УДК 519.652

**Екатерина Ивановна Качаловская[1], Дмитрий Владимирович Грицук[2]**
[1]*ст. преподаватель каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*
[2]*канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*
**Ekaterina Kachalouskaya[1], Dmitry Gritsuk[2]**
[1]*Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Computer Science of Brest State A. S. Pushkin University*
[2]*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science of Brest State A. S. Pushkin University*
e-mail: [1]katerina.kulgun@gmail.com; [2]dmitry.gritsuk@gmail.com

# АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МАТРИЧНОГО АРГУМЕНТА

*Интерполирование функций матричного аргумента широко применяется в нелинейной динамике, квантовой физике. В теории интерполяции функций матричных переменных наиболее полно рассмотрена задача алгебраического интерполирования. Построены интерполяционные алгебраические матричные многочлены разных структур: лагранжева, ньютонова, эрмитова, Эрмита – Биркгофа и других типов.*

***Ключевые слова:*** *интерполирование, многочлен, матрица.*

## *Algebraic and Trigonometric Interpolation Polynomials for Matrix Argument Functions*

*Interpolation of matrix argument functions is widely used in nonlinear dynamics and quantum physics. In the theory of interpolation of functions of matrix variables, the problem of algebraic interpolation is most fully considered. Interpolation algebraic matrix polynomials of different structures are constructed: Lagrangian, Newtonian, Hermitian, Hermite – Birkhoff, and other types.*

***Key words:*** *interpolation, polynomial, matrix.*

## Введение

В теории интерполирования функций скалярных аргументов построены интерполяционные многочлены относительно произвольных чебышевских систем функций и их частных случаев: тригонометрических, экспоненциальных, дробно-рациональных и других классов систем.

Такого вида интерполяционные формулы, так же как и формулы алгебраического типа, находят применение в ряде областей математики и ее приложениях.

При решении многих практических задач обычно используются интерполяционные формулы невысоких порядков. Это относится как к случаю интерполяции скалярных функций, так и к задаче операторного интерполирования и вызвано в значительной степени тем, что при увеличении порядка интерполяционных формул значительно усложняется их общий вид, что приводит, соответственно, к более сложной структуре получаемых на их основе алгоритмов.

Наряду с построением интерполяционных формул операторного интерполирования невысоких порядков является актуальным исследование данной задачи и для случая формул высших порядков.

**1. Алгебраическое интерполирование**

Рассмотрим пространство $C^m[T]$ квадратных матриц $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]$, для которых производная $A^{(m)}(t) = \left[a_{ij}^{(m)}(t)\right]$ порядка $m$ непрерывна на отрезке [a, b], и матричный многочлен первой степени вида

$$P_1(A) = B + \sum_{j=0}^{n} A(t_j)C_j + \sum_{k=0}^{m} \int_T A^{(k)}(s)P_k(t,s)ds, \tag{1}$$

где $t_0, t_1, \dots, t_n$ – фиксированные точки отрезка $T = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $B = B(t)$, $C_j = C_j(t)(j = \overline{0,n})$, $P_k(t,s)(k = \overline{0,m})$ – заданные матрицы той же размерности, что и матрица $A(t)$.

Пусть $F(A)$ – заданная на $C^m[T]$ функция матричного аргумента А. Имеет место следующая

**Теорема 1.** *Для формулы*

$$L_1(A) = F(A_0) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i) - A_0(t_i)]\,[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}[F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] +$$
$$+ \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)]\,d\tau, \tag{2}$$

*где* $A_0 = A_0(t)$, $A_1 = A_1(t)$ *– узлы интерполирования,*

$$\sigma_{1i}(t) = A_0(t) + A_1(t_i) - A_0(t_i), \tag{3}$$
$$H_i(t) = A(t) - A_0(t) - A(t_i) + A_0(t_i), \tag{4}$$

*выполняются условия*

$$L_1(A_i) = F(A_i)(i = 0,1), \tag{5}$$

*и она точна для матричных многочленов вида* (1).

Доказательство. Покажем, что матричный многочлен (2) удовлетворяет интерполяционным условиям (5). Равенство $L_1(A_0) = F(A_0)$ имеет место, т. к. второе и третье слагаемые в правой части (2) обращаются в нуль. Так как $L_1(A)$ при $A = A_1$ принимает вид

$$L_1(A_1) = F(A_0) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] +$$
$$+ \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)]\,d\tau,$$

то, учитывая, что $\delta F[x + \tau h; h] = \frac{d}{d\tau}F[x + \tau h]$, получим

$$L_1(A_1) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}F(\sigma_{1i}) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \frac{d}{d\tau}F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot))]\,d\tau = F(A_1).$$

Докажем инвариантность формулы (2) относительно многочленов вида (1). Проведем доказательство для каждой из трех групп слагаемых в (1).

Очевидно, что $L_1(A) = F(A)$ для $F(A) = B$.

Пусть $F(A) = \sum_{j=0}^{n} A(t_j)C_j$.

Так как $F(\sigma_{1i}) - F(A_0) = [A_1(t_i) - A_0(t_i)]\sum_{j=0}^{n} C_j$,

а $\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] = \sum_{j=0}^{n}\big(A(t_j) - A_0(t_j) - A(t_i) + A_0(t_i)\big)\,C_j$, то после несложных вычислений получим

$$L_1(A) = \sum_{j=0}^{n} A_0(t_j)C_j + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i) - A_0(t_i)]\sum_{j=0}^{n} C_j +$$
$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\big(A(t_j) - A_0(t_j) - A(t_i) + A_0(t_i)\big)\, C_j = \sum_{j=0}^{n} A(t_j)C_j \equiv F(A).$$

Пусть $F(A) = \sum_{k=0}^{m}\int_T A^{(k)}(s)P_k(t,s)ds$. Так как для $k \geq 1$ $\sigma_{1i}^{(k)}(s) = A_0^{(k)}(s)$, а $H_i^{(k)}(s) = A^{(k)}(s) - A_0^{(k)}(s)$, то будем иметь

$$F(\sigma_{1i}) - F(A_0) = [A_1(t_i) - A_0(t_i)]\int_T P_0(t,s)ds,$$
$$\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] =$$
$$= \sum_{k=0}^{m}\int_T\Big(A^{(k)}(s) - A_0^{(k)}(s)\Big)P_k(t,s)ds - [A(t_i) - A_0(t_i)]\int_T P_0(t,s)ds.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (2), после некоторых преобразований будем иметь $L_1(A) = \sum_{k=0}^{m}\int_T A^{(k)}(s)P_k(t,s)ds \equiv F(A)$.

В силу линейного вхождения в формулу (2) функции $F(A)$, данная формула точна также для многочленов вида (1). Теорема 1 доказана.

В частности, если узлы интерполирования $A_i$ имеют вид $A_i = H + \alpha_i I$, где $H = H(t)$ – фиксированная матрица, $\alpha_i = \alpha_i(t)(i = 0,1)$ – заданные числовые функции, причем $\alpha_0(t_i) \neq \alpha_1(t_i)(i = \overline{0,n})$, $I$ – единичная матрица, то формула (2) примет вид

$$L_1(A) = F(A_0) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\frac{A(t_i)-A_0(t_i)}{\alpha_1(t_i)-\alpha_0(t_i)}[F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] +$$
$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)]\, d\tau,$$

где

$$\sigma_{1i}(t) = A_0(t) + (\alpha_1(t_i) - \alpha_0(t_i))I = H(t) + (\alpha_0(t) + \alpha_1(t_i) - \alpha_0(t_i))I,$$
$$H_i(t) = A(t) - A(t_i) - H(t) + H(t_i) - (\alpha_0(t) - \alpha_0(t_i))I.$$

Построим аналогичную формулу второго порядка. Рассмотрим матричные многочлены первой и второй степени вида

$$\tilde{P}_1(A) = B + \sum_{j_1,j_2=0}^{n} C_{j_1j_2}\big[A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})\big]D_{j_1j_2} +$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\int_{T^2} P_k(t,s_1,s_2)\big[A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)\big]Q_k(t,s_1,s_2)ds_1ds_2\,; \qquad (6)$$
$$\tilde{P}_2(A) = \tilde{P}_1(A) + \sum_{j=0}^{n} C_{3,j}\big[A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})\big]C_{4,j}\big[A(t_{j_3}) - A(t_{j_4})\big]C_{5,j} + \qquad (7)$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\int_{T^4} P_{k,3}(t,s)\big[A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)\big]P_{k,4}(t,s)\big[A^{(k)}(s_3) -$$
$$- A^{(k)}(s_4)\big]P_{k,5}(t,s)ds,$$

где $t_0, t_1, \dots, t_n$ – те же фиксированные точки отрезка $T = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $B = B(t)$, $C_{j_1j_2} = C_{j_1j_2}(t), D_{j_1j_2} = D_{j_1j_2}(t)$, $C_{i,j} = C_{i,j}(t)(i = 3,4,5), \big(j, j_1, j_2, j_3, j_4 = \overline{0,n}\big)$ – заданные фиксированные матрицы, $P_k(t,s_1,s_2)$, $Q_k(t,s_1,s_2)$, $P_{k,i}(t,s)$ $(i = 3,4,5)$, $\big(k = \overline{0,m}\big)$ – также заданные матрицы той же размерности, что и $A(t)$, а $s = (s_1,s_2,s_3,s_4), ds = ds_1ds_2ds_3ds_4$.

Заметим, что формула (2) инвариантна также относительно многочленов вида (6). Действительно, очевидно, что $\sigma_{1i}\big(t_{j_1}\big) - \sigma_{1i}(t_{j_2}) = A_0(t_{j_1}) - A_0(t_{j_2})$ и $\sigma_{1i}^{(k)}(s_1) - \sigma_{1i}^{(k)}(s_2) = A_0^{(k)}(s_1) - A_0^{(k)}(s_2)$, поэтому для

$$F(A) = \sum_{j_1,j_2=0}^{n} C_{j_1j_2}\big[A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})\big]D_{j_1j_2} \qquad (8)$$

и

$$F(A) = \sum_{k=0}^{m}\int_{T^2} P_k(t,s_1,s_2)\,\big[A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)\big]Q_k(t,s_1,s_2)ds_1ds_2 \qquad (9)$$

при $i = 0,1,\dots,n$ справедливы равенства $F(\sigma_{1i}) - F(A_0) = 0$.

Для функций (8), (9) и любых матриц $A(t)$ и $H(t)$ из пространства $C^m[T]$ по определению дифференциала Гато справедливы, соответственно, равенства

$$\delta F[A(\cdot);H(\cdot)]=\sum_{j_1,j_2=0}^{n} C_{j_1 j_2}\left[H(t_{j_1})-H(t_{j_2})\right]D_{j_1 j_2}, \tag{10}$$

$$\delta F[A(\cdot);H(\cdot)]=\sum_{k=0}^{m}\int_{T^2}P_k(t,s_1,s_2)\left[H^{(k)}(s_1)-H^{(k)}(s_2)\right]Q_k(t,s_1,s_2)ds_1 ds_2. \tag{11}$$

Из (10) и (11) при $A(t)=\sigma_{1i}(t)+\tau(A_1(t)-\sigma_{1i}(t))$ и $H(t)=H_i(t)$ для функций (8), (9) будем иметь

$$\delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot));H_i(\cdot)]=F(A)-F(A_0).$$

Следовательно, $L_1(A)\equiv F(A)$ при $F(A)=\tilde{P}_1(A)$, т. е. формула (2) точна также и для многочленов первой степени вида (6).

Пусть $F(A)$ – функция от матриц, где $A\in C^m[a,b]$. Введем следующие обозначения:

$$l_{21}(A)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i)-A_1(t_i)]\,[A(t_i)-A_0(t_i)][A_2(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}\times$$
$$\times\left(\left[A_1(t_i)-A_2(t_i)\right]^{-1}\left[F(\sigma_{1i}^{21})-F(A_2)\right]+\left[A_0(t_i)-A_1(t_i)\right]^{-1}\left[F(\sigma_{1i}^{01})-F(A_0)\right]\right),$$

$$l_{22}(A)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1\int_0^1\tau\delta^2F[\sigma_{1i}^{01}(\cdot)+\tau(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}^{01}(\cdot))+$$
$$+\tau s(A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{12}(\cdot));H_{i1}(\cdot)H_{i0}(\cdot)]d\tau ds, \tag{12}$$

где $\sigma_{1i}^{01}(t)=\sigma_{1i}(t)$, $\sigma_{1i}^{12}(t)=A_1(t)+A_2(t_i)-A_1(t_i)$, $\sigma_{1i}^{21}(t)=A_2(t)+A_1(t_i)-A_2(t_i)$,

$H_{i0}(t)=H_i(t)$, $H_{i1}(t)=A(t)-A_1(t)-A(t_i)+A_1(t_i)$, а функции $\sigma_{1i}(t)$ и $H_i(t)$, как и раньше, задаются формулами (3), (4). Имеет место

**Теорема 2.** *Если существуют матрицы* $[A_1(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_2(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_1(t_i)-A_2(t_i)]^{-1}$ $\left(i=\overline{0,n}\right)$, *то для формулы*

$$L_2(A)=L_1(A)+l_{21}(A)+l_{22}(A), \tag{13}$$

*где* $A_i=A_i(t)$ $(i=\overline{0,2})$ *– узлы интерполирования,* $L_1(A)$ *– многочлен, определенный формулой* (2), *выполняются условия*

$$L_2(A_i)=F(A_i)(i=\overline{0,2}), \tag{14}$$

*и она инвариантна относительно матричных многочленов вида* (7).

Доказательство. Так как $l_{21}(A_0)=l_{21}(A_1)=0$, $H_{i0}(t)=0$ при $A=A_0$, $H_{i1}(t)=0$ при $A=A_1$, то с учетом (5) имеем, что $L_2(A_i)=F(A_i)(i=0{,}1)$. Проверим далее выполнение условия $L_2(A_2)=F(A_2)$. Введем обозначения

$$l_{11}(A)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i)-A_0(t_i)]\,[A_1(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}[F(\sigma_{1i})-F(A_0)],$$

$$l_{12}(A)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1\delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)\right);H_i(\cdot)]d\tau. \tag{15}$$

Справедливо равенство

$$l_{11}(A_2)+l_{21}(A_2)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}([A_2(t_i)-A_1(t_i)+A_1(t_i)-A_0(t_i)][A_1(t_i)-A_0(t_i)]^{-1}\times$$
$$\times[F(\sigma_{1i})-F(A_0)]-F(\sigma_{1i}^{21})+F(A_2)+[A_2(t_i)-A_0(t_i)+A_0(t_i)-A_1(t_i)]\times$$
$$\times[A_0(t_i)-A_1(t_i)]^{-1}[F(\sigma_{1i})-F(A_0)])=F(A_2)-F(A_0)+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[F(\sigma_{1i}^{01})-F(\sigma_{1i}^{21})].$$

При $A = A_2$ направления $H_{i0}(t)$ и $H_{i1}(t)$ примут вид $H_{i0}(t) = A_2(t) - \sigma_{1i}^{02}(t)$, $H_{i1}(t) = A_2(t) - \sigma_{1i}^{12}(t)$, где $\sigma_{1i}^{02}(t) = A_0(t) + A_2(t_i) - A_0(t_i)$, поэтому, используя формулу $\delta F[\tilde{A} + s\tau\tilde{H}; \tilde{H}] = \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial s}F[\tilde{A} + s\tau\tilde{H}]$ при $\tilde{A} = \sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}^{01}(\cdot))$ и $\tilde{H} = A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{12}(\cdot)$, будем иметь

$$l_{22}(A_2) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\delta F\Big[\sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau\Big(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}^{01}(\cdot)\Big) + \tau s\Big(A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{12}(\cdot)\Big);\ A_2(\cdot) -$$

$$-\sigma_{1i}^{02}(\cdot)\Big]d\tau ds = -l_{12}(A_2) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau(A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{02}(\cdot)); A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{02}(\cdot)]d\tau.$$

Аналогично, пользуясь соотношением $\delta F[\tilde{A} + \tau\tilde{H}; \tilde{H}] = \frac{d}{d\tau}F[\tilde{A} + \tau\tilde{H}]$ при $\tilde{A} = \sigma_{1i}^{01}(\cdot)$и $\tilde{H} = A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{02}(\cdot)$,получим

$$l_{22}(A_2) = -l_{12}(A_2) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[F(\sigma_{1i}^{21}) - F(\sigma_{1i}^{01})].$$

Тогда $L_2(A_2) = F(A_0) + l_{11}(A_2) + l_{12}(A_2) + l_{21}(A_2) + l_{22}(A_2) = F(A_2)$.

Таким образом, интерполяционные условия (15) выполняются.

Покажем, что формула (14) точна для многочленов вида (7). Пусть $F(A) = \tilde{P}_1(A)$. Тогда, как показано было раньше, $L_1(A) \equiv \tilde{P}_1(A)$. Так как $\sigma_{1i}^{01}(t_{j_1}) - \sigma_{1i}^{01}(t_{j_2}) = A_0(t_{j_1}) - -A_0(t_{j_2})$ и $\frac{d^k}{dt^k}\{\sigma_{1i}^{01}(t)\}\Big|_{t=s_1} - \frac{d^k}{dt^k}\{\sigma_{1i}^{01}(t)\}\Big|_{t=s_2} = = A_0^{(k)}(s_1) - A_0^{(k)}(s_2)$, то $F(\sigma_{1i}^{01}) - -F(A_0) = 0$ для $F(A) = \tilde{P}_1(A)$. Аналогично можно показать, что $F(\sigma_{1i}^{21}) - F(A_2) = 0$. Следовательно, $l_{21}(A) = 0$.

Для любых квадратных функциональных матриц $\tilde{A}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ соответствующего порядка и любой матричной функции $F(A)$, дважды дифференцируемой по Гато в точке $\tilde{A}$, выполняется соотношение

$$\delta^2 F[\tilde{A}; \tilde{H}_2\tilde{H}_1] = \lim_{\lambda_1,\lambda_2\to 0}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\Big(F[\tilde{A} + \lambda_1\tilde{H}_1 + \lambda_2\tilde{H}_2] - -F[\tilde{A} + \lambda_1\tilde{H}_1] - F[\tilde{A} + \lambda_2\tilde{H}_2] + F[\tilde{A}]\Big). \quad (16)$$

Тогда из (16) при $F(A) = \tilde{P}_1(A)$ после несложных преобразований будем иметь $\delta^2\tilde{P}_1[\tilde{A}; \tilde{H}_2\tilde{H}_1] \equiv 0$. Таким образом, $l_{22}(A) = 0$, и, значит, $L_2(A) \equiv \tilde{P}_1(A) = F(A)$.

Введем в рассмотрение функцию двух матричных переменных

$$\Phi(A, B) = \sum_{j=0}^{n} C_{3,j}\big[A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})\big]C_{4,j}\big[B(t_{j_3}) - B(t_{j_4})\big]C_{5,j}.$$

Очевидно, что функция $\Phi(A, B)$ обладает свойствами

$$\Phi(A + B, D) = \Phi(A, D) + \Phi(B, D), \Phi(A, B + D) = \Phi(A, B) + \Phi(A, D),$$
$$\Phi(\lambda A, B) = \Phi(A, \lambda B) = \lambda\Phi(A, B), A, B, D \in C^m[a, b], \lambda \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Пусть $F(A) = \Phi(A, A)$, что совпадает со вторым слагаемым в (7). В силу того, что $\sigma_{1i}^{01}(t_{j_k}) - \sigma_{1i}^{01}(t_{j_{k+1}}) = A_0(t_{j_k}) - A_0(t_{j_{k+1}})(k = 1{,}3)$, для этой функции справедливо равенство $F(\sigma_{1i}^{01}) - F(A_0) = 0$. Аналогично показывается, что $F(\sigma_{1i}^{21}) - F(A_2) = 0$. Таким образом, учитывая, что $\sigma_{1i}^{01}(t) = \sigma_{1i}(t)$, будем иметь

$$l_{11}(A) = l_{21}(A) = 0. \quad (18)$$

Используя определение дифференциала Гато первого порядка и свойства (17) функции $\Phi(A,B)$, которыми, в частности, обладает и $F(A)=\Phi(A,A)$, получим

$$\delta F[\tilde{A};\tilde{H}]=\Phi(\tilde{A},\tilde{H})+\Phi(\tilde{H},\tilde{A}). \tag{19}$$

Нетрудно показать, что выполняются равенства

$$\begin{gathered}\Phi(\sigma_{1i}(\cdot),H_i(\cdot))=\Phi(A_0(\cdot),A(\cdot)-A_0(\cdot));\\ \Phi(H_i(\cdot),\sigma_{1i}(\cdot))=\Phi(A(\cdot)-A_0(\cdot),A_0(\cdot));\\ \Phi(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot),H_i(\cdot))=\Phi(A_1(\cdot)-A_0(\cdot),A(\cdot)-A_0(\cdot));\\ \Phi(H_i(\cdot),A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot))=\Phi(A(\cdot)-A_0(\cdot),A_1(\cdot)-A_0(\cdot)).\end{gathered} \tag{20}$$

Тогда из (19) при $\tilde{A}=\sigma_{1i}(\cdot)+\tau(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot)),\tilde{H}=H_i(\cdot)$и (7), учитывая свойства (17), будем иметь

$$\begin{gathered}\delta F[\sigma_{1i}(\cdot)+\tau(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot));H_i(\cdot)]=\Phi(\sigma_{1i}(\cdot),H_i(\cdot))+\Phi(H_i(\cdot),\sigma_{1i}(\cdot))+\\ +\tau[\Phi(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot),H_i(\cdot))+\Phi(H_i(\cdot),A_1(\cdot)-\sigma_{1i}(\cdot))]=\\ =\Phi(A_0(\cdot),A(\cdot)-A_0(\cdot))+\Phi(A(\cdot)-A_0(\cdot),A_0(\cdot))+\\ +\tau[\Phi(A_1(\cdot)-A_0(\cdot),A(\cdot)-A_0(\cdot))+\Phi(A(\cdot)-A_0(\cdot),A_1(\cdot)-A_0(\cdot))].\end{gathered}$$

Таким образом, вычисляя интеграл в (15) и проводя преобразования, получим

$$\begin{gathered}l_{12}(A)=\tfrac{1}{2}(\Phi(A_0,A)-2\Phi(A_0,A_0)+\Phi(A_1,A)-\\ -\Phi(A_1,A_0)+\Phi(A,A_0)+\Phi(A,A_1)-\Phi(A_0,A_1)).\end{gathered} \tag{21}$$

При $F(A)=\Phi(A,A)$ равенство (16) принимает вид

$$\delta^2F[\tilde{A};\tilde{H}_2\tilde{H}_1]=\Phi(\tilde{H}_1,\tilde{H}_2)+\Phi(\tilde{H}_2,\tilde{H}_1).$$

В частности, при $\tilde{A}=\sigma_{1i}^{01}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}^{01}(\cdot)\right)+\tau s\left(A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{12}(\cdot)\right)$, $\tilde{H}_1=H_{i0}(\cdot)$и $\tilde{H}_2=H_{i1}(\cdot)$будем иметь

$$\begin{gathered}\delta^2F\left[\sigma_{1i}^{01}(\cdot)+\tau\left(A_1(\cdot)-\sigma_{1i}^{01}(\cdot)\right)+\tau s\left(A_2(\cdot)-\sigma_{1i}^{12}(\cdot)\right);H_{i1}(\cdot)H_{i0}(\cdot)\right]=\Phi\left(H_{i0}(\cdot),H_{i1}(\cdot)\right)+\\ +\Phi(H_{i1}(\cdot),H_{i0}(\cdot))=\Phi(A(\cdot)-A_0(\cdot),A(\cdot)-A_1(\cdot))+\Phi(A(\cdot)-A_1(\cdot),A(\cdot)-A_0(\cdot)).\end{gathered}$$

Аналогично предыдущему, вычисляя интеграл в (12), после преобразований будем иметь

$$\begin{gathered}l_{22}(A)=\tfrac{1}{2}(2\Phi(A,A)-\Phi(A_0,A)-\Phi(A,A_1)+\\ +\Phi(A_0,A_1)-\Phi(A_1,A)-\Phi(A,A_0)+\Phi(A_1,A_0)).\end{gathered} \tag{22}$$

Так как $L_1(A)=F(A_0)+l_{11}(A)+l_{12}(A)$, то из равенств (15), (18), (21), (22) следует, что

$$L_2(A)=F(A_0)+\Phi(A,A)-\Phi(A_0,A_0)=F(A). \tag{23}$$

Переобозначим функцию $\Phi(A,B)$ следующим образом

$$\begin{gathered}\Phi(A,B)=\sum_{k=0}^{m}\int_{T^4}P_{k,3}(t,s)\left[A^{(k)}(s_1)-A^{(k)}(s_2)\right]\times\\ \times P_{k,4}(t,s)\left[B^{(k)}(s_3)-B^{(k)}(s_4)\right]P_{k,5}(t,s)ds.\end{gathered}$$

Пусть $F(A)=\Phi(A,A)$, что совпадает с третьим слагаемым в (7). Аналогично предыдущим рассуждениям можно показать, что $F(\sigma_{1i}^{01})-F(A_0)=F(\sigma_{1i}^{21})-F(A_2)=0$, следовательно, $l_{11}(A)=l_{21}(A)=0$. Очевидно, что переобозначенная функция $\Phi(A,B)$ также удовлетворяет свойствам (17) и соотношениям вида (20), поэтому для

$F(A) = \Phi(A, A)$ выполняются равенства (19), (21), (22) и, следовательно, (23). Таким образом, формула (13) точна для многочленов вида (7). Теорема 2 доказана.

## 2. Вычислительный эксперимент

**Пример 1.** Рассмотрим интерполяционную формулу (2) в случае узлов

$$A_0(t) = \begin{bmatrix} t & t^2 \\ t^2 & t^3 \end{bmatrix},\ A_1(t) = \begin{bmatrix} -t^3+\alpha & t^2+\beta \\ t^2+\gamma & -t+\delta \end{bmatrix}$$

для функции $F(A) = e^{A(t)}$, заданной на множестве матриц вида $A(t) = \theta A_0(t) + (1 - -\theta)A_1(t), \theta \in \mathbb{R}$. Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – произвольные числа.

Нетрудно заметить, что при $A(t) = \theta A_0(t) + (1-\theta)A_1(t)$ матрицы $\sigma_{1i}(t) + +\tau(A_1(t) - \sigma_{1i}(t))$ и $H_i(t)$ являются перестановочными, поэтому для $F(A) = e^{A(t)}$ справедливы равенства

$$\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] = H_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)+\tau(A_1(t)-\sigma_{1i}(t))}.$$

Кроме того, т. к. матрицы $A_1(t) - \sigma_{1i}(t) = (t_i + t_i^3 - t - t^3)I$, где $I$ – единичная матрица второго порядка, являются скалярными, то имеют место соотношения

$$e^{\sigma_{1i}(t)+\tau(A_1(t)-\sigma_{1i}(t))} = e^{(t_i+t_i^3-t-t^3)\tau}e^{\sigma_{1i}(t)}.$$

Следовательно

$$\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)]d\tau = \int_0^1 e^{(t_i+t_i^3-t-t^3)\tau}d\tau H_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)} =$$
$$= \frac{1-e^{t_i+t_i^3-t-t^3}}{t+t^3-t_i-t_i^3}(A(t) - A(t_i) + A_0(t_i) - A_0(t))e^{\sigma_{1i}(t)}.$$

Тогда, сделав замену $\alpha_i(t) = \frac{1-e^{t_i+t_i^3-t-t^3}}{t+t^3-t_i-t_i^3}$, будем иметь

$$L_1(A) = e^{A_0(t)} + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n [A(t_i) - A_0(t_i)]\,[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\right] +$$
$$+ \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n \alpha_i(t)(A(t) - A(t_i) + A_0(t_i) - A_0(t))e^{\sigma_{1i}(t)} =$$
$$= A(t)B(t) + \sum_{i=0}^n A(t_i)B_i(t) + C(t),$$

где

$$B(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n \alpha_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)},$$
$$B_i(t) = \frac{1}{n+1}\left([A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\right] - \alpha_i(t)e^{\sigma_{1i}(t)}\right),$$
$$C(t) = e^{A_0(t)} - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n\Big(A_0(t_i)[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\right] +$$
$$+\alpha_i(t)(A_0(t) - A_0(t_i))e^{\sigma_{1i}(t)}\Big).$$

Проверим выполнение интерполяционных условий для формулы $F(A) = e^{[A+B]^{-1}}$. При $A = A_0(t)$ получим

$$L_1(A_0) = A_0(t)B(t) + \sum_{i=0}^n A_0(t_i)B_i(t) + C(t) = e^{A_0(t)} = F(A_0),$$

а при $A = A_1(t)$ будем иметь

$$L_1(A_1) = A_1(t)B(t) + \sum_{i=0}^n A_1(t_i)B_i(t) + C(t) =$$
$$= e^{A_0(t)} + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n\Big(\alpha_i(t)[A_1(t) - A_0(t) + A_0(t_i) - A_1(t_i)]e^{\sigma_{1i}(t)} +$$
$$+[A_1(t_i) - A_0(t_i)][A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}\left[e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\right]\Big).$$

Далее, т. к.

$$\alpha_i(t)[A_1(t) - A_0(t) + A_0(t_i) - A_1(t_i)] = \left(e^{t_i + t_i^3 - t - t^3} - 1\right) I = e^{A_1(t) - \sigma_{1i}(t)} - I,$$

то

$$L_1(A_1) = e^{A_0(t)} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \left[e^{A_1(t)} - e^{\sigma_{1i}(t)} + e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}\right] = e^{A_1(t)} = F(A_1).$$

Таким образом, интерполяционные условия выполняются.

**Заключение**

При решении многих практических задач обычно используются интерполяционные формулы невысоких порядков. Это относится как к случаю интерполяции скалярных функций, так и к задаче операторного интерполирования и вызвано в значительной степени тем, что при увеличении порядка интерполяционных формул значительно усложняется их общий вид, что приводит, соответственно, к более сложной структуре получаемых на их основе алгоритмов. Наряду с построением интерполяционных формул операторного интерполирования невысоких порядков является актуальным исследование данной задачи и для случая формул высших порядков.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. – М., 1975. – 632 с.

REFERENCES

1. Kalitkin, N. N. Chisliennyje mietody / N. N. Kalitkin – M. : Nauka, 1978. – 512 s.
2. Bakhvalov, N. S. Chisliennyje mietody / N. S. Bakhvalov. – M., 1975. – 632 s.

*Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.11.2023*