

УДК 539.12

**Ольга Александровна Семенюк<sup>1</sup>, Алина Валентиновна Ивашкевич<sup>2</sup>,  
Владимир Анестиевич Плетюхов<sup>3</sup>, Виктор Михайлович Редьков<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>аспирант 2-го года обучения Центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики  
Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

<sup>2</sup>аспирант 3-го года обучения Центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики  
Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

<sup>3</sup>д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>4</sup>д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник

Центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики

Института физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси

**Olga Semenyuk<sup>1</sup>, Alina Ivashkevich<sup>2</sup>, Vladimir Pletyukhov<sup>3</sup>, Victor Red'kov<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>2nd Year Postgraduate Student of B. I. Stepanov Institute of Physics  
of National Academy of Sciences of Belarus

<sup>2</sup>3rd Year Postgraduate Student of B. I. Stepanov Institute of Physics  
of National Academy of Sciences of Belarus

<sup>3</sup>PhD (Physics and Mathematics), Professor,

Professor of the Department of General and Theoretical Physics  
of Brest State A. S. Pushkin University

<sup>4</sup>PhD (Physics and Mathematics),

Chief Researcher of the Center Fundamental Interactions and Astrophysics  
of the B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus

e-mail: <sup>1</sup>olya.vasiluyk.97@yandex.by; <sup>2</sup>ivashkevich.alina@yandex.by;

<sup>3</sup>vladimir.pletyukhov@yandex.by; <sup>4</sup>v.redkov@ifanbel.bas-net.by

## БЕЗМАССОВЫЙ ПРЕДЕЛ В УРАВНЕНИИ ШТЮКЕЛЬБЕРГА. ДЕКАРТОВЫЕ КООРДИНАТЫ

Анализируются возможности описания различных частиц со спином 1 на основе использования обобщенной системы уравнений. В работе исследуется безмассовое поле Штюкельберга и его связь с системой уравнений Озиевского – Полубаринова для нотофа. Среди 11-ти компонент полевой функции Штюкельберга антисимметричный тензор представляет калибровочные компоненты, а скаляр и вектор соответствуют физически наблюдаемым величинам. Показано, что в декартовых координатах существуют пять линейно независимых решений, описывающих разные состояния частицы Штюкельберга.

**Ключевые слова:** безмассовое поле Штюкельберга, нотоф, декартовые координаты, точные решения.

### *Massless limit in the Stuckelberg Equation. Cartesian symmetries*

In the paper, possibilities to describe different vector particle on the base of the using generalized system of equations are analyzed. Mainly we study the massless Stuckelberg field. and its connection to Ogievetsky – Polubarinov equations for notoph. Among the 11 components of the field, the antisymmetric tensor  $\Psi_{ab}$  corresponds to gauge variables, whereas the scalar and vector  $\Psi$ ,  $\Psi_a$  represent physically observable quantities. In Cartesian coordinates, exists five linearly independent solutions, describing different states of the Stuckelberg particle.

**Key words:** massless Stuckelberg field, notoph, Cartesian symmetries, exact solutions.

### **Введение**

#### **Безмассовый предел в уравнении Штюкельберга**

Как известно, самая простая система релятивистских инвариантных линейных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая свободную микро-частицу со спином 1, имеет вид

$$\partial^b \psi_{ab} + d\psi_a = 0, \quad (1.1)$$

$$-\partial_a \psi_b + \partial_b \psi_a + \beta \psi_{ab} = 0, \quad (1.2)$$

где  $\psi_a$  – 4-вектор ( $a, b = 0, 1, 2, 3$ );  $\psi_{ab}$  – антисимметричный тензор второго ранга;  $\alpha, \beta$  – произвольные вещественные параметры. Здесь мы используем метрику  $g_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , так что  $\partial^0 = \partial_0$ ,  $\partial^i = -\partial_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Эта система включает в себя в качестве частных случаев три различные физически неэквивалентные теории.

Так, полагая в (1.1), (1.2)

$$\alpha = \beta = m \neq 0, \quad (1.3)$$

получим систему уравнений Даффина – Кеммера для векторной частицы с ненулевой массой

$$\partial^b \psi_{ab} + m\psi_a = 0, \quad -\partial_a \psi_b + \partial_b \psi_a + m\psi_{ab} = 0. \quad (1.4)$$

Если выбрать  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ , то придем к 10-мерной формулировке теории Максвелла, описывающей фотон – безмассовый микрообъект со спиральностью  $\pm 1$ :

$$\partial^b \psi_{ab} = 0, \quad -\partial_a \psi_b + \partial_b \psi_a + \psi_{ab} = 0. \quad (1.5)$$

Наконец, при задании параметров  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  будем иметь систему

$$\partial^b \psi_{ab} + \psi_a = 0, \quad \partial_b \psi_a - \partial_a \psi_b = 0, \quad (1.6)$$

которая описывает подобный нотофу Огиевского – Полубаринова [3] безмассовый микрообъект со спиральностью 0, однако переносящий во взаимодействиях спин 1. В дальнейшем, следуя терминологии работы [4], будем называть этот микрообъект дуальным нотофом.

Одним из существенных отличий безмассовых систем (1.5) и (1.6) от системы Даффина – Кеммера (1.4) является то, что в (1.5), (1.6) часть компонент волновой функции  $\psi_A = (\psi_a, \psi_{ab})$  являются ненаблюдаемыми (потенциалы), а часть – наблюдаемыми (напряженности). Так, в системе (1.5) в качестве потенциалов выступают компоненты вектора  $\psi_a$ , в качестве напряженности – компоненты тензора  $\psi_{ab}$ , при этом первое уравнение называется уравнением движения, а второе позволяет выразить напряженности через потенциалы. В системе (1.6), наоборот, потенциалами являются компоненты тензора  $\psi_{ab}$ , а в качестве напряженности выступает вектор  $\psi_a$ .

Более широкие возможности для описания как массивных, так и безмассовых микрообъектов с максимальным спином  $s = 1$  предоставляет система уравнений первого порядка

$$\partial^a \psi_a + \alpha \psi = 0, \quad (1.7)$$

$$\partial^b \psi_{ab} + \partial_a \psi + \beta \psi_a = 0, \quad (1.8)$$

$$-\partial_a \psi_b + \partial_b \psi_a + \gamma \psi_{ab} = 0, \quad (1.9)$$

которая помимо вектора  $\psi_a$  и тензора  $\psi_{ab}$  содержит скалярную функцию  $\psi$ .

В случае, когда ни один из параметров  $\alpha, \beta, \gamma$  в этой системе не равен нулю, она описывает (гипотетический) микрообъект с переменным спином  $s = 0, 1$  и двумя

значениями массы  $m_1 = \sqrt{\alpha\beta}$ ,  $m_2 = \sqrt{\beta\gamma}$ , причем масса  $m_1$  относится к спину 0, а масса  $m_2$  – к спину 1. При  $\alpha = \gamma$  получаем теорию микрообъекта с переменным спином  $s = 0, 1$  и одной массой.

Если в (1.7) – (1.9) положить

$$\alpha = 0, \quad \beta = \gamma = m, \quad (1.10)$$

то получим систему уравнений

$$\partial^a \psi_a = 0, \quad (1.11)$$

$$\partial^b \psi_{ab} + \partial_a \psi + m \psi_a = 0, \quad (1.12)$$

$$-\partial_a \psi_b + \partial_b \psi_a + m \psi_{ab} = 0. \quad (1.13)$$

Эта система, как и уравнения Даффина – Кеммера (1.4), описывает микрочастицу с ненулевой массой и спином 1, но содержит большее, чем (1.4), число уравнений и компонент волновой функции. Данный вариант теории массивной векторной частицы известен в литературе как подход Штюкельберга [5; 6; 7–11]).

Безмассовый предел системы (1.11) – (1.13) имеет вид

$$\partial^a \psi_a = 0, \quad (1.14)$$

$$\psi_a = \partial_a \psi + \partial^b \psi_{ab}, \quad (1.15)$$

$$-\partial_a \psi_b + \partial_b \psi_a = 0. \quad (1.16)$$

Из (1.15) – (1.17) несложно получить уравнения второго порядка

$$\partial^a \partial_a \psi = 0, \quad \partial^a \partial_a \psi_a = 0, \quad (1.17)$$

которые указывают на то, что система (1.14) – (1.16) действительно описывает безмассовый микрообъект. В дальнейшем будем называть его безмассовым полем Штюкельберга.

Исследование возможных решений этой системы уравнений в декартовой системе координат является целью настоящей работы.

### Декартовые координаты

Итак, рассматриваем систему дифференциальных уравнений первого порядка (1.14) – (1.16). Величины  $\psi_a$  здесь будем трактовать как наблюдаемые (напряженности),  $\psi$  и  $\psi_{ab}$  – как ненаблюдаемые (потенциалы).

Выражая вектор напряженности  $\psi_a$  из уравнения (1.16) и подставляя полученное выражение в (1.17), придем к следующему уравнению второго порядка для тензор потенциала  $\psi_{ab}$ :

$$\partial_a \partial^c \psi_{bc} - \partial_b \partial^c \psi_{ac} = 0. \quad (2.1)$$

Рассматривая случай плоских волн, используем подстановки

$$\psi = f e^{-iex^0} e^{ik^1 x^1} e^{ik^2 x^2} e^{ik^3 x^3}, \quad (2.2)$$

$$\psi_a = f_a e^{-iex^0} e^{ik^1 x^1} e^{ik^2 x^2} e^{ik^3 x^3}, \quad (2.3)$$

$$\psi_{ab} = f_{ab} e^{-iex^0} e^{ik^1 x^1} e^{ik^2 x^2} e^{ik^3 x^3}. \quad (2.4)$$

Тогда уравнения (1.15) – (1.16) дают

$$\partial^a \partial_a \psi = 0 \Rightarrow (\varepsilon^2 - k_j k_j) \stackrel{=0}{=} f = 0 \Rightarrow f - \text{любое}, \quad (2.5)$$

$$\psi_a = \partial_a \psi + \partial_0 \psi_{a0} - \partial_1 \psi_{a1} - \partial_2 \psi_{a2} - \partial_3 \psi_{a3} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} if_0 &= \varepsilon f - k_1 E_1 - k_2 E_2 - k_3 E_3, \quad if_1 = k_1 f - \varepsilon E_1 + k_3 B_2 - k_2 B_3, \\ if_2 &= k_2 f - \varepsilon E_2 + k_1 B_3 - k_3 B_1, \quad if_3 = k_3 f - \varepsilon E_3 + k_2 B_1 - k_1 B_2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Запишем уравнение (2.1) в развернутом виде

$$\begin{aligned} \partial_0(\partial_0 \psi_{01} - \partial_1 \psi_{11} - \partial_2 \psi_{21} - \partial_3 \psi_{31}) - \partial_1(\partial_0 \psi_{00} - \partial_1 \psi_{10} - \partial_2 \psi_{20} - \partial_3 \psi_{30}) &= 0, \\ \partial_0(\partial_0 \psi_{02} - \partial_1 \psi_{12} - \partial_2 \psi_{22} - \partial_3 \psi_{32}) - \partial_2(\partial_0 \psi_{00} - \partial_1 \psi_{10} - \partial_2 \psi_{20} - \partial_3 \psi_{30}) &= 0, \\ \partial_0(\partial_0 \psi_{03} - \partial_1 \psi_{13} - \partial_2 \psi_{23} - \partial_3 \psi_{33}) - \partial_3(\partial_0 \psi_{00} - \partial_1 \psi_{10} - \partial_2 \psi_{20} - \partial_3 \psi_{30}) &= 0, \\ \partial_2(\partial_0 \psi_{03} - \partial_1 \psi_{13} - \partial_2 \psi_{23} - \partial_3 \psi_{33}) - \partial_3(\partial_0 \psi_{02} - \partial_1 \psi_{12} - \partial_2 \psi_{22} - \partial_3 \psi_{32}) &= 0, \\ \partial_3(\partial_0 \psi_{01} - \partial_1 \psi_{11} - \partial_2 \psi_{21} - \partial_3 \psi_{31}) - \partial_1(\partial_0 \psi_{03} - \partial_1 \psi_{13} - \partial_2 \psi_{23} - \partial_3 \psi_{33}) &= 0, \\ \partial_1(\partial_0 \psi_{02} - \partial_1 \psi_{12} - \partial_2 \psi_{22} - \partial_3 \psi_{32}) - \partial_2(\partial_0 \psi_{01} - \partial_1 \psi_{11} - \partial_2 \psi_{21} - \partial_3 \psi_{31}) &= 0. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \partial_0 \partial_0 \psi_{01} - \partial_0 \partial_2 \psi_{21} - \partial_0 \partial_3 \psi_{31} + \partial_1 \partial_1 \psi_{10} + \partial_1 \partial_2 \psi_{20} + \partial_1 \partial_3 \psi_{30} &= 0, \\ \partial_0 \partial_0 \psi_{02} - \partial_0 \partial_1 \psi_{12} - \partial_0 \partial_3 \psi_{32} + \partial_2 \partial_1 \psi_{10} + \partial_2 \partial_2 \psi_{20} + \partial_2 \partial_3 \psi_{30} &= 0, \\ \partial_0 \partial_0 \psi_{03} - \partial_0 \partial_1 \psi_{13} - \partial_0 \partial_2 \psi_{23} + \partial_3 \partial_1 \psi_{10} + \partial_3 \partial_2 \psi_{20} + \partial_3 \partial_3 \psi_{30} &= 0, \\ \partial_2 \partial_0 \psi_{03} - \partial_2 \partial_1 \psi_{13} - \partial_2 \partial_2 \psi_{23} - \partial_3 \partial_0 \psi_{02} + \partial_3 \partial_1 \psi_{12} + \partial_3 \partial_3 \psi_{32} &= 0, \\ \partial_3 \partial_0 \psi_{01} - \partial_3 \partial_2 \psi_{21} - \partial_3 \partial_3 \psi_{31} - \partial_1 \partial_0 \psi_{03} + \partial_1 \partial_1 \psi_{13} + \partial_1 \partial_2 \psi_{23} &= 0, \\ \partial_1 \partial_0 \psi_{02} - \partial_1 \partial_1 \psi_{12} - \partial_1 \partial_3 \psi_{32} - \partial_2 \partial_0 \psi_{01} + \partial_2 \partial_2 \psi_{21} + \partial_2 \partial_3 \psi_{31} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставляя (2.4) в (2.7) и используя очевидные замены

$$\partial_0 \Rightarrow -i\varepsilon, \quad \partial_j \Rightarrow -ik_j, \quad \partial_0 \partial_0 \Rightarrow -\varepsilon^2, \quad \partial_j \partial_i \Rightarrow -k_j k_i,$$

получим следующую систему из шести линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 f_{01} - \varepsilon k_2 f_{21} - \varepsilon k_3 f_{31} + k_1 k_1 f_{10} + k_1 k_2 f_{20} + k_1 k_3 f_{30} &= 0, \\ \varepsilon^2 f_{02} - \varepsilon k_1 f_{12} - \varepsilon k_3 f_{32} + k_1 k_2 f_{10} + k_2 k_2 f_{20} + k_2 k_3 f_{30} &= 0, \\ \varepsilon^2 f_{03} - \varepsilon k_1 f_{13} - \varepsilon k_2 f_{23} + k_3 k_1 f_{10} + k_3 k_2 f_{20} + k_3 k_3 f_{30} &= 0, \\ \varepsilon k_2 f_{03} - k_2 k_1 f_{13} - k_2 k_2 f_{23} - \varepsilon k_3 f_{02} + k_3 k_1 f_{12} + k_3 k_3 f_{32} &= 0, \\ \varepsilon k_3 f_{01} - k_3 k_2 f_{21} - k_3 k_3 f_{31} - \varepsilon k_1 f_{03} + k_1 k_1 f_{13} + k_1 k_2 f_{23} &= 0, \\ \varepsilon k_1 f_{02} - k_1 k_1 f_{12} - k_1 k_3 f_{32} - \varepsilon k_2 f_{01} + k_2 k_2 f_{21} + \partial_2 \partial_3 f_{31} &= 0; \end{aligned} \quad (2.8)$$

Введем для величин  $f_{ab}$  по аналогии с электродинамикой обозначения

$$f_{01} = E_1, \quad f_{02} = E_2, \quad f_{03} = E_3, \quad f_{23} = B_1, \quad f_{31} = B_2, \quad f_{12} = B_3 \quad (2.9)$$

и перепишем систему (2.8) в виде

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon^2 - k_1 k_1) E_1 - k_1 k_2 E_2 - k_1 k_3 E_3 - \varepsilon k_3 B_2 + \varepsilon k_2 B_3 &= 0, \\
 -k_1 k_2 E_1 + (\varepsilon^2 - k_2 k_2) E_2 - k_2 k_3 E_3 + \varepsilon k_3 B_1 - \varepsilon k_1 B_3 &= 0, \\
 -k_3 k_1 E_1 - k_3 k_2 E_2 + (\varepsilon^2 - k_3 k_3) E_3 - \varepsilon k_2 B_1 + \varepsilon k_1 B_2 &= 0, \\
 -\varepsilon k_3 E_2 + \varepsilon k_2 E_3 - (k_2 k_2 + k_3 k_3) B_1 + k_2 k_1 B_2 + k_3 k_1 B_3 &= 0, \\
 \varepsilon k_3 E_1 - \varepsilon k_1 E_3 + k_1 k_2 B_1 - (k_3 k_3 + k_1 k_1) B_2 + k_3 k_2 B_3 &= 0, \\
 -\varepsilon k_2 E_1 + \varepsilon k_1 E_2 + k_1 k_3 B_1 + k_2 k_3 B_2 - (k_1 k_1 + k_2 k_2) B_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Представим систему (2.10) в матричной форме:

$$A \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 - k_1^2 & -k_1 k_2 & -k_1 k_3 & 0 & -\varepsilon k_3 & \varepsilon k_2 \\ -k_1 k_2 & \varepsilon^2 - k_2^2 & -k_2 k_3 & \varepsilon k_3 & 0 & -\varepsilon k_1 \\ -k_1 k_3 & -k_2 k_3 & \varepsilon^2 - k_3^2 & -\varepsilon k_2 & \varepsilon k_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon k_3 & \varepsilon k_2 & -k_2^2 - k_3^2 & k_1 k_2 & k_1 k_3 \\ \varepsilon k_3 & 0 & -\varepsilon k_1 & k_1 k_2 & -k_1^2 - k_3^2 & k_2 k_3 \\ -\varepsilon k_2 & \varepsilon k_1 & 0 & k_1 k_3 & k_2 k_3 & -k_1^2 - k_3^2 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Если в системе (2.10) учесть связь  $\varepsilon^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$  между энергией и импульсом (при рассмотрении плоских волн это условие должно учитываться обязательно), то ранг матрицы  $A$  оказывается равным двум. В результате приходим, например, к системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^2 - k_1^2 & -k_1 k_2 & -k_1 k_3 & 0 & -\varepsilon k_3 & \varepsilon k_2 \\ -k_1 k_2 & \varepsilon^2 - k_2^2 & -k_2 k_3 & \varepsilon k_3 & 0 & -\varepsilon k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \varepsilon = +\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \tag{2.12}$$

или

$$\begin{aligned}
 (k_2^2 + k_3^2) E_1 - k_1 k_2 E_2 &= k_1 k_3 E_3 + \varepsilon k_3 B_2 - \varepsilon k_2 B_3, \\
 -k_1 k_2 E_1 + (k_1^2 + k_3^2) E_2 &= k_2 k_3 E_3 - \varepsilon k_3 B_1 + \varepsilon k_1 B_3.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Выразим из уравнений (2.13) величины  $E_1, E_2$ :

$$E_1 = \frac{k_1(-B_1 \varepsilon^2 k_2 + E_3 k_2^2 + E_3 k_3^2) + \varepsilon k_3 (B_2 k_3 - B_3 k_2) + B_2 \varepsilon k_1^2 + E_3 k_1^3}{k_3 \varepsilon^2}, \tag{2.14}$$

$$E_2 = \frac{(k_2^2 + k_3^2)(E_3 k_2 - B_1 \varepsilon) + \varepsilon k_1 (B_2 k_2 + B_3 k_3) + E_3 k_2 k_1^2}{k_3 \varepsilon^2}. \tag{2.15}$$

Здесь можно выделить четыре линейно независимых решения:

$$\begin{aligned}
 (B_1, 0, 0, E_3 = 0), \quad E_1 &= -\frac{k_1 k_2}{k_3 \varepsilon} B_1, \quad E_2 = -\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_3 \varepsilon} B_1; \\
 (0, B_2, 0, E_3 = 0), \quad E_1 &= -\frac{k_1^2 + k_3^2}{k_3 \varepsilon} B_2, \quad E_2 = \frac{k_1 k_2}{k_3 \varepsilon} B_2; \\
 (0, 0, B_3, E_3 = 0), \quad E_1 &= -\frac{k_2}{\varepsilon} B_3, \quad E_2 = \frac{k_1}{\varepsilon} B_3; \\
 (B_i = 0, E_3), \quad E_1 &= -\frac{k_1}{k_3} E_3, \quad E_2 = \frac{k_2}{k_3} E_3.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Возвращаясь к уравнению (1.16) и соотношениям (2.6), получим с учетом (2.16) следующие решения для величин  $f_a$ :

$$\begin{aligned}
 if_0 &= f\varepsilon + \frac{k_2^3 + k_1^2 k_2 + k_3^2 k_2}{k_3 \varepsilon} B_1, \quad if_1 = k_1 \left( f + \frac{k_2}{k_3} B_1 \right), \quad if_2 = fk_2 + \frac{k_2^2}{k_3} B_1, \quad if_3 = fk_3 + k_2 B_1; \\
 if_0 &= f\varepsilon - \frac{(k_1^3 + (k_2^2 + k_3^2)k_1)}{k_3 \varepsilon} B_2, \quad if_1 = fk_1 - \frac{k_1^2}{k_3} B_2, \quad if_2 = k_2 \left( f - \frac{k_1}{k_3} B_2 \right), \quad if_3 = fk_3 - B_2 k_1; \\
 if_0 &= f\varepsilon, \quad if_1 = fk_1, \quad if_2 = fk_2, \quad if_3 = fk_3; \\
 if_0 &= f\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{k_3} E_3, \quad if_1 = k_1 f - \frac{\varepsilon k_1}{k_3} E_3, \quad if_2 = k_2 f - \frac{\varepsilon k_2}{k_3} E_3, \quad if_3 = fk_3 - \varepsilon E_3.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

С учетом величины  $f$  можно выделить пять независимых решений (свободные параметры для сокращения формул полагаем равными единице):

$$1) \quad f = 0, \quad E_1 = -\frac{k_1 k_2}{k_3 \varepsilon}, \quad E_2 = -\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_3 \varepsilon}, \quad E_3 = 0, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 0, \tag{2.18}$$

$$if_0 = \frac{k_2^3 + k_1^2 k_2 + k_3^2 k_2}{k_3 \varepsilon}, \quad if_1 = k_1 \frac{k_2}{k_3}, \quad if_2 = \frac{k_2^2}{k_3}, \quad if_3 = k_2;$$

$$2) \quad f = 0, \quad E_1 = \frac{k_1^2 + k_3^2}{k_3 \varepsilon}, \quad E_2 = \frac{k_1 k_2}{k_3 \varepsilon}, \quad E_3 = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 1, \quad B_3 = 0, \tag{2.19}$$

$$if_0 = -\frac{(k_1^3 + (k_2^2 + k_3^2)k_1)}{k_3 \varepsilon}, \quad if_1 = -\frac{k_1^2}{k_3}, \quad if_2 = -k_2 \frac{k_1}{k_3}, \quad if_3 = -k_1;$$

$$3) \quad f = 0, \quad E_1 = -\frac{k_2}{\varepsilon}, \quad E_2 = \frac{k_1}{\varepsilon}, \quad E_3 = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 1, \tag{2.20}$$

$$if_0 = 0, \quad if_1 = 0, \quad if_2 = 0, \quad if_3 = 0;$$

$$4) \quad f = 0, \quad E_1 = \frac{k_1}{k_3}, \quad E_2 = \frac{k_2}{k_3}, \quad E_3 = 1, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 0, \tag{2.21}$$

$$if_0 = -\frac{\varepsilon^2}{k_3}, \quad if_1 = -\frac{\varepsilon k_1}{k_3}, \quad if_2 = -\frac{\varepsilon k_2}{k_3}, \quad if_3 = -\varepsilon;$$

$$5) \quad f = 1, \quad E_1 = 0, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 0, \tag{2.22}$$

$$if_1 = k_1, \quad if_2 = k_2, \quad if_3 = k_3, \quad if_0 = \varepsilon,$$

из которых первые четыре соответствуют нулевому скалярному полю.

### Заклучение

Итак, проведенный анализ решений системы уравнений, описывающих безмассовое поле Штюкельберга, показывает, что эта система имеет пять независимых частных решений. Вопрос о том, какие из описываемых ими состояний вносят вклад в физически наблюдаемые величины, требует дополнительного анализа с привлечением явного выражения для тензора энергии-импульса поля. Данный вопрос находится в настоящее время в поле зрения авторов.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Duffin, R. I. On the characteristic matrices of the covariant systems / R. I. Duffin // *Phys.Rev.* – 1938. – Vol. 54, nr12. – P. 1114–1117.
2. Kemer, N. The particle aspect of meson theory / N. Kemmer // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1939. – Vol. 173. – P. 91–116.
3. Огивецкий, В. И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В. И. Огивецкий, И. В. Полубаринов // *Ядер. физика.* – 1966. – Т. 4, вып.1. – С. 216–223.
4. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.
5. Stueckelberg, E. C. G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III) / E. C. G. Stueckelberg // *Helv. Phys. Acta.* – 1938. – Vol. 11. – P. 299–328.
6. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altabal // *Int. J. Mod. Phys. A.* – 2004. – Vol. 119. – P. 3265–3348.
7. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Беларус. навука, 2009. – 486 с.
8. Редьков, В. М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В. М. Редьков. – Минск : Беларус. навука, 2011. – 339 с.
9. Частица Штюкельберга во внешнем магнитном поле. Метод проективных операторов / Е. М. Овсиюк [и др.] // *Изв. Коми науч. центра Урал. отд-ния Рос. акад. наук. Сер. «Физ.-мат. науки».* – 2022. – № 5 (57). – С. 69–78.
10. Частица Штюкельберга во внешнем магнитном поле. Нерелятивистское приближение. Точные решения / Е. М. Овсиюк [и др.] // *Изв. Коми науч. центра Урал. отд-ния Рос. акад. наук. Сер. «Физ.-мат. науки».* – 2022. – № 5 (57). – С. 79–88.
11. Stuckelberg particle in the Coulomb field, non-relativistic approximation, wave functions and spectra / E. M. Ovsyuk [et al.] // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2022. – Vol. 25, nr 4. – P. 387–404.

### REFERENCES

1. Duffin, R. I. On the characteristic matrices of the covariant systems / R. I. Duffin // *Phys.Rev.* – 1938. – Vol. 54, nr12. – P. 1114–1117.
2. Kemer, N. The particle aspect of meson theory / N. Kemmer // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1939. – Vol. 173. – P. 91–116.
3. Ogijevickij, V. I. Notof i jeho vozmozhnyje vzaimodiejstvija / V. I. Ogijevickij, I. V. Polubarinov // *Jadier. fizika.* – 1966. – Т. 4, vyp. 1. – S. 216–223.
4. Plietukhov, V. A. Rielativistskije volnovyje uravnenija i vnutriennije stiepieni svobody / V. A. Plietukhov, V. M. Ried'kov, V. I. Strazhev. – Minsk: Bielarus. navuka, 2015. – 328 s.

5. Stueckelberg, E. C. G. Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte (Teil II und III) / E. C. G. Stueckelberg // *Helv. Phys. Acta.* – 1938. – Vol. 11. – P. 299–328.
6. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Ruegg, M. Ruiz-Altabal // *Int. J. Mod. Phys. A.* – 2004. – Vol. 119. – P. 3265–3348.
7. Ried'kov, V. M. Polia chastic v riemanovom prostranstvie i gruppa Lorentsa / V. M. Ried'kov. – Minsk : Bielarus. navuka, 2009. – 486 s.
8. Ried'kov, V. M. Tietradnyj formalizm, sfierichieskaja simmetrija i basis Shredingiera / V. M. Ried'kov. – Minsk : Bielarus. navuka, 2011. – 339 s.
9. Chastica Stiukel'berga vo vnieshniem magnitnom polie. Mietod projektivnykh operatorov / Ye. M. Ovsijuk [i dr.] // *Izv. Komi nauch. centra Ural. otd-nija Ros. akad. nauk. Sier. «Fiz.-mat. nauki».* – 2022. – № 5 (57). – S. 69–78.
10. Chastica Stiukel'berga vo vnieshniem magnitnom polie. Nierielativistskoje priblizhenije. Tochnyje rieshenija / Ye. M. Ovsijuk [i dr.] // *Izv. Komi nauch. centra Ural. otdnija Ros. akad. nauk. Sier. «Fiz.-mat. nauki».* – 2022. – № 5 (57). – S. 79–88.
11. Stuckelberg particle in the Coulomb field, non-relativistic approximation, wave functions and spectra / E. M. Ovsyuk [et al.] // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2022. – Vol. 25, nr 4. – P. 387–404.

*Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.03.2023*