц $A(\varepsilon)$.

Если

$$R(\varepsilon) = \begin{pmatrix} R_{11}(\varepsilon) & R_{12}(\varepsilon) \\ R_{21}(\varepsilon) & R_{22}(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

тогда

$$A(\varepsilon) = (R(\varepsilon))^{-1} = \frac{1}{\det R(\varepsilon)} \begin{pmatrix} R_{22} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{11} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

1. Пусть разложение $R(\varepsilon)$ начинается с $\frac{1}{\varepsilon}$:

$$R(\varepsilon) = R^{(-1)} \frac{1}{\varepsilon} + R^{(0)} + R^{(1)}\varepsilon + \dots,$$

тогда запишем разложения коэффициентов $R_{11}(\varepsilon)$, $R_{12}(\varepsilon)$, $R_{21}(\varepsilon)$, $R_{22}(\varepsilon)$ по степеням ε .

$$R_{11}(\varepsilon) = R_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + R_0^1 + R_1^1\varepsilon + o(\varepsilon),$$

$$R_{12}(\varepsilon) = R_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + R_0^2 + R_1^2\varepsilon + o(\varepsilon),$$

$$R_{21}(\varepsilon) = R_{-1}^3 \frac{1}{\varepsilon} + R_0^3 + R_1^3\varepsilon + o(\varepsilon),$$

$$R_{22}(\varepsilon) = R_{-1}^4 \frac{1}{\varepsilon} + R_0^4 + R_1^4\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Вычислим определитель матрицы $R(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \det R(\varepsilon) &= R_{11}(\varepsilon)R_{22}(\varepsilon) - R_{12}(\varepsilon)R_{21}(\varepsilon) = \left(R_{-1}^1R_{-1}^4 - R_{-1}^2R_{-1}^3\right) \frac{1}{\varepsilon^2} + \\ &+ \left(R_{-1}^1R_0^4 + R_{-1}^4R_0^1 - R_{-1}^2R_0^3 - R_{-1}^3R_0^2\right) \frac{1}{\varepsilon} + \left(R_{-1}^1R_1^4 + R_0^4R_1^1 + R_{-1}^4R_1^1 - R_{-1}^2R_1^3 - R_0^3R_1^2 - R_{-1}^3R_1^2\right) + o(1) = \\ &= r_{-2}^1 \frac{1}{\varepsilon^2} + r_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + r_0^1 + o(1), \end{aligned}$$

где

$$r_{-2}^1 = \det[R^{(-1)}] = R_{-1}^1R_{-1}^4 - R_{-1}^2R_{-1}^3,$$

$$r_{-1}^1 = R_{-1}^1R_0^4 + R_{-1}^4R_0^1 - R_{-1}^2R_0^3 - R_{-1}^3R_0^2,$$

$$r_0^1 = R_{-1}^1R_1^4 + R_0^4R_1^1 + R_{-1}^4R_1^1 - R_{-1}^2R_1^3 - R_0^3R_1^2 - R_{-1}^3R_1^2.$$

В результате данных вычислений можем описать различные случаи поведения коэффициента $A(\varepsilon)$.

1) Если $r_{-2}^1 \neq 0$, то выражения, полученные для элементов, входящих в матрицу из (3), содержат члены с $\frac{1}{\varepsilon}$ и более высокими степенями, а разложение определителя начинается с члена, содержащего $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Поэтому (3) будет иметь разложение вида

$$A(\varepsilon) = A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

2) Если $r_{-2}^1 = 0$, а $r_{-1}^1 \neq 0$, то выражения, входящие в числители и знаменатель (3), начинается с членов $\frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, (3) будет иметь разложение вида

$$A(\varepsilon) = A_0 + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

3) Если $r_{-2}^1 = 0$, а $r_{-1}^1 = 0$, то выражения, полученные для элементов, входящих в матрицу из (3), содержат члены с $\frac{1}{\varepsilon}$, а разложение знаменателя в (3) начинается с нулевой степени ε . Тогда (3) будет иметь разложение вида

$$A(\varepsilon) = A_{-1} \frac{1}{\varepsilon} + A_0 + A_1 \varepsilon + o(\varepsilon).$$

2. Пусть теперь разложение $R(\varepsilon)$ начинается с $\frac{1}{\varepsilon^2}$:

$$R(\varepsilon) = R^{(-2)} \frac{1}{\varepsilon^2} + R^{(-1)} \frac{1}{\varepsilon} + R^{(0)} + \dots,$$

тогда запишем разложения коэффициентов $R_{11}(\varepsilon)$, $R_{12}(\varepsilon)$, $R_{21}(\varepsilon)$, $R_{22}(\varepsilon)$ из (3) по степеням ε .

$$R_{11}(\varepsilon) = R_{-2}^1 \frac{1}{\varepsilon^2} + R_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + R_0^1 + o(\varepsilon),$$

$$R_{12}(\varepsilon) = R_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^2} + R_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + R_0^2 + o(\varepsilon),$$

$$R_{21}(\varepsilon) = R_{-2}^3 \frac{1}{\varepsilon^2} + R_{-1}^3 \frac{1}{\varepsilon} + R_0^3 + o(\varepsilon),$$

$$R_{22}(\varepsilon) = R_{-2}^4 \frac{1}{\varepsilon^2} + R_{-1}^4 \frac{1}{\varepsilon} + R_0^4 + o(\varepsilon).$$

Вычислим определитель матрицы $R(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \det R(\varepsilon) &= R_{11}(\varepsilon)R_{22}(\varepsilon) - R_{12}(\varepsilon)R_{21}(\varepsilon) = \left(R_{-2}^1 R_{-2}^4 - R_{-2}^2 R_{-2}^3 \right) \frac{1}{\varepsilon^4} + \\ &+ \left(R_{-1}^1 R_{-2}^4 + R_{-1}^4 R_{-2}^1 - R_{-1}^2 R_{-2}^3 - R_{-1}^3 R_{-2}^2 \right) \frac{1}{\varepsilon^3} + \left(R_{-2}^1 R_0^4 + R_{-1}^4 R_{-1}^1 + R_{-2}^4 R_0^1 - R_{-2}^2 R_0^3 - R_{-1}^3 R_{-1}^2 - R_{-2}^3 R_0^2 \right) \frac{1}{\varepsilon^2} + \\ &+ \left(R_{-2}^1 R_1^4 + R_0^4 R_{-1}^1 + R_{-1}^4 R_0^1 + R_{-1}^1 R_{-2}^4 - R_{-2}^2 R_1^3 - R_0^3 R_{-1}^2 - R_{-1}^3 R_0^2 - R_{-2}^3 R_1^2 \right) \frac{1}{\varepsilon} = \\ &= r_{-4}^2 \frac{1}{\varepsilon^4} + r_{-3}^2 \frac{1}{\varepsilon^3} + r_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^2} + r_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} r_{-4}^2 &= \det[R^{(-2)}] = R_{-2}^1 R_{-2}^4 - R_{-2}^2 R_{-2}^3, \\ r_{-3}^2 &= R_{-1}^1 R_{-2}^4 + R_{-1}^4 R_{-2}^1 - R_{-1}^2 R_{-2}^3 - R_{-1}^3 R_{-2}^2, \\ r_{-2}^2 &= R_{-2}^1 R_0^4 + R_{-1}^4 R_{-1}^1 + R_{-2}^4 R_0^1 - R_{-2}^2 R_0^3 - R_{-1}^3 R_{-1}^2 - R_{-2}^3 R_0^2, \\ r_{-1}^2 &= R_{-2}^1 R_1^4 + R_0^4 R_{-1}^1 + R_{-1}^4 R_0^1 + R_{-1}^1 R_{-2}^4 - R_{-2}^2 R_1^3 - R_0^3 R_{-1}^2 - R_{-1}^3 R_0^2 - R_{-2}^3 R_1^2. \end{aligned}$$

В результате данных вычислений можем описать различные случаи поведения ко-эфициента $A(\varepsilon)$.

1) Если $r_{-4}^2 \neq 0$, то выражения, полученные для элементов, входящих в матрицу из (3), содержат члены $\frac{1}{\varepsilon^2}$, а разложение определителя начинается с члена $\frac{1}{\varepsilon^4}$. Тогда (3) будет иметь разложение вида

$$A(\varepsilon) = A_2\varepsilon^2 + A_3\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3).$$

2) Если $r_{-4}^2 = 0$, а $r_{-3}^2 \neq 0$, то выражения, полученные для элементов, входящих в матрицу из (3), содержат члены $\frac{1}{\varepsilon^2}$, а разложение определителя начинается с члена $\frac{1}{\varepsilon^3}$. Поэтому (3) будет иметь разложение вида

$$A(\varepsilon) = A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

3) Если $r_{-4}^2 = 0$, $r_{-3}^2 = 0$, а $r_{-2}^2 \neq 0$, то выражения, входящие в числители и знаменатель (3), начинаются с членов $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Следовательно, (3) будет иметь разложение вида

$$A(\varepsilon) = A_0 + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

4) Если $r_{-4}^2 = 0$, $r_{-3}^2 = 0$, $r_{-2}^2 = 0$, а $r_{-1}^2 \neq 0$, то выражения, полученные для элементов, входящих в числители из (3), содержат члены с $\frac{1}{\varepsilon^2}$, а разложение знаменателя (3) начинается с $\frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому (3) будет иметь разложение вида

$$A(\varepsilon) = A_{-1}\frac{1}{\varepsilon} + A_0 + A_1\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Заключение

Таким образом, получены условия резонанса. Получен общий вид условий резонанса для семейства матриц-функций, зависящих от двух переменных, на основе приведения их к нормальной форме. Выявлены отличия от скалярного случая. В частности, в случае систем имеется качественное отличие: условия резонанса могут быть выполнены для матриц коэффициентов $A(\varepsilon)$, имеющих ненулевые пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$ и даже для $A(\varepsilon)$, неограниченно возрастающих при $\varepsilon \rightarrow 0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио [и др.] ; пер. с англ. В. А. Гейлера [и др.]. – М. : Мир, 1991. – 566 с.
2. Антоневиц, А. Б. Аппроксимации операторов с дельта-образными коэффициентами / А. Б. Антоневиц, Т. А. Романчук // Актуальные проблемы математики : сб. науч. тр. ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: Е. А. Ровба [и др.]. – Гродно, 2008. – С. 11–28.
3. Антоневиц, А. Б. Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций // А. Б. Антоневиц, Т. А. Романчук. – Саарбрюккен : LAP LAMBERT, 2012.
4. Березин, Ф. А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 137, № 5. – С. 1011–1014.

5. Кот, М. Г. О резольвентной сходимости операторов, аппроксимирующих систему уравнений с δ -образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вестн. БГУ. Физика. Математика. Информатика. – 2015. – № 1. – С. 111–117.

6. Кот, М. Г. Асимптотика собственных вектор-функций операторов, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с δ -образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2017. – № 3. – С. 15–26.

7. Романчук, Т. А. Явление резонанса для матрично-значных функций / Т. А. Романчук // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2008. – № 2. – С. 8–16.

8. Кащенко, И. С. Асимптотическое разложение решений уравнений : метод. указания / И. С. Кащенко. – Ярославль : ЯрГУ, 2011. – 44 с.

REFERENCES

1. Rieszajemyje modeli v kvantovoj miekhanikie / S. Al'beverio [i dr.] ; pier. s angl. V. A. Gejliera [i dr.]. – M. : Mir, 1991. – 556 s.

2. Antonievich, A. B. Approksimacii operatorov s delta-obraznymi koofficijentami / A. B. Antonievich, T. A. Romanchuk // Aktual'nyje problemi matematiki : sb. nauch. tr. GrGU im. Ya. Kupaly ; riedkol.: Ye. A. Rovba [i dr.]. – Grodno, 2008, – S. 11–28.

3. Antonievich, A. B. Uravnienija s delta-obraznymi koofficijentami: mietod koniechnomiernykh approksimacij / A. B. Antonievich, T. A. Romanchuk. – Saarbrücken : LAP LAMBERT, 2012.

4. Bieriezin, F. A. Zamiechanije ob uravnienii Shredingiera s singuliarnym potencialom / F. A. Bieriezin, L. D. Faddiejev // Dokl. AN SSSR. – 1961. – T. 137, № 5. – S. 1011–1014.

5. Kot M. G. O riezolvientnoj skhodimosti opieratorov, approksimirujushchikh system uravnenij s δ -obraznymi koofficijentami / M. G. Kot // Viestn. BGU. Fizika. Matematika. In-formatika. – 2015. – № 1. – S. 111–117.

6. Kot, M. G. Asimptotika sobstviennykh viector-funkcij opieratorov, approksimirujushchikh diffierencial'nyje uravnienija s δ -obraznymi koofficijentami / M. G. Kot // Vies. Nac. acad. navuk Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2017. – № 3. – S. 15–26.

7. Romanchuk, T. A. Javlienije riezonansa dlia matrichno-znachnykh funkcij / T. A. Romanchuk // Vies. Nac. akad. navuk Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2008. – № 2. – S. 8–16.

8. Kashchienko, I. S. Asimptotichieskoje razlozhenije rieshenij uravnenij : mietod. ukazanija / I. S. Kashchienko. – Jaroslavl' : JarGU, 2011. – 44 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 03.11.2023