

УДК 512.542

Наталья Витальевна Артёменко
*магистрант физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*
Natalia Artemenko
*Master Student of the Faculty of Physics and Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University*
email: artemenkonatasha@outlook.com

О ПРОИЗВОДНОЙ ДЛИНЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП, ФАКТОРИЗУЕМЫХ ТОТАЛЬНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ*

Длину самого короткого нормального ряда группы G с абелевыми факторами называют производной длиной группы G и обозначают $d(G)$. Установлена зависимость производной длины конечной факторизуемой группы от производной длины тотально перестановочных сомножителей.

Ключевые слова: производная длина, тотально перестановочные подгруппы, факторизуемые группы.

On the Derived Length of Finite Groups Factorized by Totally Permutable Subgroups

The length of the shortest normal series of a group G with Abelian factors is called the derived length of the group G and is denoted by $d(G)$. The dependence of the derived length of a finite factorizable group on the derived length of totally permutable factors was established.

Key words: derived length, totally permutable subgroups, factorizable groups.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Группа G называется *факторизуемой* подгруппами A и B , если она представима в виде их произведения, т. е. $G = AB$. Сами подгруппы A и B в произведении $G = AB$ в дальнейшем будем называть *сомножителями*.

Разница между произведением подгрупп и прямым произведением велика: если взять два элемента x и y (или две подгруппы X и Y) из сомножителей произведения, то между ними может и не быть непосредственной связи. Однако в прямом произведении они перестановочны. Поэтому для создания промежуточной ситуации представляется целесообразным рассматривать произведение подгрупп, в которых элементы (или подгруппы) различных сомножителей связаны определенными соотношениями.

Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Подгруппы A и B группы G называются *тотально перестановочными* [2], если каждая подгруппа из A перестановочна с каждой подгруппой из B .

В 1989 г. М. Асаад и А. Шаалан [3] изучили факторизуемые группы $G = AB$ такие, что A и B тотально перестановочны. В частности, ими была установлена сверхразрешимость таких групп G при условии, что сомножители A и B сверхразрешимы. Дальнейшее исследование произведений тотально перестановочных подгрупп проводилось многими авторами. В полной мере результаты их исследований отражены в монографии А. Баллестера-Болинше с соавторами [4].

**Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», № госрегистрации 20211467).*

Характерной особенностью изучения конечных факторизуемых групп является их тесная связь с теорией числовых инвариантов (под числовыми инвариантами группы понимают такие ее числовые характеристики, как производная длина, нильпотентная длина и др.

Ф. Гросс [5] доказал, что производная длина $d(G/\Phi(G))$ группы $G = AB$, где A и B нильпотентны, ограничена суммой степеней нильпотентности A и B . Л. С. Казарин [6] установил, что если разрешимая группа $G = AB$ является произведением двух подгрупп A и B взаимно простых порядков, то производная длина группы G ограничена сверху выражением $2d(A)d(B) + d(A) + d(B)$.

Установление зависимостей между числовыми инвариантами факторизуемых групп и числовыми инвариантами сомножителей, подгруппы из которых связаны между собой некоторыми условиями перестановочности, относится к кругу актуальных проблем современной теории конечных групп. Так, например, Дж. Косси [7] актуализировал для исследования следующую задачу: *Можно ли оценить производную длину разрешимой факторизуемой группы через числовые инварианты ее сомножителей?* В этом направлении также стоит выделить работы Дж. Косси и И. Ли [8], Е. Джабары [9].

В данной работе найдена зависимость между производной длиной конечной факторизуемой группы и производной длиной тотально перестановочных сомножителей. Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $G = AB$, где A и B – тотально перестановочные разрешимые подгруппы группы G . Тогда $d(G/\Phi(G)) \leq \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Вспомогательные результаты

Напомним некоторые понятия и обозначения, существенные для данной работы. Через Z_n обозначим циклическую группу порядка n .

Для группы G можно построить цепочку коммутантов

$$G \supseteq G' \supseteq (G')' \supseteq G^{(i)} \supseteq G^{(i+1)} \supseteq \dots$$

Здесь G' – коммутант группы G и $G^{(i+1)} = (G^{(i)})'$. Если существует номер n такой, что $G^{(n)} = 1$, то группа G называется *разрешимой*. Наименьшее натуральное n , для которого $G^{(n)} = 1$, называется *производной длиной* группы G и обозначается через $d(G)$.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций. [1].

Класс \mathfrak{F} называется *замкнутым относительно фактор-групп*, или *гомоморфом*, когда выполняется требование: если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$.

Класс \mathfrak{F} называется *замкнутым относительно подпрямых произведений*, когда выполняется требование: если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Формацией называется класс, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений.

Формация \mathfrak{F} называется *насыщенной*, если из $G/F(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть \mathfrak{F} – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – \mathfrak{F} -*корадикал* группы G , т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций \mathfrak{F} и \mathfrak{H} состоит из всех групп G , для которых \mathfrak{H} -корадикал принадлежит формации \mathfrak{F} . Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формации всех абелевых, нильпотентных и сверхразрешимых групп обозначаются через \mathfrak{A} , \mathfrak{N} и \mathfrak{U} . Очевидно, что $G \in \mathfrak{A}^k$ тогда и только тогда, когда $d(G) \leq k$.

Напомним, что подгруппы A и B называются *взаимно перестановочными*, если A перестановочна с каждой подгруппой из B , а B перестановочна с каждой подгруппой из A .

Лемма 1. [4, теорема 4.1.15] Пусть $G = AB$, где A и B – взаимно перестановочные подгруппы группы G . Если A и B – разрешимые, то G так же разрешима.

Лемма 2. [4, теорема 4.1.10] Пусть $G = AB$, где A и B – взаимно перестановочные подгруппы группы G . Если N нормальная подгруппа группы G , то G/N представима в виде произведения взаимно перестановочных подгрупп AN/N и BN/N .

Лемма 3. [4, теорема 4.3.3] Пусть $G = AB$, где A и B – взаимно перестановочные подгруппы группы G . Тогда:

(1) Если N – минимальная нормальная подгруппа группы G , то $\{N \cap B, N \cap A\} = \{1, N\}$.

(2) Если N минимальная нормальная подгруппа группы G , N содержится в A и $B \cap N = 1$, то $N \leq C_G(A)$ или $N \leq C_G(B)$. Если N не является циклической, то $N \leq C_G(B)$.

Лемма 4. [4, теорема 4.3.9] Пусть $G = AB$, где A и B – взаимно перестановочные подгруппы группы G . Если N – минимальная нормальная подгруппа группы G и $N \cap A = N \cap B = 1$, то $|N| = p$, где p – простое, $N \leq C_G(A)$ или $N \leq C_G(B)$.

Лемма 5. [1, лемма 4.7 (4)] Пусть G – группа, $A, B \leq G$. То $[A, B] \leq A$ тогда и только тогда, когда $B \leq N_G(A)$.

Лемма 6. [10, следствие 2] Пусть $G = AB$, где A и B – тотально перестановочные подгруппы группы G . Тогда $[A, B] \leq F(G)$.

Лемма 7. [4, теорема 4.2.10] Пусть $G = AB$, где A и B – тотально перестановочные подгруппы группы G . Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, содержащая формацию \mathfrak{U} . Если A и B принадлежат \mathfrak{F} , то G принадлежит \mathfrak{F} .

Лемма 8 [11, лемма 7] Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^{k+1}$, когда $G \in \mathfrak{NA}^k$.

Лемма 9. Пусть $G = AB$, где A и B – тотально перестановочные подгруппы группы G . Если A и B метабелевы, то $d(G/\Phi(G)) \leq 2$.

Доказательство.

Условие $d(G/\Phi(G)) \leq 2$ равносильно тому, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^2$ или $G \in \mathfrak{NA}$ по лемме 8. Так как $A, B \in \mathfrak{A}^2 \subseteq \mathfrak{NA}$, то по лемме 7 $G \in \mathfrak{NA}$, т. к. $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{NA}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы

Так как A и B разрешимы, то по лемме 1 группа G разрешима.

Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Рассмотрим фактор-группу $(G/\Phi(G))/(\Phi(G/\Phi(G)))$. По лемме 2 можно утверждать, что

$$d((G/\Phi(G))/(\Phi(G/\Phi(G)))) \leq \max\{2, d(A\Phi(G)/\Phi(G)), d(B\Phi(G)/\Phi(G))\}.$$

Так как $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$, то $(G/\Phi(G))/(\Phi(G/\Phi(G))) \simeq G/\Phi(G)$. Тогда

$$d(G/\Phi(G)) \leq \max\{2, d(A\Phi(G)/\Phi(G)), d(B\Phi(G)/\Phi(G))\}.$$

По свойству производной длины $d(G/N) \leq d(G)$. Поэтому $d(A\Phi(G)/\Phi(G)) \leq d(A)$ и $d(B\Phi(G)/\Phi(G)) \leq d(B)$. Тогда получаем, что $d(G/\Phi(G)) \leq \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Поэтому будем считать, что $\Phi(G) = 1$, и докажем, что $d(G) \leq \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Предположим, что в группе G существует две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2 . Тогда $G \cong G / (N_1 \cap N_2)$ изоморфна подгруппе группы $G / N_1 \times G / N_2$. Тогда

$$d(G / N_1) \leq \max\{2, d(AN_1 / N_1), d(BN_1 / N_1)\} \leq \max\{2, d(A), d(B)\}.$$

Аналогично, $d(G / N_2) \leq \max\{2, d(AN_2 / N_2), d(BN_2 / N_2)\} \leq \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Получаем $d(G) \leq \max\{d(G / N_1), d(G / N_2)\} \leq \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Таким образом, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N и $N = F(G)$. Получаем $d(G / N) \leq \max\{2, d(AN / N), d(BN / N)\}$.

По лемме 3 (1), $\{N \cap B, N \cap A\} = \{1, N\}$.

Если $N \leq A$ и $N \cap B = 1$ ($N \leq B$ и $N \cap A = 1$), то по лемме 3 (2) $N \leq C_G(B)$ ($N \leq C_G(A)$) при условии, что $|N| \neq p$. Тогда $B \leq C_G(N) = N$ (или $A \leq C_G(N) = N$). Противоречие. Если $|N| = p$, то G / N изоморфна подгруппе группы Z_{p-1} . Следовательно, G – метабелева и $d(G) \leq 2 \leq \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Если $N \cap A = 1$ и $N \cap B = 1$, то по лемме 4 $|N| = p$. По доказанному выше, G – метабелева и $d(G) \leq 2 \leq \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Если $N \leq A \cap B$, то $d(G / N) \leq \max\{2, d(A / N), d(B / N)\}$.

По лемме 6 $[A, B] \leq F(G) = N \leq A$. Тогда по лемме 5 $B \leq N_G(A)$. Так как $G = AB$, то $A \triangleleft G$. Аналогично, $B \triangleleft G$.

Пусть $d(A) = s$ и $d(B) = k$. Тогда существует нормальный ряд $1 = A^{(s)} < A^{(s-1)} < \dots < A' < A$. Так как $A \triangleleft G$ и $A' \text{ char } A$, то $A' \triangleleft G$. Очевидно, что $A^{(s-1)} \triangleleft G$. Так как $(A^{(s-1)})' = A^{(s)} = 1$, то $A^{(s-1)} \in \mathfrak{A}$ и, следовательно, $A^{(s-1)} \leq F(G) = N$. Можно сделать вывод, что $A^{(s-1)} = N$. Тогда

$$d(A / N) = d(A / A^{(s-1)}) \leq s - 1 = d(A) - 1.$$

Рассуждая аналогично, получим

$$d(B / N) = d(B / B^{(k-1)}) \leq k - 1 = d(B) - 1.$$

Таким образом, $d(G / N) \leq \max\{2, d(A / N), d(B / N)\} \leq \max\{2, d(A) - 1, d(B) - 1\}$.

Предположим, что $d(A) > 2$ или $d(B) > 2$. Пусть $d(A) > 2$. Тогда $d(A) - 1 \geq 2$. Если $d(B) \leq d(A)$, то $d(B) - 1 \leq d(A) - 1$. Тогда

$$d(G / N) \leq \max\{2, d(A) - 1, d(B) - 1\} = \max\{2, d(A) - 1\} = d(A) - 1 = \max\{2, d(A), d(B)\} - 1.$$

Если $d(B) > d(A)$, то $d(B) - 1 > d(A) - 1$. Тогда

$$d(G / N) \leq \max\{2, d(A) - 1, d(B) - 1\} = \max\{2, d(B) - 1\} = d(B) - 1 = \max\{2, d(A), d(B)\} - 1.$$

Таким образом, в этом случае можно считать $d(G / N) \leq \max\{2, d(A), d(B)\} - 1$.

Предположим, что $d(A) \leq 2$ и $d(B) \leq 2$. Тогда подгруппы A и B – метабелевы и по лемме 9 $d(G) \leq 2 \leq \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Таким образом, $d(G) \leq d(N) + d(G / N) = 1 + \max\{2, d(A), d(B)\} - 1$, а, следовательно, $d(G) \leq \max\{2, d(A), d(B)\}$.

Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – С. 207.
2. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
3. Carocca, A. p-supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Mathematical Journal. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.
4. Ballester-Bolinches, A. Products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, Esteban-R. Romero, M. Asaad. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 2010. – P. 334.
5. Gross, F. Finite groups which are the product of two nilpotent subgroups / F. Gross // Bull. Aust. Math. Soc. – 1973. – Vol. 9. – P. 267–274.
6. Kazarin, L. S. Soluble products of groups / L. S. Kazarin // Infinite Groups 94 (Ravello), 1996.
7. Cossey, J. Soluble products of finite groups / J. Cossey // Note Mat. – 2010. – Vol. 30. – P. 1–7.
8. Cossey, J. On the p-length of the mutually permutable product of two p-soluble groups / J. Cossey, Y. Li // Arch. Math. – 2018. – Vol. 110. – P. 533–537.
9. Jabara, E. The Fitting length of a product of mutually permutable finite groups / E. Jabara // Acta Math. Hungar. – 2019. – Vol. 159. – P. 206–210.
10. Beidleman, J. C. Totally permutable torsion groups / J. C. Beidleman, H. Heineken // J. Group Theory. – 1999. – Vol. 2. – P. 377–392.
11. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedeniye v teoriyu koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk., 2006. – S. 207.
2. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
3. Carocca, A. p-supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Mathematical Journal. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.
4. Ballester-Bolinches, A. Products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, Esteban-R. Romero, M. Asaad. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 2010. – P. 334.
5. Gross, F. Finite groups which are the product of two nilpotent subgroups / F. Gross // Bull. Aust. Math. Soc. – 1973. – Vol. 9. – P. 267–274.
6. Kazarin, L. S. Soluble products of groups / L. S. Kazarin // Infinite Groups 94 (Ravello), 1996.
7. Cossey, J. Soluble products of finite groups / J. Cossey // Note Mat. – 2010. – Vol. 30. – P. 1–7.
8. Cossey, J. On the p-length of the mutually permutable product of two p-soluble groups / J. Cossey, Y. Li // Arch. Math. – 2018. – Vol. 110. – P. 533–537.
9. Jabara, E. The Fitting length of a product of mutually permutable finite groups / E. Jabara // Acta Math. Hungar. – 2019. – Vol. 159. – P. 206–210.
10. Beidleman, J. C. Totally permutable torsion groups / J. C. Beidleman, H. Heineken // J. Group Theory. – 1999. – Vol. 2. – P. 377–392.
11. Monakhov, V. S. O koniechnykh razrieshimykh gruppakh fiksirovannogo ranga / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Sib. mat. zhurn. – 2011. – T. 52, № 5. – S. 1123–1137.