УДК 513.82

Александр Андреевич Юдов[1], Елена Вячеславовна Кисилюк[2], Анастасия Михайловна Кузьмич[3]
[1]канд. физ.-мат. наук, доц., преподаватель лицея № 1 г. Бреста
[2]магистр физ.-мат. наук
[3]магистрант физ.-мат. факультета
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Alexander Yudov[1], Elena Kisilyuk[2], Anastasia Kuzmich[3]
[1]Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Lecturer at the Educational Institution Lyceum № 1 in Brest
[2]Master of Physical and Mathematical Sciences
[1]Master's Student of the Faculty of Physics and Mathematics of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: modelmath@brsu.brest.by

СИММЕТРИЯ В КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ И ЕЕ СВОЙСТВА

Изучаются конечные группы. Дается определение симметрии конечной группы относительно произвольной точки и изучаются свойства симметрии. Рассматриваются гомоморфизмы конечной группы и строятся однородные пространства, порожденные гомоморфизмом, изучаются его свойства, рассматриваются примеры.

Ключевые слова: *группа, подгруппа, гомоморфизм, симметрия, однородное пространство.*

Symmetry in a Finite Group and its Properties

In this work finite groups are studied. A definition of a finite group with respect to approaching points of view is given and the properties of the collection are studied. Homomorphisms of a finite group are considered and homogeneous spaces generated by a homomorphism are constructed, its properties are studied, and examples are considered.

Key words: *group, subgroup, homomorphism, symmetry, homogeneous space.*

Введение

Теория конечных групп представляет собой активно развивающийся раздел современной алгебры. В этом направлении работали: О. Ю. Шмидт, В. Хупперт, Л. А. Шеметков, С. А. Чунихин, В. С. Монахов, А. А. Трофимук, Д. В. Грицук и др. В данной работе для конечной группы вводится понятие симметрии. Это понятие применяется для исследования структуры конечных групп.

1. Определение симметрии конечной группы и ее свойства

Рассмотрим произвольную конечную группу G.

Определение 1. Симметрией группы G относительно элемента x_0 этой группы будем называть преобразование S_{x_0}, определенное формулой:

$$S_{x_0} : G \to G : y \to x_0 y^{-1} x_0 .$$

Рассмотрим свойства симметрии.

Теорема 1. Симметрия S_{x_0} является биекцией для любого $x_0 \in G$.

Доказательство. S_{x_0} инъективно, т. к. если $x_0 y^{-1} x_0 = x_0 z^{-1} x_0 \Rightarrow y^{-1} = z^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow y = z$.

S_{x_0} сюръективно, т. к. если $z \in G$, то $\exists y$ такое, что: $x_0 y^{-1} x_0 = z$, то $y^{-1} = x_0^{-1} z x_0^{-1}$, $y = x_0 z^{-1} x_0$.

Таким образом S_{x_0} − биекция.

Теорема 2. Симметрия S_{x_0} является инволютивным преобразованием, т. е. $S_{x_0}^2 = Id$.

Доказательство. Действительно,

$S_{x_0}(S_{x_0}(y)) = S_{x_0}(x_0 y^{-1} x_0) = x_0 x_0^{-1} y x_0^{-1} x_0 = y.$ Ч. т. д.

Теорема 3. Преобразование, обратное к симметрии, является симметрией.

Доказательство. Действительно, пусть $z = S_{x_0}(y) = x_0 y^{-1} x_0$, тогда $y^{-1} = x_0^{-1} z x_0^{-1}$ и $y = x_0 z^{-1} x_0 = S_{x_0}(z).$ Ч. т. д.

Теорема 4. Пусть $f : G \to G'$ − гомоморфизм и $x_0 \in G, S_{x_0}(y) = x_0 y^{-1} x_0$ − симметрия относительно x_0 группы G . Пусть элементы y и z − симметричны, т. е. $z = x_0 y^{-1} x_0$. Тогда элементы $f(y)$ и $f(z)$ будут симметричны относительно $f(x_0)$ в группе G'.

Доказательство.

$f(z) = f(x_0 y^{-1} x_0) = f(x_0) f(y^{-1}) f(x_0) = f(x_0) f^{-1}(y) f(x_0) = S_{f(x_0)}(f(y)).$ Ч. т. д.

Следствие. При любом автоморфизме f группы G элементы симметричные относительно точки x_0 переходят в элемент симметричный относительно точки $f(x_0).$

Это же касается группы S_n (в частности S_4). Следовательно, симметрия элементов сохраняется при всех автоморфизмах группы.

Теорема 5. Композиция двух симметрий не является симметрией.

Доказательство.

$z = S_{x_0}(y) = x_0 y^{-1} x_0, w = S_{p_0}(z) = p_0 z^{-1} p_0,$ тогда $w = S_{p_0}(S_{p_0}(y)) = p_0 (x_0 y^{-1} x_0)^{-1} p_0 =$ $= p_0 x_0^{-1} y x_0^{-1} p_0$ – не симметрия. Ч. т. д.

Определение 2. Элемент a группы G ,будем называть инволютивным, если $a^2 = \varepsilon.$

Теорема 6. При всякой симметрии относительно инволютивного элемента группы G любая ее подгруппа преобразуется в подгруппу.

Доказательство. Пусть группа Н – подгруппа группы G , x_0 – инволютивный элемент этой группы. Пусть $y, z \in H.$ Рассмотрим $S_{x_0}(yz) = x_0 (yz)^{-1} x_0 = x_0 z^{-1} y^{-1} x_0 =$ $= x_0 z^{-1} x_0 x_0 y^{-1} x_0 = S_{x_0}(z) \cdot\ S_{x_0}(y) \in S_{x_0}(H),$ т. к. $yz \in H.$ Таким образом, во множестве $S_{x_0}(H)$ определена композиция. Эта композиция ассоциативна.

Действительно:

$S_{x_0}((yz)w) = S_{x_0}(w) \cdot S_{x_0}(yz) = S_{x_0}(w) \cdot (S_{x_0}(z) \cdot S_{x_0}(y)).$ С другой стороны, $S_{x_0}(y(zw)) = S_{x_0}(zw) \cdot S_{x_0}(y) = (S_{x_0}(w) \cdot S_{x_0}(z)) \cdot S_{x_0}(y).$ Поскольку $(yz)w = y(zw),$ то композиция в $S_{x_0}(H)$ ассоциативна.

Докажем, что во множестве $S_{x_0}(H)$ для любого элемента существует обратный. Действительно, пусть $S_{x_0}(y) = x_0 y^{-1} x_0$ – произвольный элемент из $S_{x_0}(H)$. Тогда

$S_{x_0}(y^{-1}) = x_0 y x_0.$ Перемножая $S_{x_0}(y)$ и $S_{x_0}(y^{-1}),$ получим: $S_{x_0}(y) \cdot\ S_{x_0}(y^{-1}) =$ $= x_0 y^{-1} x_0 x_0 y x_0 = x_0 \varepsilon x_0 = \varepsilon.$ Таким образом, $S_{x_0}(y^{-1}) = S_{x_0}(y)^{-1}.$

Докажем далее, что во множестве $S_{x_0}(H)$ существует единица – это элемент

$$S_{x_0}(\varepsilon) = x_0\varepsilon^{-1}x_0 = x_0^2 = \varepsilon.$$

Таким образом, $S_{x_0}(H)$ образует группу. Ч. т. д.

Множество всех симметрий не образует группу, т. к. композиция симметрий относительно разных центров не является симметрией. Однако если рассмотреть множество всех симметрий данной группы и всех их композиций, то такая совокупность преобразований будет образовывать группу.

Группа S_4 – это множество всех перестановок степени 4 с операцией умножения перестановок. Эта группа является конечной группой порядка 4! = 24. Все элементы этой группы, используя символику циклов, можно записать в виде: ε, (12), (13), (14), (23), (24), (34), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432) [1, с. 17], обозначая элементы соответственно буквами с индексами: $\varepsilon, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, B_1, B_2, B_3, B_1, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2,$ $D_3, D_4, D_5, D_6.$ Операцию умножения элементов этой группы можно задать в виде таблицы.

Ниже приводятся примеры вычисления симметрий группы S_4 для различных элементов.

$S_\varepsilon(\varepsilon) = \varepsilon$, $S_\varepsilon(234) = (243)$, $S_\varepsilon(132) = (123)$, $S_\varepsilon(12)(34) = (12)(34)$, $S_\varepsilon(123) = (132)$, $S_\varepsilon(14)(23) = (14)(23)$, $S_\varepsilon(243) = (243)$, $S_\varepsilon(143) = (134)$, $S_\varepsilon(142) = (124)$, $S_\varepsilon(134) = (143)$, $S_\varepsilon(13)(24) = (13)(24)$, $S_\varepsilon(124) = (142)$, $S_\varepsilon(1234) = (1432)$, $S_\varepsilon(1243) = (1342)$, $S_\varepsilon(1324) = (1423)$, $S_\varepsilon(1342) = (1243)$, $S_\varepsilon(1423) = (1324)$, $S_\varepsilon(1432) = (1234)$, $S_\varepsilon(12) = (12)$, $S_\varepsilon(13) = (13)$, $S_\varepsilon(14) = (14)$, $S_\varepsilon(23) = (23)$, $S_\varepsilon(24) = (24)$, $S_\varepsilon(34) = (34)$.

$S_{(234)}(\varepsilon) = (243)$, $S_{(234)}(234) = (234)$, $S_{(234)}(132) = (132)$, $S_{(234)}(12)(34) = (134)$, $S_{(234)}(123) = (14)(32)$, $S_{(234)}(14)(23) = (123)$, $S_{(234)}(243) = \varepsilon$, $S_{(234)}(143) = (143)$, $S_{(234)}(142) = (13)(24)$, $S_{(234)}(134) = (12)(34)$, $S_{(234)}(13)(24) = (142)$, $S_{(234)}(124) = (124)$, $S_{(234)}(1234) = (1234)$, $S_{(234)}(1243) = (14)$, $S_{(234)}(1324) = (12)$, $S_{(234)}(1342) = (1342)$, $S_{(234)}(1423) = (1423)$, $S_{(234)}(1432) = (13)$, $S_{(234)}(12) = (1324)$, $S_{(234)}(13) = (1432)$, $S_{(234)}(14) = (1243)$, $S_{(234)}(23) = (23)$, $S_{(234)}(24) = (24)$, $S_{(234)}(34) = (34)$.

Аналогично вычисляются образы элементов группы S_4, полученные при остальных симметриях.

Перечислим все подгруппы группы S_4:

1) $F_1 = \{\varepsilon,(12)\}, F_2 = \{\varepsilon,(13)\}, F_3 = \{\varepsilon,(14)\}, F_4 = \{\varepsilon,(23)\}, F_5 = \{\varepsilon,(24)\}, F_6 = \{\varepsilon,(34)\},$ $F_7 = \{\varepsilon,(12)(34)\}, F_8 = \{\varepsilon,(13)(24)\}, F_9 = \{\varepsilon,(14)(23)\}.$

2) $G_1 = \{\varepsilon,(123),(132)\}, G_2 = \{\varepsilon,(124),(142)\}, G_3 = \{\varepsilon,(134),(143)\}, G_4 = \{\varepsilon,(234),(243)\}.$ $K_1 = \{\varepsilon,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}, K_2 = \{\varepsilon,(12)(34),(12),(34)\},$ $K_3 = \{\varepsilon,(13)(24),(13),(24)\}, K_4 = \{\varepsilon,(14)(23),(14),(23)\}, K_5 = \{\varepsilon,(1234),(1432),(13)(24)\},$ $K_6 = \{\varepsilon,(1243),(1342),(14)(23)\}, K_7 = \{\varepsilon,(1324),(1423),(12)(34)\}.$

3) $S_3^1 = \{\varepsilon,(12),(13),(23),(123),(132)\}, S_3^2 = \{\varepsilon,(124),(142),(12),(14),(24)\},$ $S_3^3 = \{\varepsilon,(134),(143),(13),(14),(34)\}, S_3^4 = \{\varepsilon,(234),(243),(23),(24),(34)\}.$

Таблица умножения элементов группы S_4

	ε	B7	B2	C1	B1	C3	B8	B6	B4	B5	C2	B3	D	D	D	D	D	D	A	A	A	A	A	A
ε	ε	B7	B2	C1	B1	C3	B8	B6	B4	B5	C2	B3	D	D	D	D	D	D	A	A	A	A	A	A
B7	B7	B8	B4	B2	C2	B3	ε	B1	C1	C3	B6	B5	D	A	A	D	D	A	D	D	D	A	A	A
B2	B2	B5	B1	B7	ε	B6	C2	B4	C3	C1	B3	B8	A	A	D	D	A	D	A	A	D	A	D	D
C1	C1	B3	B6	ε	B8	C2	B1	B2	B5	B4	C3	B7	A	A	D	A	D	A	A	D	D	D	D	A
B1	B1	C1	ε	B5	B2	B4	B3	C3	B6	B7	B8	C2	D	D	A	A	D	A	A	A	D	A	D	D
C3	C3	B6	B3	C2	B5	ε	B4	B7	B8	B1	C1	B2	A	D	A	D	A	A	D	D	A	A	D	D
B8	B8	ε	C1	B4	B6	B5	B7	C2	B2	B3	B1	C3	A	D	D	A	A	D	D	D	D	A	A	A
B6	B6	B4	B8	B3	C1	B2	C3	B5	C2	ε	B7	B1	A	D	A	A	D	D	D	A	A	D	D	A
B4	B4	C3	C2	B8	B7	B1	B6	C1	B3	B2	B5	ε	A	A	A	D	D	D	A	D	A	D	A	D
B5	B5	C2	C3	B1	B3	B8	B2	ε	B7	B6	B4	C1	D	A	D	D	A	A	D	A	A	D	D	A
C2	C2	B2	B7	C3	B4	C1	B5	B3	B1	B8	ε	B6	D	A	A	A	A	D	D	A	D	D	A	D
B3	B3	B1	B5	B6	C3	B7	C1	B8	ε	C2	B2	B4	D	D	D	A	A	A	A	D	A	D	A	D
A	A	D	A	A	A	D	D	D	A	D	D	A	B7	B8	C2	B5	C3	B6	ε	B2	B4	B1	B3	C1
A	A	D	A	D	A	D	D	A	D	A	A	D	C1	B3	B8	B7	B4	C3	B1	ε	B6	B2	C2	B5
A	A	D	D	D	D	A	D	A	A	A	D	A	B1	C1	B2	C2	B7	B8	B3	B5	ε	C3	B4	B6
A	A	A	A	D	A	A	A	D	D	D	D	D	B5	C2	B3	C1	B6	B4	B2	B1	C3	ε	B8	B7
A	A	A	D	D	D	D	A	D	A	D	A	A	C3	B6	B5	B2	B1	C1	B4	C2	B3	B7	ε	B8
A	A	A	D	A	D	D	A	A	D	A	D	D	B3	B1	C3	B4	C2	B2	C1	B6	B5	B8	B7	ε
D	D	D	A	A	D	A	A	A	A	D	D	D	C2	B2	B4	B6	B8	ε	B5	C3	B7	B3	C1	B1
D	D	A	A	A	D	D	D	D	A	A	A	D	B4	C3	B7	ε	B2	B5	B6	B8	C2	C1	B1	B3
D	D	A	D	D	A	A	D	A	A	D	A	D	B6	B4	C1	B1	ε	B7	C3	B3	B8	B5	B2	C2
D	D	D	D	A	A	D	A	A	D	D	A	A	B8	ε	B6	C3	B3	B1	B7	B4	C1	C2	B5	B2
D	D	D	A	D	D	A	A	D	D	A	A	A	B2	B5	ε	B8	C1	B3	C2	B7	B1	B4	B6	C3
D	D	A	D	A	A	A	D	D	D	A	D	A	ε	B7	B1	B3	B5	C2	B8	C1	B2	B6	C3	B4

1) $H_1 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (12), (34), (1324), (1423)\}$,
$H_2 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (14), (23), (1243), (1342)\}$,
$H_3 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (13), (24), (1234), (1432)\}$.

2) $A_1 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (142), (134), (243), (132), (124), (143), (234)\}$.

На основании теоремы 6 при симметрии относительно инволютивного центра каждая подгруппа группы S_4 переходит в подгруппу.

Определение 3. Зеркалом для симметрии $S(x_0)$ будем называть множество всех элементов группы, которые переходят в себя при данной симметрии, т. е. множество всех неподвижных элементов для этой симметрии. Зеркало будем обозначать $Z(x_0)$.

Существует в S_4 10 инволютивных элементов: ε, (12), (13), (14), (23), (24), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23). Рассмотрим симметрии относительно этих элементов и найдем образы всех подгрупп при этих симметриях.

Рассмотрим симметрию $S_{(12)}$. Знак $\xrightarrow{\bullet}$ соответствует точечно неподвижной подгруппе. При этом подгруппы группы S_4 преобразуются следующим образом:

1) $F_1 \xrightarrow{\bullet} F_1, F_2 \to F_4, F_3 \to F_5, F_4 \to F_2, F_5 \to F_3, F_6 \xrightarrow{\bullet} F_6,$
$F_7 \xrightarrow{\bullet} F_7, F_8 \to F_9, F_9 \to F_8.$

2) $G_1 \xrightarrow{\bullet} G_1, G_2 \xrightarrow{\bullet} G_2, G_3 \to G_4, G_4 \to G_3.$

3) $K_1 \to K_1, K_2 \xrightarrow{\bullet} K_2, K_3 \to K_4, K_4 \to K_3, K_5 \to K_6, K_6 \to K_5, K_7 \xrightarrow{\bullet} K_7.$

4) $S_3^1 \to S_3^1, S_3^2 \to S_3^2, S_3^3 \to S_3^4, S_3^4 \to S_3^3.$

5) $H_1 \to H_1, H_2 \to H_3, H_3 \to H_2.$

6) $A_1 \to A_1$. $Z_{(12)} = \{F_1, F_6, F_7, G_1, G_2, K_2, K_7\}$.

Рассмотрим симметрию $S_{(13)}$:

1) $F_1 \to F_4, F_2 \xrightarrow{\bullet} F_2, F_3 \to F_6, F_4 \to F_1, F_5 \xrightarrow{\bullet} F_5, F_6 \to F_3, F_7 \to F_9,$
$F_8 \xrightarrow{\bullet} F_8, F_9 \to F_7.$

2) $G_1 \xrightarrow{\bullet} G_1, G_2 \to G_4, G_3 \xrightarrow{\bullet} G_3, G_4 \to G_2.$

3) $K_1 \to K_1, K_2 \to K_4, K_3 \xrightarrow{\bullet} K_3, K_4 \to K_2, K_5 \xrightarrow{\bullet} K_5, K_6 \to K_7, K_7 \to K_6.$
$S_3^1 \to S_3^1, S_3^2 \to S_3^4, S_3^3 \to S_3^3, S_3^4 \to S_3^2.$

4) $H_1 \to H_2, H_2 \to H_1, H_3 \to H_3.$

5) $A_1 \to A_1.$

$Z_{(13)} = \{F_2, F_5, F_8, G_1, G_3, K_3, K_5\}$.

Рассмотрим симметрию $S_{(14)}$:

1) $F_1 \to F_5, F_2 \to F_6, F_3 \xrightarrow{\bullet} F_3, F_4 \xrightarrow{\bullet} F_4, F_5 \to F_1, F_6 \to F_2, F_7 \to F_8,$
$F_8 \to F_7, F_9 \xrightarrow{\bullet} F_9.$

2) $G_1 \to G_4, G_2 \xrightarrow{\bullet} G_2, G_3 \xrightarrow{\bullet} G_3, G_4 \to G_1.$

3) $K_1 \to K_1, K_2 \to K_3, K_3 \to K_2, K_4 \xrightarrow{\bullet} K_4, K_5 \to K_7, K_6 \xrightarrow{\bullet} K_6, K_7 \to K_5.$

4) $S_3^1 \to S_3^4, S_3^2 \to S_3^2, S_3^3 \to S_3^3, S_3^4 \to S_3^1.$

5) $H_1 \to H_3, H_2 \to H_2, H_3 \to H_1.$

6) $A_1 \to A_1.$

$Z_{(14)} = \{F_3, F_4, F_9, G_2, G_3, K_4, K_6\}.$

Рассмотрим симметрию $S_{(23)}$:

1) $F_1 \to F_2, F_2 \to F_1, F_3 \xrightarrow{\bullet} F_3, F_4 \xrightarrow{\bullet} F_4, F_5 \to F_6, F_6 \to F_5, F_7 \to F_8,$
$F_8 \to F_7, F_9 \xrightarrow{\bullet} F_9.$

2) $G_1 \xrightarrow{\bullet} G_1, G_2 \to G_3, G_3 \to G_2, G_4 \xrightarrow{\bullet} G_4.$

3) $K_1 \to K_1, K_2 \to K_3, K_3 \to K_2, K_4 \xrightarrow{\bullet} K_4, K_5 \to K_7, K_6 \xrightarrow{\bullet} K_6, K_7 \to K_5.$

4) $S_3^1 \to S_3^1, S_3^2 \to S_3^3, S_3^3 \to S_3^2, S_3^4 \to S_3^4.$

5) $H_1 \to H_3, H_2 \to H_2, H_3 \to H_1.$

6) $A_1 \to A_1.$

$Z_{(23)} = \{F_3, F_4, F_9, G_1, G_4, K_4, K_6\}.$

Рассмотрим симметрию $S_{(24)}$:

1) $F_1 \to F_3, F_2 \xrightarrow{\bullet} F_2, F_3 \to F_1, F_4 \to F_6, F_5 \xrightarrow{\bullet} F_5, F_6 \to F_4, F_7 \to F_9,$
$F_8 \xrightarrow{\bullet} F_8, F_9 \to F_7.$

2) $G_1 \to G_3, G_2 \xrightarrow{\bullet} G_2, G_3 \to G_1, G_4 \xrightarrow{\bullet} G_4.$

3) $K_1 \to K_1, K_2 \to K_4, K_3 \xrightarrow{\bullet} K_3, K_4 \to K_2, K_5 \xrightarrow{\bullet} K_5, K_6 \to K_7, K_7 \to K_6.$

4) $S_3^1 \to S_3^3, S_3^2 \to S_3^2, S_3^3 \to S_3^1, S_3^4 \to S_3^4.$

5) $H_1 \to H_2, H_2 \to H_1, H_3 \to H_3.$

6) $A_1 \to A_1.$

$Z_{(24)} = \{F_2, F_5, F_8, G_2, G_4, K_3, K_5\}.$

Рассмотрим симметрию $S_{(34)}$:

1) $F_1 \to F_3, F_2 \xrightarrow{\bullet} F_2, F_3 \to F_1, F_4 \to F_6, F_5 \xrightarrow{\bullet} F_5, F_6 \to F_4, F_7 \to F_9,$
$F_8 \xrightarrow{\bullet} F_8, F_9 \to F_7.$

2) $G_1 \to G_3, G_2 \xrightarrow{\bullet} G_2, G_3 \to G_1, G_4 \xrightarrow{\bullet} G_4.$

3) $K_1 \to K_1, K_2 \to K_4, K_3 \xrightarrow{\bullet} K_3, K_4 \to K_2, K_5 \xrightarrow{\bullet} K_5, K_6 \to K_7, K_7 \to K_6.$

4) $S_3^1 \to S_3^3, S_3^2 \to S_3^2, S_3^3 \to S_3^1, S_3^4 \to S_3^4.$

5) $H_1 \to H_2, H_2 \to H_1, H_3 \to H_3.$

6) $A_1 \to A_1.$

$Z_{(34)} = \{F_2, F_5, F_8, G_2, G_4, K_2, K_5\}.$

Рассмотрим симметрию $S_{(\varepsilon)}$:

1) $F_1 \xrightarrow{\bullet} F_1, F_2 \xrightarrow{\bullet} F_2, F_3 \xrightarrow{\bullet} F_3, F_4 \xrightarrow{\bullet} F_4, F_5 \xrightarrow{\bullet} F_5, F_6 \xrightarrow{\bullet} F_6, F_7 \xrightarrow{\bullet} F7,$
$F_8 \xrightarrow{\bullet} F_8, F_9 \xrightarrow{\bullet} F_9.$

2) $G_1 \to G_1, G_2 \to G_2, G_3 \to G_3, G_4 \to G_4.$

3) $K_1 \xrightarrow{\bullet} K_1, K_2 \xrightarrow{\bullet} K_2, K_3 \xrightarrow{\bullet} K_3, K_4 \xrightarrow{\bullet} K_4, K_5 \to K_5, K_6 \to K_6, K_7 \to K_7.$

4) $S_3^1 \to S_3^1, S_3^2 \to S_3^2, S_3^3 \to S_3^3, S_3^4 \to S_3^4.$

5) $H_1 \to H_1, H_2 \to H_2, H_3 \to H_3.$

6) $A_1 \to A_1.$

$Z_{(\varepsilon)} = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, K_1, K_2, K_3, K_4\}.$

Рассмотрим симметрию $S_{(12)(34)}$:

1) $F_1 \xrightarrow{\bullet} F_1, F_2 \to F_5, F_3 \to F_4, F_4 \to F_3, F_5 \to F_2, F_6 \xrightarrow{\bullet} F_6, F_7 \xrightarrow{\bullet} F_7,$
$F_8 \xrightarrow{\bullet} F_8, F_9 \xrightarrow{\bullet} F_9.$

2) $G_1 \to G_2, G_2 \to G_1, G_3 \to G_4, G_4 \to G_3.$

3) $K_1 \xrightarrow{\bullet} K_1, K_2 \xrightarrow{\bullet} K_2, K_3 \to K_3, K_4 \to K_4, K_5 \xrightarrow{\bullet} K_5, K_6 \xrightarrow{\bullet} K_6, K_7 \to K_7.$

4) $S_3^1 \to S_3^2, S_3^2 \to S_3^1, S_3^3 \to S_3^4, S_3^4 \to S_3^3.$

5) $H_1 \to H_1, H_2 \to H_2, H_3 \to H_3.$

6) $A_1 \to A_1.$

$Z_{(12)(34)} = \{F_1, F_6, F_7, F_8, F_9, K_1, K_2, K_5, K_6\}.$

Рассмотрим симметрию $S_{(14)(23)}$:

1) $F_1 \to F_6, F_2 \to F_5, F_3 \xrightarrow{\bullet} F_3, F_4 \xrightarrow{\bullet} F_4, F_5 \to F_2, F_6 \to F_1, F_7 \xrightarrow{\bullet} F_7,$
$F_8 \xrightarrow{\bullet} F_8, F_9 \xrightarrow{\bullet} F_9.$

2) $G_1 \to G_4, G_2 \to G_3, G_3 \to G_2, G_4 \to G_1.$

3) $K_1 \xrightarrow{\bullet} K_1, K_2 \to K_2, K_3 \to K_3, K_4 \xrightarrow{\bullet} K_4, K_5 \xrightarrow{\bullet} K_5, K_6 \to K_6, K_7 \xrightarrow{\bullet} K_7.$

4) $S_3^1 \to S_3^4, S_3^2 \to S_3^3, S_3^3 \to S_3^2, S_3^4 \to S_3^1.$

5) $H_1 \to H_1, H_2 \to H_2, H_3 \to H_3.$

6) $A_1 \to A_1$.

$Z_{(14)(23)} = \{F_3, F_4, F_7, F_8, F_9, K_1, K_4, K_5, K_7\}$.

Рассмотрим симметрию $S_{(13)(24)}$:

1) $F_1 \to F_6, F_2 \overset{\bullet}{\to} F_2, F_3 \to F_4, F_4 \to F_3, F_5 \overset{\bullet}{\to} F_5, F_6 \to F_1, F_7 \overset{\bullet}{\to} F_7,$ $F_8 \overset{\bullet}{\to} F_8, F_9 \overset{\bullet}{\to} F_9$.

2) $G_1 \to G_3, G_2 \to G_4, G_3 \to G_1, G_4 \to G_2$.

3) $K_1 \overset{\bullet}{\to} K_1, K_2 \to K_2, K_3 \overset{\bullet}{\to} K_3, K_4 \to K_4, K_5 \to K_5, K_6 \overset{\bullet}{\to} K_6, K_7 \overset{\bullet}{\to} K_7$.

4) $S_3^1 \to S_3^3, S_3^2 \to S_3^4, S_3^3 \to S_3^1, S_3^4 \to S_3^2$.

5) $H_1 \to H_1, H_2 \to H_2, H_3 \to H_3$.

6) $A_1 \to A_1$.

$Z_{(13)(24)} = \{F_2, F_5, F_7, F_8, F_9, K_1, K_3, K_6, K_7\}$.

2. G-пространства, порожденные гомоморфизмами конечных групп

Определение 4. Пусть задана конечная группа G.

Отображение

$$\varphi : G \to G \tag{1}$$

называется гомоморфизмом группы G, если оно удовлетворяет условию:

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \tag{2}$$

для любых $a, b \in G$.

Если φ биекция, то это отображение называется автоморфизмом.

Определение 5. Подмножество X конечной группы G называется (левым) G-пространством, если $\forall x \in X, \forall g \in G$ сопоставляется элемент $x' \in X$, обозначаемый $x \cdot g$, такой что:

1. $g_2(g_1x) = (g_2g_1)x$.
2. $ex = x$.

В этом случае говорят, что G действует слева на X.

Определение 6. G-пространство X называется однородным G-пространством, если $\forall x, x' \in X$ найдется $g \in G$, такое, что $g \cdot x = x'$.

Пусть задан гомоморфизм φ конечной группы G. Рассмотрим множество

$$X = \{a\varphi(a^{-1}) \mid a \in G\}. \tag{3}$$

Теорема 7. Множество X является левым G-пространством.

Доказательство. Пусть $x = a\varphi(a^{-1}), b \in G,$ тогда

$$b \cdot a\varphi(a^{-1}) \equiv ba\varphi(a^{-1}b^{-1}) = ba\varphi((ba)^{-1}) \in X. \tag{4}$$

Докажем выполнение условий G-пространства.

$$c \cdot (b \cdot a\varphi(a^{-1})) = c \cdot (ba\varphi((ba)^{-1})) = cba\varphi((ba)^{-1}c^{-1}) = cba\varphi(a^{-1}b^{-1}c^{-1}) =$$
$$= cba\varphi((cba)^{-1}) = (cb) \cdot \ a\varphi(a^{-1}),\ e \cdot a\varphi(a^{-1}) = ea\varphi(a^{-1}e^{-1}) = a\varphi(a^{-1}).$$

Теорема 7 доказана.

Теорема 8. φ -пространство $X = \{a\varphi(a^{-1})\}$ является однородным G -пространством. Такое однородное пространство будем называть φ-пространством.

Доказательство. Пусть заданы два элемента G -пространства $X : a\varphi(a^{-1})$ и $b\varphi(b^{-1})$. Рассмотрим элемент $c = ba^{-1}$. Тогда

$$c \cdot \ a\varphi(a^{-1}) = ba^{-1} \cdot \ (a\varphi(a^{-1})) =$$
$$= ba^{-1}a\varphi(a^{-1}(ba^{-1})^{-1}) = b\varphi(a^{-1}ab^{-1}) = b\varphi(b^{-1}).$$

Теорема 8 доказана.

Теорема 9. φ-пространство X содержит единицу группы.

Доказательство. Рассмотрим элемент e, тогда

$$e\varphi(e^{-1}) == e\varphi(e)^{-1} = ee^{-1} = e.$$

Теорема 9 доказана.

Определение 7. Автоморфизм φ группы G называется инволютивным, если $\varphi^2 = Id$.

В дальнейшем будем считать отображение φ автоморфизмом.

Теорема 10. Если автоморфизм φ инволютивный, то φ-пространство вместе с каждым своим элементом содержит ему обратный. Такое φ -пространство будем называть симметрическим.

Доказательство. Рассмотрим $a\varphi(a^{-1}) \in X$. Пусть $a = \varphi(b)$. Рассмотрим ему обратный элемент:

$$(a\varphi(a^{-1}))^{-1} = \varphi(a^{-1})^{-1}a^{-1} = \varphi(a)a^{-1} = \varphi(\varphi(b))\varphi(b)^{-1} =$$
$$= \varphi^2(b)\varphi(b^{-1}) = b\varphi(b^{-1}) \in X.$$

Теорема 10 доказана.

Возникает задача: для заданной конечной группы G найти все автоморфизмы, все инволютивные автоморфизмы, все φ-пространства, все симметрические пространства.

Пример 1. Пусть G абелева группа. Тогда отображение $\varphi : a \to a^{-1}$ является автоморфизмом. Соответствующее пространство имеет вид $\{a\varphi(a^{-1})\} = \{aa\}$ $\forall a \in G.$

$$\varphi(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = \varphi(b)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Свойство гомоморфизма выполняется.

Пример 2. Пусть G – абелева группа порядка n и m – натуральное число, взаимно простое с n. Тогда отображение $\varphi : g \to g^m, g \in G$ является автоморфизмом группы G [1, с. 61], т. к.

$$(g_1 g_2)^m = \underbrace{g_1 g_2 \dots g_1 g_2}_{m} = g_1{}^m g_2{}^m.$$

Автоморфизм φ не является инволютивным, действительно

$$\varphi^2(g) = (g^m)^m = g^{m^2} \neq g.$$

Найдем φ-пространство, соответствующее автоморфизму φ.

$$g\varphi(g^{-1}) = g(g^{-1})^m = g\underbrace{g^{-1} \dots g^{-1}}_{m} = \underbrace{g^{-1} \dots g^{-1}}_{m-1},$$

$$X = \{\underbrace{g^{-1} \dots g^{-1}}_{m-1} \mid \forall g \in G\} = \{h^{m-1} \mid \forall h \in G\}.$$

Пример 3. $\varphi : G \to G :\ g \to a^{-1} g a = g^a$; для некоторого a.

$$\varphi(g_1 g_2) = a^{-1} g_1 g_2 a = a^{-1} g_1 a a^{-1} g_2 a = \varphi(g_1)\varphi(g_2).$$

Значит, условие автоморфизма выполняется. Найдем φ-пространство X. Рассмотрим $\forall b \in G$ и возьмем некоторый фиксированный $a \in G$, тогда произвольный элемент φ-пространства X будет иметь вид: $b\varphi(b^{-1}) = ba^{-1}b^{-1}a$. Таким образом, φ-пространство X состоит из элементов вида $\{ba^{-1}b^{-1}a\}$ $\forall b \in G,$ которые представляют собой множество всех коммутаторов $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$ в группе G.

Теорема 11. Пусть X – φ-пространство, причем φ-инволютивный автоморфизм. Тогда вместе с каждым элементом φ-пространство X содержит и обратный к нему.

Доказательство. Рассмотрим элемент $a\varphi(a^{-1}) \in X$. К нему обратный будет элемент $(a\varphi(a^{-1}))^{-1} = (\varphi(a^{-1}))^{-1} a^{-1} = \varphi(a) a^{-1} = \varphi(a)\varphi(\varphi(a^{-1})) = b\varphi(b^{-1}) \in X$, где $b = \varphi(a)$. Ч. т. д.

Теорема 12. Пусть X – φ-пространство и ψ – произвольный автоморфизм группы G. Тогда $\psi(X)$ – также будет φ-пространством, порожденным некоторым автоморфизмом φ'.

Доказательство. Пусть $a\varphi(a^{-1}) \in X.$ Рассмотрим $\psi(a\varphi(a^{-1})) = \psi(a)\psi(\varphi(a^{-1})).$ Определим автоморфизм φ' из условия $\psi \circ \varphi = \varphi' \circ \psi.$ Отсюда $\varphi' = \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ и, следовательно, $\psi(a)\psi(\varphi(a^{-1})) = \psi(a)\varphi'(\psi(a^{-1})) = b\varphi'(b^{-1}),$ где $b = \psi(a)$. То есть каждый элемент $\psi(a\varphi(a^{-1}))$ можно представить в виде $b\varphi'(b^{-1})$ для некоторого автоморфизма φ'. Следовательно, φ-пространство X переводится в φ'-пространство X'.

Теорема 13. Пусть X – симметрическое φ-пространство, S_{x_0} – симметрия $x_0 \in X$. Тогда $S_{x_0}(X) = X$.

Доказательство. Пусть $a\varphi(a^{-1}) \in X$, $x_0 = b\varphi(b^{-1})$. $S_{x_0}(a\varphi(a^{-1})) =$ $= x_0(a\varphi(a^{-1}))^{-1}x_0 = b\varphi(b^{-1})\varphi(a)a^{-1}b\varphi(b^{-1})$.

Пусть $c = b\varphi(b^{-1})\varphi(a)$, $c^{-1} = \varphi(a^{-1})\varphi(b)b^{-1}$, $\varphi(c^{-1}) = a^{-1}b\varphi(b^{-1})$ и, следовательно, $S_{x_0}\left(a\varphi(a^{-1})\right) = c\varphi(c^{-1}) \in X$. Ч. т. д.

Рассмотрим примеры φ-пространства для группы S_4.

Пусть инволютивный автоморфизм группы S_4 задается формулой $\varphi : a \to (12)a(12)$. Рассмотрим пространство $X = \{a\varphi(a^{-1})\}$.

Рассматривая последовательно вместо a все элементы группы S_4, получим, что φ-пространство $X_{(12)}$ состоит из элементов:

$$X_{(12)} = \{\varepsilon, (132), (123), (143), (134), (13)(24)\}.$$

Аналогично получим:

$$X_{(13)} = \{\varepsilon, (132), (123), (143), (134), (13)(24)\},$$
$$X_{(14)} = \{\varepsilon, (143), (142), (134), (124), (14)(23)\},$$
$$X_{(23)} = \{\varepsilon, (123), (234), (213), (243), (23)(14)\},$$
$$X_{(24)} = \{\varepsilon, (124), (243), (142), (234), (24)(13)\},$$
$$X_{(34)} = \{\varepsilon, (134), (143), (234), (243), (12)(34)\},$$
$$X_{(12)(34)} = \{\varepsilon, (13)(24), (14)(23)\},$$
$$X_{(13)(24)} = \{\varepsilon, (12)(34), (14)(23)\},$$
$$X_{(14)(24)} = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24)\},$$
$$X_{(\varepsilon)} = \{\varepsilon\}.$$

Заключение

Введенное в работе понятие симметрии конечной группы позволяет получить новые характеристики подгрупп конечной группы, что, в свою очередь, позволит сделать классификацию этих подгрупп. Вводится новое понятие φ-пространства как подмножества конечной группы, полученного с помощью автоморфизма φ этой группы, и изучаются его свойства.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов : учеб. пособие / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.

2. Монахов, В. С. Введение в теорию групп : тексты лекций по курсу «Алгебра и теория чисел» / В. С. Монахов. – Минск, 1990. – 71 с.

3. Богопольский, О. В. Введение в теорию групп / О. В. Богопольский. – М. ; Ижевск : ИКИ, 2002.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedienije v tieoriju koniechnykh grupp i ikh klassov : uchieb. posobije / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk., 2006. – 207 s.

2. Monakhov, V. S. Vviedienije v tieoriju grupp : tieksty likcij po kursu «Algiebra i tieorija chisiel» / V. S. Monakhov. – Minsk, 1990. – 71 s.

3. Bogopol'skij, O. V. Vviedienije v tieoriju grupp / O. V. Bogopol'skij. – M. ; Izhevsk : IKI, 2002.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.04.2023