МАТЭМАТЫКА

УДК 512.542

Наталья Витальевна Артеменко
магистрант физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Natalia Artemenko
Master Student of the Faculty of Physics and Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University
email: artemenkonatasha@outlook.com

О ПРОИЗВОДНОЙ ДЛИНЕ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ПОРЯДКА, СВОБОДНОГО ОТ ЧЕТВЕРТЫХ СТЕПЕНЕЙ И НЕ ПРЕВЫШАЮЩЕГО 2000*

Натуральное число n называется свободным от четвертых степеней, если p^4 не делит n для всех простых p. Получена точная оценка производной длины конечных разрешимых групп порядка, свободного от четвертых степеней и не превышающего 2000.

Ключевые слова: *разрешимая группа, порядок, свободный от четвертых степеней, производная длина.*

On the Derived Length of Finite Soluble Groups in which the Order is Fourth Powers Free and Not at Most 2000

A natural number n is called free of fourth powers if p^4 it does not divide n for all primes p. The accurate estimate of the derived length of a finite soluble groups in which the order is fourth powers free and at most 2000 is obtained.

Ke ywords: *soluble group, order of fourth powers free, derived length.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Для группы G можно построить цепочку коммутантов

$$G \supseteq G' \supseteq (G')' \supseteq G^{(i)} \supseteq G^{(i+1)} \supseteq \dots .$$

Здесь G' – коммутант группы G и $G^{(i+1)} = (G^{(i)})'$. Если существует номер n такой, что $G^{(n)} = 1$, то группа G называется разрешимой. Наименьшее натуральное n, для которого $G^{(n)} = 1$, называется производной длиной группы G и обозначается $d(G)$.

Пусть m и n – натуральные числа. Говорят, что n свободно от m-х степеней, если p^m не делит n для всех простых p. При $m = 4$ говорят, что n свободно от четвертых степеней.

В работе [2] были получены точные оценки производной, нильпотентной и p-длины конечных разрешимых групп порядка, свободного от четвертых степеней. В частности, производная длина таких групп не превышает 6. Данную оценку можно уточнить, если рассмотреть группы порядка, не превышающего 2000.

**Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025» (№ госрегистрации 20211467) при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь).*

С использованием системы компьютерной алгебры GAP [3] был разработан алгоритм для определения наибольшего значения производной длины разрешимых групп порядка, свободного от четвертых степеней и не превышающего 2000.

Теорема. *Пусть* G *– разрешимая группа порядка, свободного от четвертых степеней и не превышающего* 2000. *Тогда производная длина группы* G *не превышает* 4.

Справедливость теоремы подтверждают вычисления в системе GAP. С использованием методов абстрактной теории групп и теории формаций в настоящей статье получено доказательство приведенной выше теоремы.

Вспомогательные результаты

Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе.

Обозначим через $[A]B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B, $O_p(G)$ – наибольшую нормальную p-подгруппу группы G, $O_{p'}(G)$ – наибольшую нормальную p'-подгруппу группы G. Через Z_n будем обозначать циклическую группу порядка n.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [1; 4].

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация всех абелевых групп обозначается через $\mathfrak{A}$. Очевидно, что $G \in \mathfrak{A}^k$ тогда и только тогда, когда $d(G) \le k$.

Лемма 1. [4, лемма VI.8.1; 5, теорема 4B]. *Пусть* H *– неприводимая подгруппа нечетного порядка группы* $GL(n, p)$. *Тогда:*

1) *если* $n = 2$*, то* H *циклическая и* $|H|$ *делит* $(p^2 - 1)$*;*

2) *если* $n = 3$*, то* H *метабелева.*

Лемма 2. [6, леммы 10, 11].

1) *Если* H *– разрешимая* A_4 *-свободная подгруппа* $GL(3,3)$ *и* $O_3(H) = 1$, *то* $d(H) \le 2$.

2) *Если* H *– разрешимая* A_4 *-свободная подгруппа* $GL(3,5)$ *и* $O_5(H) = 1$, *то* $d(H) \le 3$.

Вычисления в системе GAP устанавливают справедливость следующих лемм.

Лемма 3. *Расширение элементарной абелевой группы порядка 4 при помощи симметрической группы* S_3 *изоморфно одной из следующих групп:*

$$Z_2 \times [Z_3]Z_4,\ [Z_6 \times Z_2]Z_2,\ Z_2 \times Z_2 \times S_3,\ S_4.$$

Лемма 4. *Если* H *– собственная подгруппа симметрической группы* S_4, *то* $H \simeq \{Z_2, Z_3, E_4, Z_4, S_3, D_8, A_4\}$. *В частности,* $d(H) \le 2$.

Лемма 5. Пусть G *– группа порядка* 24. *Тогда* G *изоморфна одной из следующих групп:*

$$Z_8 \times Z_3,\ Z_{12} \times Z_2,\ Z_6 \times Z_2 \times Z_2,\ [Z_3]Z_8,\ SL(2,3),\ [Z_3]Q_8,\ Z_4 \times S_3,\ D_{24},\ Z_2 \times Z_3 \times Z_4,$$
$$[[Z_6]Z_2]Z_2,\ D_8 \times Z_3,\ Q_8 \times Z_3,\ S_4,\ A_4 \times Z_2,\ D_{12} \times Z_2.$$

В частности, $d(G) \le 3$.

Лемма 6. *Если* H *– разрешимая неприводимая подгруппа группы* $GL(2,7)$ *и* $|H| = 72$, *то*

$$H = \{Z_3 \times SL(2,3); Z_3 \times [Z_6 \times Z_2]Z_2\}.$$

В частности, $d(H) \le 3$.

Лемма 7. *Пусть* H *– неприводимая разрешимая подгруппа группы* $GL(2,p)$. *Тогда* $d(H) \le 3$ *или* $|H| = 24 \cdot k$, *где* k *делит* $p-1$.

Доказательство. Воспользуемся доказательством, которое приведено в [7, лемма 3]. Пусть H содержится в максимальной разрешимой подгруппе M группы $GL(2,p)$. Очевидно, M – неприводимая подгруппа.

Если M импримитивна или M примитивна и ее максимальная абелева нормальная подгруппа F изоморфна мультипликативной группе поля $GF(p^2)$, то $d(M) \le 2$. Поэтому $d(H) \le 2$.

Пусть M примитивна и ее максимальная абелева нормальная подгруппа $F = GF(p)^* E_2$. Подгруппа F состоит из скалярных матриц, поэтому F содержится в центре M. В M существует нормальная подгруппа A такая, что A содержит F и A/F изоморфна элементарной абелевой группе порядка 4, а M/A изоморфна симметрической группе степени 3. Тогда существует нормальный ряд

$$1 \le F \le A \le M$$

такой, что M/F является расширением элементарной абелевой группы A/F порядка 4 при помощи группы M/A изоморфной S_3. По лемме 3 возможны следующие случаи:

$$M/F \simeq \{Z_2 \times ([Z_3]Z_4), [Z_6 \times Z_2]Z_2, Z_2 \times Z_2 \times S_3, S_4\}.$$

Во всех, кроме последнего случая, $M/F \in \mathfrak{A}^2$ и $d(M/F) \le 2$. Пересечем нормальный ряд $1 \le F \le A \le M$ с подгруппой H, получим

$$1 \lhd F \cap H \lhd A \cap H \lhd M \cap H = H.$$

Если $M/F \in \mathfrak{A}^2$, то $H/F \cap H \simeq HF/F \in \mathfrak{A}^2$ и $H \in \mathfrak{A}^3$. Поэтому $d(H) \le 3$.

Пусть $M/F \simeq S_4$. Если $HF/F < M/F$, то по лемме 4

$$HF/F \simeq \{Z_2, Z_3, E_4, Z_4, S_3, D_8, A_4\}.$$

Поэтому $H/F \cap H \simeq HF/F \in \mathfrak{A}^2$ и $H \in \mathfrak{A}^3$. Значит, $d(H) \le 3$.

Пусть $HF/F = M/F$. Так как $|M| = 24 \cdot (p-1)$, то $|H| = 24 \cdot |F \cap H|$ и $|F \cap H|$ делит $p-1$.

Других ситуаций для M нет. Лемма доказана.

Доказательство теоремы

Пусть N_1 и N_2 – минимальные нормальные подгруппы группы G. Тогда группа G изоморфна фактор-группе $G/N_1 \cap N_2$. В свою очередь, по [1, лемма 2.33] фактор-группа $G / N_1 \cap N_2$ изоморфна подгруппе прямого произведения фактор-групп G / N_1 и G / N_2. Поскольку для всех фактор-групп выполняются условия теоремы, то $G / N_1 \in \mathfrak{A}^4$ и $G / N_2 \in \mathfrak{A}^4$. Поэтому производная длина группы G не превышает 4. Значит, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа и подгруппа Фиттинга $F(G)$ группы G является подгруппой некоторой силовской p-подгруппы G_p группы G.

Пусть $\Phi(G) \neq 1$, тогда $\Phi(G) < F(G) \leq G_p$. Так как порядок группы G свободен от четвертых степеней, то производная длина подгруппы $F(G)$ не превышает 2, а порядок фактор-группы $F(G) / \Phi(G)$ равен либо p, либо p^2. По теореме 4.24 [1] фактор-группа $F(G) / \Phi(G)$ либо минимальная нормальная подгруппа группы $G / \Phi(G)$, либо $F(G) / \Phi(G)$ есть прямое произведение минимальных нормальных фактор-групп $N_1 / \Phi(G)$ и $N_2 / \Phi(G)$ порядка p группы $G / \Phi(G)$.

Если $|F(G) / \Phi(G)| = p,$ то $G / F(G)$ изоморфна фактор-группе $(G / \Phi(G)) / (F(G) / \Phi(G))$, которая, в свою очередь, по [1, теорема 2.8] изоморфна циклической группе, как группе автоморфизмов группы простого порядка p. Отсюда следует, что $G / F \in \mathfrak{A}$ и $d(G) \leq 3$.

Если $|F(G) / \Phi(G)| = p^2$ и $F(G) / \Phi(G)$ есть прямое произведение минимальных нормальных фактор-групп $N_1 / \Phi(G)$ и $N_2 / \Phi(G)$ порядка p группы $G / \Phi(G)$, то по [1, теорема 2.8] для каждого $N_i / \Phi(G)$ фактор-группа $G / \Phi(G) / C_{G/\Phi(G)}(N_i / \Phi(G))$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $Aut(N_i / \Phi(G)) \simeq Z_{p-1}$. По [1, лемма 2.33] фактор-группа $G / \Phi(G) / \bigcap_{i=1}^{2} C_{G/\Phi(G)}(N_i / \Phi(G))$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G / \Phi(G) / C_{G/\Phi(G)}(N_i / \Phi(G))$, $1 \leq i \leq 2$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором,
то

$$\bigcap_{i=1}^{2} C_{G/\Phi(G)}(N_i / \Phi(G)) = C_{G/\Phi(G)}(F(G) / \Phi(G)) = F(G) / \Phi(G)$$

и

$$G / \Phi(G) / \bigcap_{i=1}^{2} C_{G/\Phi(G)}(N_i / \Phi(G)) \simeq G / F .$$

Отсюда следует, что $G / F \in \mathfrak{A}$ и $d(G) \leq 3$.

Если $|F(G) / \Phi(G)| = p^2$ и $F(G) / \Phi(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G / \Phi(G)$, то фактор-группа $G / F(G)$ изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2, p)$. Из леммы 7 следует, что производная длина фактор-группы $G / F(G)$ не превышает 3 или $|G / F(G)| = 24 \cdot k$, где k делит $p - 1$. Очевидно, что в этом случае либо $d(G) \leq 4$, либо $|F(G)| = p^3$ и $|G| = 24 \cdot p^3 \cdot k$, где k делит $p - 1$. Так как порядок группы не превышает 2000, то $p \leq 3$. Противоречие, поскольку группа G свободна от четвертых степеней.

Если $\Phi(G)=1$, то подгруппа Фиттинга является минимальной нормальной подгруппой группы G и $C_G(F(G))=F(G)$. Поэтому $|F(G)|$ равен либо p, либо p^2, либо p^3.

Если $|F(G)|=p$, то по [1, теорема 2.8] $G/F(G)$ изоморфна циклической группе, как группе автоморфизмов группы простого порядка p и $G\in\mathfrak{A}^2$. Поэтому $d(G)\le 2$.

Если $|F(G)|=p^2$, то по [1, теорема 2.8] фактор-группа $G/F(G)$ изоморфна неприводимой разрешимой подгруппе группы $Aut(F(G))\simeq GL(2,p)$. Тогда по лемме 7 производная длина фактор-группы $G/F(G)$ не превосходит 3 или $|G/F(G)|=24\cdot k$, где k делит $p-1$.

Если $d(G/F(G))\le 3$, то $d(G)\le 4$. Если $|G/F(G)|=24\cdot k$, то $|G|=24\cdot p^2\cdot k$, где k делит $p-1$. Так как порядок группы G не превышает 2000, то $p\le 7$.

Если $p=2$, то $|G|=24\cdot 2^2\cdot k$. Противоречие, т. к. порядок группы G свободен от четвертых степеней.

Если $p=3$, то $|G|=24\cdot 3^2\cdot k$ и k делит $3-1=2$. Следовательно, $k=2$ или $k=1$. Если $k=2$, то порядок группы G не свободен от четвертых степеней. Противоречие. Если $k=1$, то $|G|=3^3\cdot 2^3$ и $|G/F(G)|=2^3\cdot 3=24$. По лемме 5 $G/F(G)\in\mathfrak{A}^3$ и $G\in\mathfrak{A}^4$. Следовательно, $d(G)\le 4$.

Если $p=5$, то $|G|=24\cdot 5^2\cdot k$ и k делит $5-1=4$. Следовательно, $k=4$, $k=2$ или $k=1$. В случаях, когда $k=2$ или $k=4$, порядок группы G не свободен от четвертых степеней. Противоречие. Значит, $k=1$ и $|G/F(G)|=24$. По лемме 5 $G/F(G)\in\mathfrak{A}^3$ и $G\in\mathfrak{A}^4$. Следовательно, $d(G)\le 4$.

Если $p=7$, тогда $|G|=24\cdot 7^2\cdot k$ и k делит $7-1=6$. Следовательно, либо $k=6$, либо $k=3$, либо $k=2$, либо $k=1$. Если k равно 2 или 6, то порядок группы G не свободен от четвертых степеней. Противоречие. Если $k=1$, то $|G/F(G)|=24$ и по лемме 5 $G/F(G)\in\mathfrak{A}^3$. Следовательно, $G\in\mathfrak{A}^4$ и $d(G)\le 4$. Если $k=3$, то $|G/F(G)|=72$. Следовательно, $G/F(G)$ изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2,7)$. Тогда по лемме 6 $G/F(G)\in\mathfrak{A}^3$. Значит, $G\in\mathfrak{A}^4$ и $d(G)\le 4$.

Если $|F(G)|=p^3$, то по [1, теорема 2.8] фактор-группа $G/F(G)$ изоморфна неприводимой разрешимой подгруппе полной линейной группы $Aut(F(G))\simeq GL(3,p)$. Кроме того, $G/F(G)$ – p'-группа.

Если $p=2$, то $G/F(G)$ – подгруппа нечетного порядка группы $GL(3,p)$. Тогда по лемме 1 $d(G/F(G))\le 2$ и $d(G)\le 3$.

Если $p=3$, то $G/F(G)$ – $3'$-группа и, следовательно, фактор-группа $G/F(G)$ является A_4-свободной группой. По лемме 2(1) $d(G/F(G))\le 2$ и $d(G)\le 3$.

Если $p=5$, то $G/F(G)$ – $5'$-группа и $|G/F(G)|\le 16$. Следовательно, фактор-группа $G/F(G)$ либо A_4-свободна, либо $G/F(G)\simeq A_4$. Если подгруппа $G/F(G)$ A_4-свободна, то по лемме 2(2) $d(G/F(G))\le 3$ и $d(G)\le 4$. Если $G/F(G)\simeq A_4$, то $d(G/F(G))\le 2$ и $d(G)\le 3$.

Если $p = 7$, то $|G/F(G)| \le 5$. Отсюда следует, что подгруппа $G/F(G)$ абелева и $d(G) \le 2$.

Очевидно, что при $p \ge 11$ группа G изоморфна подгруппе $F(G)$ и G абелева.

Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что оценка производной длины, полученная в теореме, точная.

Пример. С помощью системы компьютерной алгебры GAP [3] найдена группа $G = [S]D_8$ (IdGroup(G)=[216,87]), где S – экстраспециальная группа порядка 27, D_8 – диэдральная группа порядка 8. Очевидно, что $|G| = 216 = 2^3 \cdot 3^3$. Производная длина группы G равна 4.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.

2. Артеменко, Н. В. Конечные разрешимые группы порядка, свободного от четвертых степеней / Н. В. Артеменко, А. А. Трофимук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2021. – № 2. – С. 62–68.

3. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.12.1 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.gap-system.org.

4. Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967.

5. Palfy, P. P. Bounds for linear groups of odd order / P. P. Palfy // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2. – 1990. – Vol. 39, nr 23. – P. 253–263.

6. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

7. Монахов, В. С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская // Мат. заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedienije v tieoriju koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk., 2006. – 207 s.

2. Artiomienko, N. V. Koniechnyje razrieshimyje gruppy poriadka, svobodnogo ot chietviortykh stiepieniej / N. V. Artiomienko, A. Trofimuk // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fi-zika. Matematyka. – 2021. – № 2. – S. 62–68.

3. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.12.1 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.gap-system.org.

4. Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967.

5. Palfy, P. P. Bounds for linear groups of odd order / P. P. Palfy // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2. – 1990. – Vol. 39, nr 23. – P. 253–263.

6. Monakhov, V. S. O koniechnykh razrieshimykh gruppakh fiksirovannogo ranga / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Sib. mat. zhurn. – 2011. – T. 52, № 5. – S. 892–903.

7. Monakhov, V. S. O maksimal'nykh i silovskikh podgruppakh koniechnykh razrieshimykh grupp / V. S. Monakhov, Ye. Ye. Gribovskaja // Mat. zamietki. – 2021. – T. 70, №. 4. – S. 603–612.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 08.11.2022