519.652

Дмитрий Владимирович Грицук
канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Dmitry Gritsuk
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com

ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ, СВЯЗАННЫХ С ОЦЕНКАМИ ПРОИЗВОДНОЙ π-ДЛИНЫ π-РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

Приводится обзор основных результатов, связанных с оценками производной π-длины π-разрешимой группы. В разделе 1 собраны результаты, устанавливающие оценки производной π-длины π-разрешимой группы с заданными ограничениями на силовские подгруппы. Раздел 2 посвящен оценкам производной π-длины π-разрешимой группы, у которой заданы в π-холловы подгруппы. В разделе 3 приводятся результаты, связанные с оценками производной π-длины π-разрешимой группы с ограниченными n-максимальными подгруппами холловых π-групп. В разделе 4 содержится информация о влиянии нормального ранга силовской p-подгруппы p-разрешимой группы на ее производную p-длину.

Ключевые слова: *производная π-длина, π-разрешимая группа, холлова π-группа, силовская p-подгруппа.*

Overview of Results Related to Estimates of the Derivative π-Length of A π-Solvable Group

This article provides an overview of the main results related to estimates of the derivative π-length of a π-solvable group. Section 1 contains results establishing estimates for the derivative π-length of a π-solvable group with given restrictions on Sylow subgroups. Section 2 is devoted to estimates for the derivative π-length of a π-solvable group whose π-Hall subgroups are given. Section 3 presents results related to estimates of the derivative π-length of a π-solvable group with bounded n maximal subgroups of Hall π-groups. Section 4 contains information on the influence of the normal rank of a Sylow p-subgroup p of a solvable group on its derivative p-length

Key words: *derivative π-length, π-solvable group, Hall π-group, Sylow p-subgroup.*

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются обозначения, принятые в книгах [1; 2].

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначается через π'. Группа называется π-группой, если все простые делители порядка группы принадлежат множеству π, и π'-группой – в противном случае.

Ряд подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_m = G \qquad (1)$$

называется субнормальным, если для любого i подгруппа G_i нормальна в G_{i+1}. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами этого ряда. Если в (1) нет совпадающих подгрупп, что число m называется длиной ряда.

Производная длина группы G определяется как длина самого короткого нормального ряда (1) с абелевыми факторами. Эта длина обозначается через $d(G)$. Ясно, что нильпотентная длина не превышает производную длину для любой разрешимой группы. В работе [3] В. С. Монаховым были установлены оценки производной длины разрешимой группы, порядок которой не делится на $(n + 1)$-е степени простых чисел.

Пусть p – простое число. Пусть G – p-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо p-фактором, либо p'-фактором. Наименьшее число p-факторов среди всех таких субнормальных рядов называется p-длиной p-разрешимой группы и обозначается через $l_p(G)$. Данное понятие предложили Ф. Холл и Г. Хигмэн [4] в 1956 г. и установили зависимость p-длины p-разрешимой группы от некоторых инвариантов ее силовской p-подгруппы.

В 2006 г. В. С. Монахов [5] предложил аналог производной длины для π-разрешимой группы – понятие производной π-длины π-разрешимой группы. Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо абелевым π-фактором, либо π'-фактором. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется абелевой π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi = \pi(G)$, значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением нильпотентной длины группы G. Оценкам производной π-длины π-разрешимой группы посвящены работы [6–10].

1. Влияние строения силовских подгрупп на оценки производной π-длины π-разрешимой группы

Теорема 1.1 [6].

1. Если в π-разрешимой группе G силовские p-подгруппы циклические для всех $p \in \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 2$.

2. Если в π-разрешимой группе G силовские p-подгруппы абелевы для всех $p \in \pi$, то $l_\pi^a(G) = d(G_\pi) \leq |\pi(G_\pi)|$.

В 2012 г. в работе [8] была исследована производная π-длина π-разрешимой группы, у которой силовские p-подгруппы бициклические для всех $p \in \pi$.

Теорема. Пусть G – π-разрешимая группа с бициклическими силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 3$;

2) если $2 \in \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 6$.

С учетом того, $d(G_\pi) \leq l_\pi^a(G)$ при $\pi = \pi(G)$, из теоремы 1.1 получаем два следствия.

Следствие 1.2. Если G – разрешимая группа с бициклическими силовскими подгруппами, то $d(G) \leq 6$.

Следствие 1.3. Если G – группа нечетного порядка с метациклическими силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi(G)$, то $d(G) \leq 3$.

Напомним, что число n свободно от m-х степеней, если p^m не делит n для всех простых p. При $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, при $m = 3$ – от кубов.

В. С. Монахов [3] установил, что если порядок разрешимой группы G не делится на $(n+1)$-е степени простых чисел, то производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает $3+n$.

Вполне естественно развить эти результаты на случай π-разрешимой группы. Так, в работе [7, теорема 1] показано, что производная π-длина π-разрешимой группы, силовские p-подгруппы которой являются абелевыми для всех $p \in \pi$, не превышает $|\pi(G_\pi)|$, где G_π – π-холлова подгруппа. Таким образом, если у π-разрешимой группы порядок π-холловой подгруппы G_π свободен от кубов, то ее производная π-длина не превышает $|\pi(G_\pi)|$. В работе [11] получен ряд теорем, устанавливающих оценки производной π-длины π-разрешимой группы, G порядок π-холловой подгруппы которой свободен от n-ых степеней, как в случае произвольного n, так и в случае малых его значений.

Теорема 1.4. Если порядок π-холловой подгруппы π-разрешимой группы G свободен от квадратов, то $l_\pi^a(G) \leq 2$.

Теорема 1.5. Пусть G – π-разрешимая группа. Если порядок π-холловой подгруппы свободен от кубов, то $l_\pi^a(G) \leq 4$. В частноси, если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

Теорема 1.6. Пусть G – π-разрешимая группа. Если небициклические силовские p-подгруппы π-холловой подгруппы группы G, $p \in \pi$, имеют порядки 2^3, 3^3, 2^4, 2^5, то $l_\pi^a(G) \leq 6$. В частности, если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

Теорема 1.7. Пусть G – π-разрешимая группа такая, что порядок любой силовской p-подгруппы P, $p \in \pi$ свободен от n-ых степеней. Тогда, если $\{2,3\} \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq |\pi(G_\pi)| \frac{n+1}{2}$ и, если $\{2,3\} \in \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq |\pi(G_\pi)| \left(\frac{n}{2} + 1\right)$.

2. Оценки производной π-длины π-разрешимой группы производной π-длины в зависимости от строения π-холловой подгруппы

В работе [6] были исследованы основные свойства производной π-длины π-разрешимой группы и получены некоторые оценки в зависимости от строения π-холловой подгруппы. В частности, рассмотрены случаи, когда π-холлова подгруппа является абелевой либо и метабелевой.

Теорема 2.1 [6]. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – ее π-холлова подгруппа.

1. Если G_π абелева, то $l_\pi^a(G) \leq 1$.
2. Если $(G_\pi)' \subseteq Z(G_\pi)$, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

Напомним, что группой Шмидта называют ненильпотентную группу, в которой все собственные подгруппы нильпотентны. Свойства групп Шмидта перечислены, например, в [1, III. 5]. Группа называется дедекиндовой, если все ее подгруппы нормальны.

Следствие 2.2. Если в π-разрешимой группе G – π-холлова подгруппа дедекиндова, то $l_\pi(G) \leq 1$ и $l_\pi^a(G) \leq 2$.

Следствие 2.3. Если в π-разрешимой группе G π-холлова подгруппа является группой Шмидта, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

Напомним, что метабелевой называют группу, у которой коммутант абелев.

Теорема 2.4 [6]. Пусть G – π-разрешимая группа с метабелевой π-холловой подгруппой. Если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

Напомним, что t-группой называют группу, в которой каждая субнормальная подгруппа нормальна. Строение разрешимых t-групп описал В. Гашюц [12]. В частности, разрешимая t-группа сверхразрешима. $\mathfrak{H}$ – класс всех нильпотентных групп, $G^{\mathfrak{H}}$ – $\mathfrak{H}$-корадикал группы G, т. е. пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{H}$. Известно, что если G является t-группой, то $G^{\mathfrak{H}}$ – абелева холлова подгруппа нечетного порядка, все подгруппы из $G^{\mathfrak{H}}$ – нормальны в G, $G^{\mathfrak{H}}$ – дедекиндова.

Теорема 2.5 Если π-холлова подгруппа π-разрешимой группы является t-группой, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

Теорема 2.6 Пусть G – π-разрешимая группа и G_π – π-холлова подгруппа в G. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если G_π является группой Миллера – Морено, то $l_\pi^a(G) \leq 2$;

2) если G_π является группой Шмидта, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

3. Оценки производной π-длины π-разрешимой группы с ограниченными n-максимальными подгруппами холловых π-групп

Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G.

Связь между 2-максимальными подгруппами группы π и структурой группы G исследовалась многими авторами. Наиболее ранние результаты в данном направлении получили Редеи [13], описавший неразрешимые группы с абелевыми 2-максимальными подгруппами, и Хупперт [14], установивший сверхразрешимость группы, в которой все 2-максимальные подгруппы нормальны. Эти результаты породили многие другие исследования в данном направлении. Например, в работах Судзуки [15] и Янко [16] содержится описание конечных неразрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы нильпотентны. Описание разрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы являются нильпотентными, было получено В. А. Белоноговым в работе [17].

В работе [10] были установлены оценки инвариантов π-разрешимых групп с ограниченной максимальной подгруппой π-холловой подгруппы, а в работе [18] получены оценки производной π-длины и нильпотентной π-длины π-разрешимой группы G, у которой 2-максимальная подгруппа в π-холловой подгруппе группы G абелева (нильпотентна).

Группой Миллера – Морено называют неабелеву группу, все собственные подгруппы которой абелевы.

Теорема 3.1. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – π-холлова подгруппа и M – максимальная подгруппа в G_π. Если подгруппа M абелева или является группой Миллера – Морено, то $l_\pi^n(G) \leq 3$ и $l_\pi^a(G) \leq 4$.

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Теорема 3.2. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – π-холлова подгруппа и M – максимальная подгруппа в G_π. Если подгруппа M нильпотентна или является группой Шмидта, то $l_\pi^n(G) \leq 1 + max_{r\in\pi}\, l_r\,(G)$ и $l_\pi^a(G) \leq max_{r\in\pi}\, d\,(G_r)\big(1 + max_{r\in\pi}\, l_r\,(G)\big)$.

Теорема 3.3. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – π-холлова подгруппа и M – 2-максимальная подгруппа в G_π. Если подгруппа M абелева, то $l_\pi^n(G) \leq 3$ и $l_\pi^a(G) \leq 4$.

Теорема 3.4. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – π-холлова подгруппа и M – 2-максимальная подгруппа в G_π. Если подгруппа M нильпотентна, то

$$l_\pi^n(G) \leq 1 + max_{r\in\pi}\, l_r\,(G) \text{ и } l_\pi^a(G) \leq max_{r\in\pi}\, d\,(G_r)\big(1 + max_{r\in\pi}\, l_r\,(G)\big).$$

4. Строение частично разрешимых групп с ограниченным нормальным рангом силовских подгрупп

Напомним, что нормальный ранг $r_n(P)$ конечной p-группы P определяется следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \triangleleft P} \log_p |X/\Phi(X)|,$$

где X пробегает все нормальные подгруппы группы P, в т. ч. и P. Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X. Из теоремы Бернсайда о базисе (теорема III.3.15) [2] следует, что нормальный ранг $r_n(P)$ есть наименьшее натуральное число k такое, что любая нормальная подгруппа p-группы P порождается не более, чем k элементами.

В. С. Монаховым в [19] было установлено, что если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга не выше 3, то p-длина не превышает 2. В частности, если p является нечетным, то p-длина не превышает 1. В работе [20] была исследована производная p-длина p-разрешимой группы в зависимости от строения силовской p-подгруппы. В частности, установлено, что производная p-длина p-разрешимой группы, у которой силовская p-подгруппа абелева, не превышает 1. Если же силовская p-подгруппа является метабелевой и $p > 2$, то производная p-длина не превышает 3.

В работе [8] доказано, что если силовская p-подгруппа p-разрешимой группы бициклическая, то $l_p^a(G) \leq 3$. В частности, $l_p^a(G) \leq 2$ для $p > 2$.

Возникает вопрос о влиянии нормального ранга силовской p-подгруппы p-разрешимой группы на ее производную p-длину. Ответ на данный вопрос был получен в работе [21].

Теорема 4.1 Если нормальный ранг силовской p-подгруппы p-разрешимой группы G не превышает некоторого натурального числа k, то$l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{k^2+k+2}{4}$ для $p \notin \{2,3\}$ и $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \frac{k^2+k+4}{4}$ для $p \in \{2,3\}$.

Очевидно, что p-группа P имеет нормальный ранг 1 тогда и только тогда, когда P – циклическая. Из теоремы III.11.5 [2] следует, что нормальный ранг примерной бициклической группы нечетного порядка не превышает 2. Однако обратное неверно. Так, $r_n(S) = 2$ для экстраспециальной группы S порядка 27, но S не является бициклической. Кроме того, можно показать, что всякая 2-группа нормального ранга ≤ 2 является бициклической.

Из теоремы 4.1 вытекает ряд следствий.

Следствие 4.2. Если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга ≤ 2, то производная p-длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 2.

Следствие 4.3. Если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга ≤ 3, то производная p-длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.

2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York. – 1967. – 792 s.

3. Монахов, В. С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В. С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 411–424.

4. Hall, P. The p-lengh of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, nr 7. – P. 1–42.

5. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов. // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.

6. Грицук, Д. В. О производной π-длине π-разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.

7. Monakhov, V. S. On derived π-length of a finite π-solvable group with supersolvable π-Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, nr 2. – P. 233–241.

8. Грицук, Д. В. О конечных π-разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (15). – С. 61–66.

9. Грицук, Д. В. Зависимость производной p-длины p-разрешимой группы от порядка ее силовской p-подгруппы / Д. В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 58–60.

10. Монахов, В. С. О производной π-длине конечной π-разрешимой группы с заданной π-холловой подгруппой / В. С. Монахов, Д. В. Грицук // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 3. – С. 215–223.

11. Грицук, Д. В. Оценки производной π-длины π-разрешимой группы, у которой π-холловы подгруппы свободны от n-ых степеней / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук,

Т. А. Артюшеня // Вестн. Витеб. гос. ун-та им. П. М. Машерова. – 2018. – № 1 (98). – С. 11–15.

12. Gaschutz, W. Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.

13. Rédei, L. Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen / L. Rédei // Acta Math. – 1950. – T. 84. – S. 129–153.

14. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

15. Suzuki, M. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, nr 4. – P. 686–695.

16. Janko, Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko// Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424.

17. Белоногов, В. А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В. А. Белоногов // Мат. заметки. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 21–32.

18. Грицук, Д. В. Конечные π-разрешимые группы с заданными свойствами 2-максимальных π-подгрупп / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук // Вест. Брест. гос. техн. ун-та. Физика, математика, информатика. – 2017. – № 5 (107). – С. 69–72.

19. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.

20. Грицук, Д. В. Зависимость производной p-длины p-разрешимой группы от порядка ее силовской p-подгруппы / Д. В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 58–60.

21. Грицук, Д. В. Производная p-длина p-разрешимой группы, у которой нормальный ранг силовской p-подгруппы ограничен / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук, Т. В. Бондарук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2018. – № 1. – С. 59–65.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedienije v tieoriju koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk., 2006. – 207 s.

2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York. – 1967. – 792 s.

3. Monakhov, V. S. Ob indeksakh maksimal'nykh podgrupp koniechnykh razrieshimykh grupp / V. S. Monakhov // Algiebra i logika. – 2004. – T. 43, № 4. – S. 411–424.

4. Hall, P. The p-lengh of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, nr 7. – P. 1–42.

5. Monakhov, V. S. Koniechnyje gruppy s polunormal'noj khollovoj podgruppoj / V. S. Monakhov // Mat. zamietki. – 2006. – T. 80, № 4. – S. 573–581.

6. Gricuk, D. V. O proizvodnoj π-dlienie π-razrieshimoj gruppy / D. V. Gricuk, V. S. Monakhov, O. A. Shpyrko // Viestn. BGU. Sier. 1. – 2012. – № 3. – S. 90–95.

7. Monakhov, V.S. On derived π-length of a finite π-solvable group with supersolvable π-Hall subgroup / V.S. Monakhov, D.V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, № 2. – P. 233–241.

8. Gricuk, D. V. O koniechnykh π-razrieshimykh gruppakh s biciklichieskimi silovskimi podgruppami / D. V. Gricuk, V. S. Monakhov, O. A. Shpyrko // Probliemy fiziki, matiematiki i tiekhniki. – 2013. – № 1 (15). – S. 61–66.

9. Gricuk, D. V. Zavisimost' proizvodnoj p-dliny p-razrieshimoj gruppy ot poriadka jejo silovskoj p-podgruppy / D. V. Gricuk // Probliemy fiziki, matiematiki i tiekhniki. – 2014. – № 3 (20). – S. 58–60.

10. Monakhov, V. S. O proizvodnoj π-dlinie koniechnoj π-razrieshimoj gruppy s zadannoj π-khollovoj podgruppoj / V. S. Monakhov, D. V. Gricuk // Tr. In-ta matiematiki i miekhaniki UrO RAN. – 2013. – T. 19, № 3. – S. 215–223.

11. Gricuk, D. V. Ocenki proizvodnoj π-dliny gruppy, u kotoroj π-kholovy podgruppy svobodny ot n-ykh stiepieniej / D. V. Gricuk, A. A. Trofimuk, T. A. Artiushenia // Viestn. Vitieb. gos. un-ta im. P. M. Masherova. – 2018. – № 1 (98). – S. 11–15.

12. Gaschutz, W. Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.

13. Rédei, L. Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen / L. Rédei // Acta Math. – 1950. – T. 84. – S. 129–153.

14. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

15. Suzuki, M. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, nr 4. – P. 686–695.

16. Janko, Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko// Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424.

17. Bielonogov, V. A. Koniechnyje razrieshimyje gruppy s nil'potentnymi 2-maksimal'nymi podgruppami / V. A. Bielonogov // Mat. zamietki. – 1968. – T. 3, № 1. – S. 21–32.

18. Gricuk, D. V. Koniechnyje π-razrieshimyje gruppy s zadannymi svojstvami 2-maksimal'nykh π-podgrupp / D. V. Gricuk, A. A. Trofimuk // Viestn. Briest. gos. tiekhn. un-ta. Fizika, matiematika, informatika. – 2017. – № 5 (107). – S. 69–72.

19. Monakhov, V. S. O razrieshimykh koniechnykh gruppakh s silovskimi podgruppami malogo ranga / V. S. Monakhov // Dokl. Nac. akad. nauk Bielarusi. – 2002. – T. 46, № 2. – S. 25–28.

20. Gricuk, D. V. Zavisimost' proizvodnoj p-dliny p-razrieshimoj gruppy ot poriadka jejo silovskoj p-podgruppy / D. V. Gricuk // Probliemy fiziki, matiematiki i tiekhniki. – 2014. – № 3 (20). – S. 58–60.

21. Gricuk, D. V. Proizvodnaja p-dlina p-razrieshimoj gruppy, u kotoroj normal'nyj rang silovskoj p-podgruppy ogranichien / D. V. Gricuk, A. A. Trofimuk, T. V. Bondaruk // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2018. – № 1. – S. 59–65.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 18.11.2023