УДК 519.6 + 517.983.54

Олег Викторович Матысик
канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Oleg Matysik
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: matysikoleg@mail.ru

АПОСТЕРИОРНЫЙ ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В НЕЯВНОЙ СХЕМЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Для решения линейных операторных уравнений первого рода с ограниченным несамосопряженным оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявная итерационная схема. Для этого метода обосновывается возможность применения правила останова по поправкам, что делает предложенный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость метода и получена оценка для момента останова. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении линейных операторных уравнений, а также при решении прикладных некорректных задач.

Ключевые слова: *некорректное уравнение первого рода, неявная итерационная схема, гильбертово пространство, ограниченный и несамосопряженный оператор, правило останова по поправкам.*

A Posteriori Choice of the Regularization Parameter in an Implicit Iteration Scheme for Solving Ill-Posed Problems with a Non-Self-Adjoint Operator

An implicit iterative scheme is proposed for solving linear operator equations of the first kind with a bounded non-self-adjoint operator in a Hilbert space. For this method, the possibility of applying the stop rule on amendments is justified, which makes the proposed method effective even when there is no information about the source-like representativeness of the exact solution. In this paper, the convergence of the method is proved and an estimate for the stopping moment is obtained. The results obtained can be used in theoretical studies of the solution of linear operator equations, and solving ill-posed problems applied.

Key words: *ill-posed equation of the first kind, implicit iteration scheme, Hilbert space, bounded and non-self-adjoint operator, stop rule by amendments.*

Введение

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач.

Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике и управлении может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \tag{1}$$

с заданным оператором $A: X \to Y$ и элементом y, X и Y – метрические пространства, а в особо оговариваемых случаях – банаховы или даже гильбертовы. Ж. Адамаром (J. Hadamard) [1] было введено следующее понятие корректности:

Определение. *Задачу отыскания решения* $x \in X$ *уравнения* (1) *называют* ***корректной*** *(или* ***корректно поставленной****, или* ***корректной по Адамару****), если при любой фиксированной правой части* $y = y_0 \in Y$ *уравнения* (1) *его решение*:

а) существует в пространстве X *;*

б) определено в пространстве X *однозначно;*

*в) устойчиво в пространстве X, т. е. непрерывно зависит от правой части $y \in Y$. В случае нарушения любого из этих условий задачу называют **некорректной (некорректно поставленной)**; более конкретно при нарушении условия в) ее принято называть **неустойчивой**.*

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора A^{-1} на всем пространстве Y.

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались. Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения первого рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2, обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии и т. д.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы, поскольку они легко реализуются на ПЭВМ. Различные итерационные схемы решения некорректно поставленных задач были предложены в работах [2–13].

В настоящей статье предлагается неявная итерационная схема решения некорректных задач в гильбертовом пространстве и обоснована возможность применения к ней правила останова по поправкам.

Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным *явным методом итераций Ландвебера* [2] $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right)$, $x_{0,\delta} = 0$ показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле *метод Ландвебера* предпочтительнее рассматриваемого неявного метода. Однако предлагаемый неявный метод обладает следующим важным достоинством. В *методе Ландвебера* на параметр α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$, что может привести на практике к необходимости большого числа итераций. В предлагаемой неявной схеме итераций ограничений сверху на $b > 0$ нет. Это позволяет считать $b > 0$ произвольно большим (независимо от $\|A\|$), в связи с чем оптимальную оценку погрешности для неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций.

Рассмотренный в статье неявный итерационный метод найдет практическое применение в прикладной математике: он может быть использован для решения задач, встречающихся в теории оптимального управления, математической экономике, геофизике, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, диагностике плазмы, в наземной или воздушной геологоразведке, при решении обратной кинематической задачи сейсмики, космических исследованиях (спектроскопии) и медицине (компьютерной томографии).

Основная часть

1. Постановка задачи

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{2}$$

где A – оператор несамосопряженный и ограниченный. Предполагается, что нуль не является собственным значением оператора A. Однако нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (2) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части y уравнение имеет единственное решение x. Будем искать его, используя неявную схему итераций

$$x_{n+1} = \left[\left(A^*A\right)^4 + B \right]^{-1} \left[Bx_n + \left(A^*A\right)^3 A^*y \right], \; x_0 = 0, \tag{3}$$

где I – единичный оператор, а B – ограниченный вспомогательный самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмем оператор $B = bI, b > 0$. Обычно правая часть уравнения неизвестна, а вместо нее известно y_δ, такое что $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Тогда приближения (3) примут вид

$$z_{n+1} = Cz_n + Dy_\delta + Cu_n, \; z_0 \in H, \tag{4}$$

где u_n – ошибки при вычислении итераций $\left(\|u_n\| \le \beta\right)$, $C = \left[\left(A^*A\right)^4 + B \right]^{-1} B,$

$D = \left[\left(A^*A\right)^4 + B \right]^{-1} \left(A^*A\right)^3 A^*.$

Ранее [14] была изучена сходимость схемы итераций (3) с апостериорным выбором числа итераций (останов по малости невязки) для ограниченного и самосопряженного оператора A. При возмущениях в правой части (2) там доказано, что при условии $b > 0$ метод (3) сходится и в предположении, что точное решение x уравнения (2) истокообразно представимо, получены апостериорные оценка погрешности метода и оценка момента останова.

2. Правило останова по поправкам.

В том случае, когда истокопредставимость точного решения неизвестна, метод (4) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по поправкам [5–6; 8]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим неравенствами

$$\begin{aligned} &\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, \quad (n < m), \\ &\|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon. \end{aligned} \tag{5}$$

Покажем, что метод (4) с правилом останова (5) сходится. Справедлива

Лемма 1. *Пусть приближение* ω_n *определяется условиями*

$$\omega_0 = z_0, \; \omega_{n+1} = C\omega_n + Dy + Cu_n, \; n \ge 0. \tag{6}$$

Тогда справедливо неравенство $\sum\limits_{k=0}^{n} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2.$

Доказательство. Из (6) при $n = k$ имеем $Cu_k = \omega_{k+1} - C\omega_k - Dy.$ Отсюда, используя равенство $A^*Ax = A^*y$, получим

$$u_k = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - C^{-1}Dy = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k -$$
$$-\left[\left(A^*A\right)^4 + B\right]\left[\left(A^*A\right)^4 + B\right]^{-1}\left(A^*A\right)^3 A^*y = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - \left(A^*A\right)^4 x =$$
$$= C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - C^{-1}(E-C)x = C^{-1}(\omega_{k+1} - x) - (\omega_k - x).$$

Обозначим $\Delta_k = \omega_k - x$, тогда $u_k = C^{-1}\Delta_{k+1} - \Delta_k$, откуда $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_{k+1} - C\Delta_k, \Delta_{k+1} - C\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) -$$
$$-2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_{k+1}, C\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\sum_{k=0}^{n-1}\left(C^{\frac{1}{2}}\Delta_{k+1}, C^{\frac{1}{2}}\Delta_k\right). \tag{7}$$

Оценивая абсолютную величину последнего слагаемого правой части (7) по неравенству Коши – Буняковского, приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}, \; n \geq 1. \tag{8}$$

Покажем, что $(E-C)\Delta_k = \omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k$, $k \geq 0$. Имеем $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$, $\Delta_k + Cu_k = \Delta_k + \Delta_{k+1} - C\Delta_k$, тогда получим $\Delta_k + Cu_k = (E-C)\Delta_k + \Delta_{k+1}$, $\omega_k - x + Cu_k = (E-C)\Delta_k + \omega_{k+1} - x$, отсюда следует, что

$$(E-C)\Delta_k = \omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k, \; k \geq 0. \tag{9}$$

Используя равенство (9), запишем неравенство (8) в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k, C\Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k) +$$
$$+2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} = -(\Delta_0, \Delta_0) +$$
$$+2\sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k, (E-C)\Delta_k) + 2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) -$$
$$-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} = -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k, (E-C)\Delta_k) + \gamma_n,$$

где $\gamma_n = 2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)-(C\Delta_n,C\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}$. Нетрудно показать, что $\gamma_n \ge 0$ при любых $\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_n$. Тогда $\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \ge -(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k)$. Используя равенство (9), получим $\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \ge -(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}\|\omega_k-\omega_{k+1}+Cu_k\|^2$, откуда вытекает $\sum_{k=0}^{n}\|\omega_k-\omega_{k+1}+Cu_k\|^2 \le \|\omega_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2$. Лемма 1 доказана.

Имеет место

Лемма 2. *При* $\forall\omega_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\|\omega_n-\omega_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta. \tag{10}$$

Доказательство. Для доказательства леммы 2 воспользуемся теоремой:

Теорема 1 (Тёплица). *Пусть выполняются условия*: 1) $P_{n_k} \ge 0$; 2) $\sum_{k=1}^{n}P_{n_k}=1$; 3) $\lim_{n\to\infty}P_{n_k}=0$ *для любого фиксированного* k; 4) $\lim_{n\to\infty}x_n=a$. *Тогда* $(t_n)=\left(\sum_{k=1}^{n}P_{n_k}x_k\right), n\in N$ *сходится* и $\lim_{n\to\infty}t_n=a$.

Доказательство. Из 4) имеем $\lim_{n\to\infty}x_n=a$, поэтому $(\forall\varepsilon>0)$, $(\exists n_0\in N),(\forall n\in N, n>n_0)$, что $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. Так как любая сходящаяся последовательность ограничена, то $(\exists M>0)$, $(\forall n\in N)$, что $|x_n|\le M$, поэтому получим $|x_n-a|\le|x_n|+|a|\le 2M$, значит, $|x_n-a|\le 2M$.

Из 3) $\lim_{n\to\infty}P_{n_k}=0$ для любого фиксированного k, поэтому $\exists n_0'>n_0$, что $P_{n_k}<\frac{\varepsilon}{4n_0M}$, $k=\overline{1,n_0}$ для $\forall n>n_0'$.

Таким образом, справедливо записать:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}P_{n_k}x_k-a\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}P_{n_k}x_k-\sum_{k=1}^{n}P_{n_k}a\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}P_{n_k}(x_k-a)\right|\le\sum_{k=1}^{n}P_{n_k}|x_k-a|=$$

$$=P_{n_1}|x_1-a|+...+P_{n_{n_0}}|x_{n_0}-a|+P_{n_{n_0+1}}|x_{n_0+1}-a|+...+P_{n_n}|x_n-a|\le$$

$$\le n_0\frac{\varepsilon}{4n_0M}\cdot 2M+\frac{\varepsilon}{2}\left(P_{n_{n_0+1}}+...+P_{n_n}\right)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Следовательно, для $(\forall n>n_0')$ $\lim t_n=a$. Теорема 1 доказана.

Используя теорему 1, рассмотрим и докажем следующие примеры:

Пример 1. Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n} = a$.

Доказательство. Воспользовавшись теоремой 1, имеем $P_{n_k} = \dfrac{1}{n},\ k = \overline{1,n},\ n \in N$.

Тогда 1) $P_{n_k} \ge 0$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} P_{n_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n} = 1$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} P_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Следовательно, получим

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{n_k} x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \text{ поэтому } \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Пример 2. Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n > 0$. Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}} = a$.

Доказательство. Из теоремы 1 имеем $P_{n_k} = \dfrac{\dfrac{1}{x_k}}{\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}$. Тогда справедливо писать: 1) $P_{n_k} \ge 0$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} P_{n_k} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}}{\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}} = 1$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} P_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x_k}}{\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}} = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} P_{n_k} x_k = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}} = a$.

Пример 3. Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n > 0$. Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} x_k} = a$.

Доказательство. Поскольку $\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \le \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = a$.

Опираясь на пример 3, получим

$$\lim_{n\to\infty}\|a_n\| = \underline{\lim}_{n\to\infty}\|a_n\| = \underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}\|a_k\|} = \underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\prod_{k=0}^{n-1}\|a_k\|^2} =$$

$$= \underline{\lim}_{n\to\infty}\left\{\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}\|a_k\|^2}\right\}^{1/2} \le \overline{\lim}_{n\to\infty}\left\{\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\|a_k\|^2}{n}\right\}^{1/2}. \tag{11}$$

А теперь вернемся непосредственно к доказательству леммы 2.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\|w_n - w_{n+1}\| \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\|w_n - w_{n+1} + Cu_n\| + \|C\|\beta \le (\text{см. } (11)) \le$$

$$\le \|C\|\beta + \overline{\lim}_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \le \|C\|\beta + \overline{\lim}_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\|w_0 - x\|^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \overline{\lim}_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\|w_0 - x\|^2 + \frac{1}{n}n\|C\|^2\beta^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \|C\|\beta = 2\|C\|\beta, \text{ так как } \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\|w_0 - x\|^2 = 0.$$

Отсюда следует (10), и, значит, лемма 2 доказана.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta,\beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) если $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta,$ *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta,$ $\|u_n\| \le \beta;$

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|D\|\delta + 2\|C\|\beta,$ *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta)(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0,$ $\delta,\beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|D\|\delta + \|C\|\beta^p\right),$ *где* $d > 1,$ $p \in (0,1),$ *то* $\lim_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0.$

Доказательство. а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1}C^k\left(C^{-1}Dy_\delta + u_{n-k-1}\right). \tag{12}$$

При $n = 1$ из $z_n = Cz_{n-1} + Dy_\delta + Cu_{n-1}$ имеем $z_1 = Cz_0 + Dy_\delta + Cu_0$, из (12) получим то же самое, т. е. при $n = 1$ формула (12) верна. Предположим, что (12) верна при $n = p$, т. е. $z_p = C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1}C^k\left(C^{-1}Dy_\delta + u_{p-k-1}\right),$ и докажем ее справедливость при $n = p + 1.$ Имеем

$$z_{p+1} = Cz_p + Dy_\delta + Cu_p = C\left(C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k \left(C^{-1}Dy_\delta + u_{p-k-1}\right)\right) + Dy_\delta + Cu_p =$$

$$= C^{p+1}z_0 + C^2\left(C^{-1}Dy_\delta + u_{p-1} + Dy_\delta + Cu_{p-2} + CDy_\delta + C^2u_{p-3} + \ldots +\right.$$

$$\left. + C^{p-2}Dy_\delta + C^{p-1}u_0\right) + Dy_\delta + Cu_p = C^{p+1}z_0 + C\left(Dy_\delta + Cu_{p-1} +\right.$$

$$\left. + CDy_\delta + C^2u_{p-2} + \ldots + C^{p-1}Dy_\delta + C^p u_0 + C^{-1}Dy_\delta + u_p\right) =$$

$$= C^{p+1}z_0 + C\sum_{k=0}^{p} C^k \left(C^{-1}Dy_\delta + u_{p-k}\right).$$

Таким образом, справедливость (12) доказана. Отсюда

$$\omega_n = C^n\omega_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1}Dy + u_{n-k-1}) = C^n\omega_0 + (E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1})Dy +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n\omega_0 + (E - C^n)(E - C)^{-1}(A^*A)^{-1}(E - C)A^*y +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n\omega_0 + A^{-1}(E - C^n)y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.$$

Учитывая, что $z_0 = \omega_0$, получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n z_0 + A^{-1}(E - C^n)y_\delta + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}z_0 - A^{-1}(E - C^{n+1})y_\delta - C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} =$$

$$= C^n\omega_0 + A^{-1}(E - C^n)y - A^{-1}(E - C^n)y + A^{-1}(E - C^n)y_\delta +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}\omega_0 - A^{-1}(E - C^{n+1})y + A^{-1}(E - C^{n+1})y - A^{-1}(E - C^{n+1})y_\delta -$$

$$- C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} = \omega_n - \omega_{n+1} + A^{-1}C^n(E - C)(y_\delta - y) = \omega_n - \omega_{n+1} + C^n D(y - y_\delta).$$

Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \le \|\omega_n - \omega_{n+1}\| + \|C^n D(y - y_\delta)\|. \tag{13}$$

Обозначим $\sigma = D(y - y_\delta)$, тогда $\|C^n D(y - y_\delta)\| = \|C^n\sigma\| = \left\| \int\limits_{-M}^{M} \frac{b^n}{\left(\lambda^4 + b\right)^n} dE_\lambda\sigma \right\| \le \left\| \int\limits_{0}^{M} \frac{b^n}{\left(\lambda^4 + b\right)^n} dE_\lambda\sigma \right\| +$ $+ \left\| \int\limits_{-M}^{0} \frac{b^n}{\left(\lambda^4 + b\right)^n} dE_\lambda\sigma \right\| = \|I_1\| + \|I_2\|$. Каждый из полученных интегралов разобьем на два интеграла $I_1 = \int\limits_{0}^{\varepsilon_0} \frac{b^n}{\left(\lambda^4 + b\right)^n} dE_\lambda\sigma + \int\limits_{\varepsilon_0}^{M} \frac{b^n}{\left(\lambda^4 + b\right)^n} dE_\lambda\sigma.$ Так как $\frac{b}{\lambda^4 + b} \le q(\varepsilon_0) < 1$ для $\lambda \ge \varepsilon_0$, то имеем $\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{M}\frac{b^n}{\left(\lambda^4+b\right)^n}dE_\lambda\sigma\right\|\le q^n(\varepsilon_0)\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{M}dE_\lambda\sigma\right\|\le q^n(\varepsilon_0)\|\sigma\|\to 0, n\to\infty.$ А для первого интеграла $\left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}\frac{b^n}{\left(\lambda^4+b\right)^n}dE_\lambda\sigma\right\|\le\left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}dE_\lambda\sigma\right\|=\left\|E_{\varepsilon_0}\sigma\right\|\to 0, \varepsilon_0\to 0$ в силу свойств спектральной функции. Таким образом, $\|I_1\|\to 0,\quad n\to\infty.$ Аналогично $\|I_2\|\to 0,\quad n\to\infty.$ Следовательно, $\left\|C^nD(y-y_\delta)\right\|\to 0, n\to\infty.$ Поэтому $\varliminf\limits_{n\to\infty}\|z_n-z_{n+1}\|=\varliminf\limits_{n\to\infty}\|\omega_n-\omega_{n+1}\|.$ Из леммы 2 вытекает неравенство $\varliminf\limits_{n\to\infty}\|z_n-z_{n+1}\|=\varliminf\limits_{n\to\infty}\|\omega_n-\omega_{n+1}\|\le 2\|C\|\beta.$

Следовательно, условием $\varepsilon(\delta,\beta)>2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0\in H$ и любых $y_\delta, \|y-y_\delta\|\le\delta$ и u_n, $\|u_n\|\le\beta.$

б) Рассмотрим последовательность (6) и определим момент останова m' условием

$$\left.\begin{aligned}&\|\omega_n-\omega_{n+1}\|>\varepsilon-\|D\|\delta,\ (n<m'),\\&\|\omega_{m'}-\omega_{m'+1}\|\le\varepsilon-\|D\|\delta.\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

Из (13) следует, что $m\le m'.$ Из леммы 1 при $n=m'$ получим $\sum\limits_{k=0}^{m'}\|\omega_k-\omega_{k+1}+Cu_k\|^2\le\|\omega_0-x\|^2+\sum\limits_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2,$ поэтому справедливо записать $\sum\limits_{k=0}^{m'-1}\|\omega_k-\omega_{k+1}+Cu_k\|^2\le\|\omega_0-x\|^2+\sum\limits_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2.$ Отсюда получим

$$\sum_{k=0}^{m'-1}\left(\|\omega_k-\omega_{k+1}\|-\|C\|\beta\right)^2\le\|\omega_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2.$$

Так как по (14) при $n<m'$ имеем $\|\omega_n-\omega_{n+1}\|>\varepsilon-\|D\|\delta,$ то $m'\left(\varepsilon-\|D\|\delta-\|C\|\beta\right)^2\le\|\omega_0-x\|^2+m'\|C\|^2\beta^2.$ Учитывая, что $\omega_0=z_0$ и $m\le m',$ из последнего неравенства получим оценку для момента останова

$$m\le m'\le\frac{\|z_0-x\|^2}{(\varepsilon-\|D\|\delta-2\|C\|\beta)(\varepsilon-\|D\|\delta)}.$$

в) Докажем, что

$$x=C^nx+\sum_{k=0}^{n-1}DC^ky.\tag{15}$$

Предположим, что (15) верно, тогда

$$x-C^nx=D\left(E+C+C^2+\ldots+C^{n-1}\right)y,\ (E-C^n)x=D(E-C^n)(E-C)^{-1}y,$$
$$(E-C^n)x=A^{-1}(E-C)(E-C^n)(E-C)^{-1}Ax,\ \ (E-C^n)x=(E-C^n)x.$$

Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (15) доказана. Из (12) вычтем (15), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1}D(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]. \tag{16}$$

Отсюда $\Delta_n = C^n\Delta_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1}D(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]$, где $\Delta_n = z_n - x$ и $\Delta_0 = z_0 - x$. Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \le \left\|C^n\Delta_0\right\| + \left(\|D\|\delta + \|C\|\beta\right)n. \tag{17}$$

В частности, (17) справедливо и при $n = m$. Если $m \to \infty$ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$, тогда, как показано ранее, $\left\|C^m\Delta_0\right\| \to 0, m \to \infty.$ Поэтому для доказательства $\|z_m - x\| \to 0, \delta \to 0, \beta \to 0$ достаточно показать, что $m\left(\|D\|\delta + \|C\|\beta\right) \to 0,$ $m \to \infty, \delta \to 0, \beta \to 0$. Из (16) получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n(E - C)(z_0 - x) - Cu_n - C^n D(y_\delta - y) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k (E - C)u_{n-k-1.} \tag{18}$$

Так как спектр оператора $C = \left[\left(A^*A\right)^4 + B\right]^{-1} B$ принадлежит [0,1], то можно доказать, что $\left\|C^n(E - C)\right\| \le \dfrac{1}{n+1}$. Поэтому из (18) получим при $n = m - 1$

$$\begin{aligned}
\|z_{m-1} - z_m\| &\le \left\|C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E - C)(z_0 - x)\right\| + \left\|C^{m-1}D(y_\delta - y)\right\| + \left\|Cu_{m-1}\right\| + \\
&+ \left\|C\sum_{k=0}^{m-2} C^k (E - C)u_{m-k-2}\right\| \le \left\|C^{\frac{m-1}{2}}(E - C)\right\| \left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| + \|C\|\beta + \|D\|\delta + \\
&+ \|C\|\beta\sum_{k=0}^{m-2}\frac{1}{k+1} \le \frac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| + \|D\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m),
\end{aligned}$$

т. к. $\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k} \le 1 + \ln m$ [15].

Так как по условию теоремы $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d\left(\|D\|\delta + \|C\|\beta^p\right), d > 1, p \in (0,1),$ то при всех достаточно малых δ, β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta, \beta) > \|D\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из б) получим $m \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|D\|\delta)}$.

Поскольку $\left\|z_{m-1} - z_m\right\| > \varepsilon$, то $\varepsilon \le \frac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| + \|D\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta$. Отсюда получим, что $m \le \frac{2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\|}{\varepsilon - \|D\|\delta - \|C\|\beta(2 + \ln m)}$.

Умножим обе части последнего равенства на $\|D\|\delta + \|C\|\beta$, получим $m\left(\|D\|\delta + \|C\|\beta\right) \le \frac{2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\|\left(\|D\|\delta + \|C\|\beta\right)}{\varepsilon - \|D\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln\frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|D\|\delta)}\right]}$. При $m \to \infty$ множитель $\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| \to 0$, а дробь $\frac{2(\|D\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|D\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln\frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|D\|\delta)}\right]}$ ограничена при $\delta, \beta \to 0$. Поэтому $m\left(\|D\|\delta + \|C\|\beta\right) \to 0$, при $m \to \infty$, δ, $\beta \to 0$. Отсюда и из неравенства (17) при $m \to \infty$ получим

$$\lim_{\delta,\beta \to 0}\|\Delta_m\| = \lim_{\delta,\beta \to 0}\|z_m - x\| = \lim_{\delta,\beta \to 0}\left(\left\|C^m\Delta_0\right\| + m(\|D\|\delta + \|C\|\beta)\right) = 0.$$

Итак, доказано, что $\lim\limits_{\delta,\beta \to 0}\left\|z_m - x\right\| = 0$ при $m \to \infty$, т. е. метод итераций (4) с правилом останова (5) сходится в исходной норме гильбертова пространства.

Теорема 2 доказана.

Заключение

В настоящей статье изучены некоторые свойства предложенной неявной схемы итераций решения некорректных задач: доказана сходимость приближений с апостериорным выбором параметра регуляризации (останов по поправкам) в исходной норме гильбертова пространства в случае ограниченного несамосопряженного оператора и получена оценка для апостериорного момента останова.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.

2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.

3. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.

4. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.

5. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2008. – 196 с.

6. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.

7. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2014. – № 2 (116). – P. 89–95.

8. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.

9. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr. 3. – P. 373–389.

10. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – Nr. 2 (119). – P. 33–41.

11. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr. 300. – P. 290–299.

12. Matysik, O. V. Solving ill-posed linear operator equations with an explicit iterative method in energetic norm / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2021. – Nr. 397. – P. 271–279.

13. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr. 416. – P. 1–12.

14. Матысик, О. В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявной итерационной процедуры решения некорректных уравнений с апостериорным выбором параметра регуляризации / О. В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2022. – № 1. – С. 82–90.

15. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.

REFERENCES

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.

2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.

3. Jemielin, I. V. K tieorii niekorrektnykh zadach / I. V. Jemielin, M. A. Krasnosiel'skij // Dokl. AN SSSR. – 1979. – T. 244, № 4. – S. 805–808.

4. Samarskij, A. A. Chisliennyje mietody rieshenija obratnykh zadach matiematichieskoj fiziki / A. A. Samarskij, P. N. Vabishchievich. – M. : Editorial URSS, 2004. – 480 s.

5. Савчук, В. Ф. Rieguliarizacija opieratornykh uravnienij v gilbiertovom prostranstve / V. F. Savchuк, O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2008. – 196 s.

6. Matysik, O. V. Javnyje i niejavnyje iteracionnyje procedury rieshenija niekorriektno postavliennykh zadach / O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2014. – 213 s.

7. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2014. – № 2 (116). – P. 89–95.

8. Matysik, O. V. Iteracionnaja rieguliarizacija niekorrektnykh zadach / O. V. Matysik. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 s.

9. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr. 3. – P. 373–389.

10. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – Nr. 2 (119). – P. 33–41.

11. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr. 300. – P. 290–299.

12. Matysik, O. V. Solving ill-posed linear operator equations with an explicit iterative method in energetic norm / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2021. – Nr. 397. – P. 271–279.

13. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr. 416. – P. 1–12.

14. Matysik, O. V. Skhodimost' v gilbiertovom prostranstvie niejavnoj iteracionnoj procedury rieshenija niekorriektnykh uravnienij s aposteriornym vyborom paramietra riegulia-rizacii / O. V. Matysik // Viesn. Bresc. un-ta. Sier, 4. Fizika. Matematyka. – 2022. – № 1. – S. 82–90.

15. Gradshtejn, I. S. Tablicy integralov, summ, riadov i proizviedienij / I. S. Gradshtejn, I. M. Ryzhyk. – M. : Nauka. – 1971. – 1108 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.03.2023