

УДК 513.82

А. А. Юдов¹, Е. В. Кисилюк²¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии
и математического моделирования

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: modelmath@brsu.brest.by**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ
СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ
ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА 1R_6**

Целью исследования является нахождение образов стационарности для подгрупп Ли группы Ли вращений пространства 1R_6 , классификация однородных редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства 1R_6 и всех их редуктивных дополнений, вычисление тензоров кривизны и кручения инвариантных аффинных связностей, найденных редуктивных однородных пространств.

YUDOV, A. A, KISILYUK Ye. V.

**DIFFERENTIAL GEOMETRY OF HOMOGENEOUS SPACES
WITH STRUCTURE GROUP – THE LIE GROUP OF MOTIONS OF THE SPACE 1R_6**

The aim of the study is to find the images of stationarity for the Lie subgroups of the Lie group of rotations of the space 1R_6 , the classification of homogeneous reductive spaces with a fundamental group – the Lie group of motions of the space 1R_6 and all their reductive additions, calculation of curvature and torsion tensors of invariant affine connections, found reductive homogeneous spaces.

Введение

Геометрия однородных пространств является объектом исследования многих отечественных и зарубежных ученых уже на протяжении более ста лет. В этой области работали Э. Картан, Г. Вейль, П. К. Рашевский, К. Номидзу, Ш. Кобаяси, В. И. Ведерников, А. С. Феденко, И. В. Белько, В. Балащенко, С. Г. Кононов, А. А. Юдов и др. Среди однородных пространств особенно важные применения находит теория редуктивных однородных пространств с различными структурными группами, в частности с группами Ли движений (псевдо)евклидовых пространств различной размерности.

В работе исследуются однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений шестимерного пространства Лоренца.

1. Группа Ли G движений пространства 1R_6 и её алгебра Ли

Рассмотрим пространство 1R_6 – шестимерное пространство Лоренца.

Выберем в пространстве 1R_6 репер $\mathcal{E} = (0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$, причем $e_1^2 = -1, e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = e_6^2 = 1, (e_i, e_j) = 0, i \neq j$.

Произвольную точку M пространства 1R_6 в репере \mathcal{E} зададим координатами $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, которые будем записывать в виде $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T \equiv (X)_{\mathcal{E}}$.

На множестве реперов пространства 1R_6 действует группа Ли G движений, которая при заданном репере \mathcal{E} изоморфна группе матриц вида:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & & & & & & \\ t_2 & & & & & & \\ t_3 & & & A & & & \\ t_4 & & & & & & \\ t_5 & & & & & & \\ t_6 & & & & & & \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $t = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)^T$, $A - (6 \times 6)$ - матрица, причем $A^T {}^1E_6 A = {}^1E_6$, где знак T означает транспонирование, а матрица 1E_6 является диагональной матрицей, в левом верхнем углу которой стоит -1 , а остальные элементы на диагонали равны 1.

При движении, заданном матрицей (1), репер \mathcal{E} переходит в репер $\mathcal{E}' = (0, e_1', e_2', e_3', e_4', e_5', e_6') = (0', e')$, где $e' = eA, 0'(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = (T)_\mathcal{E}$, а точка M переходит в точку M' , имеющую в репере \mathcal{E}' такие же координаты, какие точка M имеет в репере \mathcal{E} .

Пусть $M'(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (X)_{\mathcal{E}'}, M(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)^T = (X')_\mathcal{E}$. Тогда получим: $\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} = e(T) + e'(X) = e(T) = eA(X) = e((T) + A(X))$. С другой стороны, $\overline{OM'} = e(X')$. Отсюда $(X') = (T) + A(X)$, т. е.

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)^T = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)^T + A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$$

или

$$(1, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)^T = \bar{A}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T. \quad (2)$$

Таким образом в пространстве R_5 действует слева группа Ли G , которая изоморфна группе матриц вида (1), действующих на точки пространства R_5 по формуле (2). Алгебру Ли \bar{G} этой группы можно отождествить с алгеброй Ли матриц вида:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_1 & & & & & & \\ \tau_2 & & & & & & \\ \tau_3 & & & B & & & \\ \tau_4 & & & & & & \\ \tau_5 & & & & & & \\ \tau_6 & & & & & & \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau & B \end{pmatrix} \right\},$$

где $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6)^T$, а матрица B удовлетворяет условию: $B^T {}^1E_6 + {}^1E_6 B = 0$.

Группа Ли H стационарности точки O и алгебра Ли \bar{H} этой группы будут задаваться матрицами вида:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & A & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \right\},$$

$$\bar{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & B & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right\}.$$

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H стационарности точки и абелевой группы T_6 параллельных переносов: $G = H \otimes T_6$.

Алгебра Ли \bar{G} является полупрямой суммой алгебры Ли \bar{H} группы Ли H и коммутативной алгебры Ли τ_6 группы Ли: $\bar{G} = \bar{H} \otimes \tau_6$.

Рассмотрим в алгебре Ли \bar{G} базис: i_1, i_2, \dots, i_{21} . Соответственно

$$\begin{aligned} i_1 &= E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{61}, i_6 = E_{71}, i_7 = E_{23} + E_{32}, \\ i_8 &= E_{24} + E_{42}, i_9 = E_{25} + E_{52}, i_{10} = E_{26} + E_{62}, i_{11} = E_{27} + E_{72}, i_{12} = \\ &= E_{34} - E_{43}, i_{13} = E_{35} - E_{53}, i_{14} = E_{36} - E_{63}, i_{15} = \\ &= E_{37} - E_{73}, i_{16} = E_{45} - E_{54}, \\ i_{17} &= E_{46} - E_{64}, i_{18} = E_{47} - E_{74}, i_{19} = E_{56} - E_{65}, i_{20} = E_{57} - E_{75}, i_{21} = \\ &= E_{67} - E_{76}. \end{aligned} \quad (3)$$

где $E_{\alpha\beta}$ — (7×7) — матрицы, у которых в i -ой строке, j -ом столбце стоит 1, а остальные элементы — нули. При этом вектора i_1, \dots, i_6 задают базис алгебры Ли группы Ли параллельных переносов, а вектора i_7, \dots, i_{21} задают базис алгебры Ли \bar{H} .

В алгебре Ли \bar{G} , определена операция коммутирования по правилу:

$$[A, B] = AB - BA,$$

где $A, B \in \bar{G}$.

Проводя вычисления для коммутаторов базисных векторов (3), получим следующие формулы:

$$\begin{array}{llll} [i_7, i_8] = i_{12} & [i_8, i_{10}] = i_{17} & [i_{16}, i_{19}] = i_{17} & [i_9, i_{18}] = 0 \\ [i_7, i_9] = i_{13} & [i_8, i_{17}] = i_{10} & [i_{10}, i_{14}] = -i_7 & [i_9, i_{20}] = i_{11} \\ [i_7, i_{12}] = i_8 & [i_8, i_{14}] = 0 & [i_{10}, i_{17}] = -i_8 & [i_9, i_{21}] = 0 \\ [i_7, i_{13}] = i_9 & [i_8, i_{19}] = 0 & [i_{10}, i_{18}] = -i_9 & [i_{12}, i_{11}] = 0 \\ [i_7, i_{16}] = 0 & [i_9, i_{10}] = i_{19} & [i_{14}, i_{17}] = -i_{12} & [i_{12}, i_{15}] = -i_{18} \\ [i_8, i_9] = i_{16} & [i_9, i_{14}] = 0 & [i_{14}, i_{19}] = -i_{13} & [i_{12}, i_{18}] = i_{15} \\ [i_8, i_{12}] = -i_7 & [i_9, i_{17}] = 0 & [i_{17}, i_{19}] = -i_{16} & [i_{12}, i_{20}] = 0 \\ [i_8, i_{13}] = 0 & [i_9, i_{19}] = i_{10} & [i_7, i_{11}] = i_{15} & [i_{12}, i_{21}] = 0 \\ [i_8, i_{16}] = i_9 & [i_{12}, i_{10}] = 0 & [i_7, i_{15}] = i_{11} & [i_{13}, i_{11}] = 0 \\ [i_9, i_{12}] = 0 & [i_{12}, i_{14}] = -i_{17} & [i_7, i_{18}] = 0 & [i_{13}, i_{15}] = -i_{20} \\ [i_9, i_{13}] = -i_7 & [i_{12}, i_{17}] = i_{14} & [i_7, i_{20}] = 0 & [i_{13}, i_{18}] = 0 \\ [i_9, i_{16}] = -i_8 & [i_{12}, i_{19}] = 0 & [i_7, i_{21}] = 0 & [i_{13}, i_{20}] = i_{15} \\ [i_{12}, i_{13}] = -i_{16} & [i_{13}, i_{10}] = 0 & [i_8, i_{15}] = 0 & [i_{13}, i_{21}] = 0 \\ [i_{12}, i_{16}] = i_{13} & [i_{13}, i_{14}] = -i_{19} & [i_8, i_{11}] = i_{18} & [i_{16}, i_{11}] = 0 \\ [i_{13}, i_{16}] = -i_{12} & [i_{13}, i_{17}] = 0 & [i_8, i_{18}] = i_{11} & [i_{16}, i_{15}] = 0 \\ [i_7, i_{10}] = i_{14} & [i_{13}, i_{19}] = i_{14} & [i_8, i_{20}] = 0 & [i_{16}, i_{18}] = -i_{20} \\ [i_7, i_{14}] = i_{10} & [i_{16}, i_{10}] = 0 & [i_8, i_{21}] = 0 & [i_{16}, i_{20}] = i_{18} \\ [i_7, i_{17}] = 0 & [i_{16}, i_{14}] = 0 & [i_9, i_{11}] = i_{20} & [i_{16}, i_{21}] = 0 \\ [i_7, i_{19}] = 0 & [i_{16}, i_{17}] = -i_{19} & [i_9, i_{15}] = 0 & [i_{10}, i_{11}] = i_{21} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
[i_{10}, i_{15}] = 0 & [i_{14}, i_{21}] = i_{15} & [i_{19}, i_{18}] = 0 & [i_{15}, i_{20}] = -i_{13} \\
[i_{10}, i_{18}] = 0 & [i_{17}, i_{11}] = 0 & [i_{19}, i_{20}] = -i_{21} & [i_{15}, i_{21}] = -i_{14} \\
[i_{10}, i_{20}] = 0 & [i_{17}, i_{15}] = 0 & [i_{11}, i_{15}] = -i_7 & [i_{18}, i_{20}] = -i_{16} \\
[i_{10}, i_{21}] = i_{11} & [i_{17}, i_{18}] = -i_{21} & [i_{19}, i_{21}] = i_{20} & [i_{18}, i_{21}] = -i_{17} \\
[i_{14}, i_{11}] = 0 & [i_{17}, i_{20}] = 0 & [i_{11}, i_{18}] = -i_8 & [i_{20}, i_{21}] = -i_{19} \\
[i_{14}, i_{15}] = -i_{21} & [i_{17}, i_{21}] = i_{18} & [i_{11}, i_{20}] = -i_9 & \\
[i_{14}, i_{18}] = 0 & [i_{19}, i_{11}] = 0 & [i_{11}, i_{21}] = -i_{10} & \\
[i_{14}, i_{20}] = 0 & [i_{19}, i_{15}] = 0 & [i_{15}, i_{18}] = -i_{12} &
\end{array}$$

Подгруппы Ли группы Ли вращений пространства 1R_6 классифицируются в работе [50].

Всего 63 подгруппы Ли $G_1 \dots G_{63}$ группы Ли вращений пространства 1R_6 , которые в базисе задаются своими алгебрами Ли $\overline{G}_1 \dots \overline{G}_{63}$ в виде:

$$\begin{array}{l}
\overline{G}_1 = \{i_{21}\}, \\
\overline{G}_2 = \{i_7\}, \\
\overline{G}_3 = \{i_{16} + \mu i_{21}\}, \\
\overline{G}_4 = \{i_{16} + \mu i_{21} + \lambda i_7\}, \\
\overline{G}_5 = \{i_{16} + \mu i_7\}, \\
\overline{G}_6 = \{i_{13} + i_7\}, \\
\overline{G}_7 = \{i_{14} + i_9 + \mu i_{21}\}, \\
\overline{G}_8 = \{i_{21}, i_{16}\}, \\
\overline{G}_9 = \{i_{16} + \mu i_{21}, i_7\}, \\
\overline{G}_{10} = \{i_{16}, i_7\}, \\
\overline{G}_{11} = \{i_{16} + \mu i_7, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{12} = \{i_{13} + i_9, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{13} = \{i_{13} + i_9, i_{12} + i_8\}, \\
\overline{G}_{14} = \{i_{13} + i_9 + \mu i_{21}, i_{12} + i_8\}, \\
\overline{G}_{15} = \{i_{13} + i_9, i_7\}, \\
\overline{G}_{16} = \{i_{20}, i_{18}, i_{16}\}, \\
\overline{G}_{17} = \{i_{21} + i_{16}, i_{20} - i_{17}, i_{18} + i_{19}\}, \\
\overline{G}_{18} = \{i_{21} + 2i_{16}, \sqrt{3}i_{14} + i_{20} + i_{17}, \sqrt{3}i_{15} - i_{18} + i_{19}\}, \\
\overline{G}_{19} = \{i_{12}, i_8, i_7\}, \\
\overline{G}_{20} = \{i_{12} + i_{18}, i_{14} + i_{10}, i_7\}, \\
\overline{G}_{21} = \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{22} = \{i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{23} = \{i_{21}, i_{16}, i_7\}, \\
\overline{G}_{24} = \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9\}, \\
\overline{G}_{25} = \{i_{13} + i_9, i_{21}, i_7\}, \\
\overline{G}_{26} = \{i_{20}, i_{18}, i_{16}, i_{14}\}, \\
\overline{G}_{27} = \{i_{20}, i_{18}, i_{16}, i_7\}, \\
\overline{G}_{28} = \{i_{21}, i_{16}, i_{20} - i_{17}, i_{18} + i_{19}\}, \\
\overline{G}_{29} = \{i_{12}, i_8, i_7, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{30} = \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_7\}, \\
\overline{G}_{31} = \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{32} = \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8\},
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\overline{G_{33}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{21}, i_7\}, \\
\overline{G_{34}} &= \{i_{20}, i_{18}, i_{16}, i_{14} + i_{10}, i_7\}, \\
\overline{G_{35}} &= \{i_{21}, i_{16}, i_{20} - i_{17}, i_{18} + i_{19}, i_7\}, \\
\overline{G_{36}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{21}, i_{16}, i_7\}, \\
\overline{G_{37}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_7\}, \\
\overline{G_{38}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{21}\}, \\
\overline{G_{39}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{21}, i_7\}, \\
\overline{G_{40}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{21}, i_7\}, \\
\overline{G_{41}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{21}, i_{16}\}, \\
\overline{G_{42}} &= \{i_{20}, i_{18}, i_{16}, i_{15} + i_{11}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8\}, \\
\overline{G_{43}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{19}, i_{18} + i_{15}, i_{17} + i_{14}, i_{16} + i_{13}\}, \\
\overline{G_{44}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{18}, i_{19}, i_{17}, i_{16}\}, \\
\overline{G_{45}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{19}, i_{12}, i_8, i_7\}, \\
\overline{G_{46}} &= \{i_{17}, i_{14}, i_{10}, i_{12}, i_8, i_7\}, \\
\overline{G_{47}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{19}, i_{11}, i_{10}, i_9\}, \\
\overline{G_{48}} &= \{i_{21}, i_{16}, i_{20}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_7\}, \\
\overline{G_{49}} &= \{i_{17}, i_{14}, i_{10}, i_{12}, i_8, i_7, i_{20}\}, \\
\overline{G_{50}} &= \{i_{20}, i_{18}, i_{16}, i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8\}, \\
\overline{G_{51}} &= \{i_{20}, i_{18}, i_{16}, i_{15} + i_{11}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_7\}, \\
\overline{G_{52}} &= \{i_{21} + i_{16}, i_{20} - i_{17}, i_{18} + i_{19}, i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_8 + i_{12}\}, \\
\overline{G_{53}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{21}, i_{16}, i_7\}, \\
\overline{G_{54}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{20}, i_{18}, i_{16}, i_7\}, \\
\overline{G_{55}} &= \{i_{21} + i_{16}, i_{20} - i_{17}, i_{18} + i_{19}, i_{11} + i_{15}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_7\}, \\
\overline{G_{56}} &= \{i_{20} - i_{17}, i_{18} + i_{19}, i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{21}, i_{16}\}, \\
\overline{G_{57}} &= \{i_{20} - i_{17}, i_{18} + i_{19}, i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{21}, i_{16}, i_7\}, \\
\overline{G_{58}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{19}, i_{18}, i_{15}, i_{17}, i_{14}, i_{16}, i_{13}, i_{12}\}, \\
\overline{G_{59}} &= \{i_{19}, i_{17}, i_{14}, i_{16}, i_{13}, i_{10}, i_9, i_{12}, i_8, i_7\}, \\
\overline{G_{60}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{19}, i_{18}, i_{17}, i_{16}, i_{11}, i_{10}, i_9, i_8\}, \\
\overline{G_{61}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{18}, i_{19}, i_{17}, i_{16}, i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8\}, \\
\overline{G_{62}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{18}, i_{19}, i_{17}, i_{16}, i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_7\}, \\
\overline{G_{63}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{19}, i_{18}, i_{17}, i_{16}, i_{15}, i_{14}, i_{13}, i_{12}, i_{11}, i_{10}, i_9, i_8, i_7\},
\end{aligned}$$

причем группа Ли G_{63} совпадает с группой Ли всех вращений H .

Рассматриваются однопараметрические подгруппы Ли G_i группы Ли H вращений шестимерного пространства Лоренца, соответствующие алгебрам Ли с операторами соответственно:

$$i_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} i_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} i_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
i_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & i_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
i_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & i_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
i_{14} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & i_{15} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
i_{16} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & i_{17} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
i_{18} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & i_{19} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
i_{20} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & i_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Образы стационарности подгрупп Ли группы Ли движений пространства 1R_6

Определение 1. *Образом стационарности подгруппы K группы G называется совокупность D фигур пространства 1R_6 и ему соответствующего векторного пространства 1E_6 таких, что группе K принадлежат те и только те преобразования, при которых каждая из фигур совокупности D инвариантна.*

Определение 2. *Упорядоченная совокупность фигур пространства 1R_6 называется *флагом*, если все фигуры этой совокупности являются k -плоскостями*

($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$) пространства 1R_6 , причем каждая последующая плоскость содержится в предыдущей.

Зафиксируем вектор \bar{e}_1 . Рассмотрим вектор $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ и потребуем, чтобы он был инвариантен. При этом получим следующий результат:

$$(1, 0, 0, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \omega \\ \alpha & 0 & \varepsilon & \rho & \varphi & \psi \\ \beta & -\varepsilon & 0 & k & p & q \\ \gamma & -\rho & -k & 0 & s & t \\ \delta & -\varphi & -p & -s & 0 & l \\ \omega & -\varphi & -q & -t & -l & 0 \end{pmatrix} = (0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega) \Rightarrow (\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0, \omega = 0).$$

Этими условиями выделяется алгебра Ли $\overline{G_{58}} = \{i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$. Таким образом, группа Ли G_{58} имеет в качестве образа стационарности флаг $\{R_0, {}^1R_1\}$.

Рассматривая аналогично другие прямые и плоскости, получаем следующие теоремы.

Теорема 1. Образом стационарности группы G_{60} является флаг $\{R_0, R_1\}$.

Теорема 2. Образом стационарности группы G_{62} является флаг $\{R_0, R_1^1\}$.

Теорема 3. Образом стационарности группы G_{49} является флаг $\{R_0, R_2\}$.

Теорема 4. Образом стационарности группы G_{48} является флаг $\{R_0, {}^1R_2\}$.

Теорема 5. Образом стационарности группы G_{54} является флаг $\{R_0, R_2^1\}$.

Теорема 6. Образом стационарности группы G_{45} является флаг $\{R_0, R_3\}$ или $\{R_0, {}^1R_3\}$.

Теорема 7. Образом стационарности группы G_{53} является флаг $\{R_0, R_3^1\}$.

Теорема 8. Образом стационарности группы G_{44} является флаг $\{R_0, R_1^1, {}^1R_2\}$, или $\{R_0, {}^1R_1, {}^1R_2\}$, или $\{R_0, R_1^{o1}, {}^1R_2\}$.

Теорема 9. Образом стационарности группы G_{50} является флаг $\{R_0, R_1^{o1}, R_2^1\}$.

Теорема 10. Образом стационарности группы $\{i_7, i_8 + i_{12}, i_9 + i_{13}, i_{11} + i_{15}, i_{16}, i_{18}, i_{20}\}$ является флаг $\{R_0, R_1, R_2^1\}$.

Теорема 11. Образом стационарности группы G_{46} является флаг $\{R_0, R_1, R_2\}$.

Теорема 12. Образом стационарности группы G_{29} является флаг $\{R_0, R_2, R_3\}$ или $\{R_0, R_1, R_3\}$.

Теорема 13. Образом стационарности группы $\{i_7, i_8, i_{12}, i_{20}\}$ является флаг $\{R_0, R_1, R_3\}$.

Теорема 14. Образом стационарности группы $\{i_7, i_8, i_{12}, i_{19}\}$ является флаг $\{R_0, R_1, R_3\}$.

Теорема 15. Образом стационарности группы G_{19} является флаг $\{R_0, R_1, R_2, R_3\}$.

Теорема 16. Образом стационарности группы $\{i_{12}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$ является флаг $\{R_0, R_2^1, R_3\}$.

Теорема 17. Образом стационарности группы $\{i_8, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$ является флаг $\{R_0, R_1, {}^1R_3\}$.

Теорема 18. Образом стационарности группы $\{i_{12}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$ является флаг $\{R_0, R_1, {}^1R_3\}$.

Теорема 19. Образом стационарности группы $\{i_7, i_8 + i_{12}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$ является флаг $\{R_0, R_1^1, {}^1R_3\}$.

Теорема 20. Образом стационарности группы $\{i_8 + i_{12}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$ является флаг $\{R_0, R_1^{o1}, {}^1R_3\}$.

Теорема 21. Образом стационарности группы $\{i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$ является флаг $\{R_0, R_1, R_2, {}^1R_3\}$.

Теорема 22. Образом стационарности группы $\{i_7, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$ является флаг $\{R_0, {}^1R_2, {}^1R_3\}$.

Теорема 23. Образом стационарности группы $\{i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$ является флаг $\{R_0, R_1, {}^1R_2, {}^1R_3\}$.

Теорема 24. Образом стационарности группы G_{36} является флаг $\{R_0, R_2, R_3^1\}$.

Теорема 25. Образом стационарности группы G_{41} является флаг $\{R_0, R_1^{o1}, R_3^1\}$.

Теорема 26. Образом стационарности группы G_{39} является флаг $\{R_0, R_1, R_3^1\}$ или $\{R_0, R_1, R_2^1, R_3^1\}$.

Теорема 27. Образом стационарности группы G_{33} является флаг $\{R_0, R_1, R_2, R_3^1\}$.

Теорема 28. Образом стационарности группы G_{40} является флаг $\{R_0, R_2^1, R_3^1\}$.

Теорема 29. Образом стационарности группы G_{38} является флаг $\{R_0, R_1^{o1}, R_2^1, R_3^1\}$.

Используя геометрические характеристики подгрупп Ли, получаем цепочки по включению подгрупп Ли группы Ли вращений пространства 1R_6 .

Цепочки

$H \supset G_{62}, G_{61}, G_{60}, G_{59}, G_{58}, G_{57}, G_{56}, G_{55}, G_{54}, G_{53}, G_{52}, G_{51}, G_{50}, G_{49}, G_{48}, G_{47},$
 $G_{46}, G_{45}, G_{44}, G_{43}, G_{42}, G_{41}, G_{40}, G_{39}, G_{38}, G_{37}, G_{36}, G_{35}, G_{34}, G_{33}, G_{32}, G_{31}, G_{30},$
 $G_{29}, G_{28}, G_{27}, G_{26}, G_{25}, G_{24}, G_{23}, G_{22}, G_{21}, G_{20}, G_{19}, G_{18}, G_{17}, G_{16}, G_{15}, G_{14}, G_{13},$
 $G_{12}, G_{11}, G_{10}, G_9, G_8, G_7, G_6, G_5, G_4, G_3, G_2, G_1;$

$G_{62} \supset G_{61}, G_{57}, G_{56}, G_{55}, G_{54}, G_{53}, G_{52}, G_{51}, G_{50}, G_{44}, G_{42}, G_{41}, G_{40}, G_{39}, G_{38}, G_{37},$
 $G_{36}, G_{35}, G_{34}, G_{33}, G_{32}, G_{31}, G_{30}, G_{28}, G_{27}, G_{25}, G_{24}, G_{23}, G_{22}, G_{21}, G_{20}, G_{17}, G_{16}, G_{15},$
 $G_{13}, G_{12}, G_{10}, G_8, G_6, G_2, G_1;$

$G_{61} \supset G_{56}, G_{52}, G_{50}, G_{44}, G_{42}, G_{41}, G_{38}, G_{32}, G_{31}, G_{28}, G_{24}, G_{22}, G_{21}, G_{17}, G_{16}, G_{13},$
 $G_{12}, G_8, G_6, G_1;$

$G_{60} \supset G_{47}, G_{44}, G_{28}, G_{17}, G_{16}, G_8, G_1;$

$G_{59} \supset G_{46}, G_{20}, G_{19}, G_{15}, G_{13}, G_{10}, G_6, G_2;$

$G_{58} \supset G_{44}, G_{43}, G_{28}, G_{26}, G_{18}, G_{17}, G_{16}, G_8, G_1;$

$G_{57} \supset G_{56}, G_{55}, G_{53}, G_{52}, G_{41}, G_{40}, G_{39}, G_{38}, G_{37}, G_{36}, G_{35}, G_{33}, G_{32}, G_{31}, G_{30}, G_{28},$
 $G_{24}, G_{22}, G_{21}, G_{20}, G_{17}, G_{15}, G_{13}, G_{12}, G_{10}, G_8, G_6, G_2, G_1;$

$G_{56} \supset G_{52}, G_{41}, G_{38}, G_{32}, G_{31}, G_{28}, G_{24}, G_{22}, G_{21}, G_{17}, G_{13}, G_{12}, G_8, G_6, G_1;$

$G_{55} \supset G_{37}, G_{32}, G_{30}, G_{24}, G_{20}, G_{17}, G_{15}, G_{13}, G_6, G_2;$

$G_{54} \supset G_{50}, G_{51}, G_{42}, G_{37}, G_{32}, G_{30}, G_{27}, G_{24}, G_{20}, G_{16}, G_{15}, G_{13}, G_{10}, G_6, G_2;$

$G_{53} \supset G_{41}, G_{40}, G_{39}, G_{38}, G_{37}, G_{36}, G_{33}, G_{32}, G_{31}, G_{30}, G_{25}, G_{24}, G_{23}, G_{21}, G_{20}, G_{15},$
 $G_{13}, G_{12}, G_{10}, G_8, G_6, G_2, G_1;$

$G_{52} \supset G_{32}, G_{24}, G_{17}, G_{13}, G_6;$

$G_{51} \supset G_{42}, G_{27}, G_{16}, G_{15}, G_{13}, G_{10}, G_6, G_2;$

$G_{50} \supset G_{42}, G_{16}, G_{13}, G_6;$

$G_{49} \supset G_{46}, G_{19}, G_2;$

$G_{48} \supset G_{44}, G_{35}, G_{28}, G_{27}, G_{23}, G_{17}, G_{16}, G_{10}, G_8, G_2, G_1;$

$G_{47} \supset G_1;$

$$\begin{aligned}
G_{46} &\supset G_{19}, G_2; \\
G_{45} &\supset G_{29}, G_{19}, G_2, G_1; \\
G_{44} &\supset G_{28}, G_{17}, G_{16}, G_8, G_1; \\
G_{43} &\supset G_1; \\
G_{42} &\supset G_{16}, G_{13}, G_6; \\
G_{41} &\supset G_{38}, G_{32}, G_{31}, G_{24}, G_{22}, G_{21}, G_{13}, G_{12}, G_8, G_6, G_1; \\
G_{40} &\supset G_{39}, G_{38}, G_{37}, G_{33}, G_{32}, G_{31}, G_{30}, G_{25}, G_{24}, G_{22}, G_{21}, G_{20}, G_{15}, G_{13}, G_{12}, G_6, \\
&G_2, G_1; \\
G_{39} &\supset G_{33}, G_{31}, G_{30}, G_{25}, G_{24}, G_{21}, G_{15}, G_{12}, G_6, G_2; \\
G_{38} &\supset G_{32}, G_{31}, G_{24}, G_{22}, G_{21}, G_{13}, G_{12}, G_6, G_1; \\
G_{37} &\supset G_{32}, G_{30}, G_{24}, G_{20}, G_{15}, G_{13}, G_6, G_2; \\
G_{36} &\supset G_{33}, G_{23}, G_{21}, G_{10}, G_2, G_1; \\
G_{35} &\supset G_{28}, G_{23}, G_{17}, G_{10}, G_8, G_2, G_1; \\
G_{34} &\supset G_{27}, G_{16}, G_{10}, G_2; \\
G_{33} &\supset G_{21}, G_2, G_1; \\
G_{32} &\supset G_{24}, G_{13}, G_6; \\
G_{31} &\supset G_{24}, G_{21}, G_{12}, G_6, G_1; \\
G_{30} &\supset G_{24}, G_{15}, G_6, G_2; \\
G_{29} &\supset G_{19}, G_2, G_1; \\
G_{28} &\supset G_{17}, G_8; \\
G_{27} &\supset G_{16}, G_{10}, G_2; \\
G_{26} &\supset G_{16}; \\
G_{25} &\supset G_{15}, G_{12}, G_6, G_2, G_1; \\
G_{24} &\supset G_6; \\
G_{23} &\supset G_{10}, G_2; \\
G_{22} &\supset G_{13}, G_{12}, G_6, G_1; \\
G_{21} &\supset G_1; \\
G_{20} &\supset G_2; \\
G_{19} &\supset G_2; \\
G_{15} &\supset G_6, G_2; \\
G_{13} &\supset G_6; \\
G_{12} &\supset G_6, G_1; \\
G_{11} &\supset G_5, G_1; \\
G_{10} &\supset G_2; \\
G_9 &\supset G_4, G_3, G_2; \\
G_8 &\supset G_1.
\end{aligned}$$

Пусть G – группа Ли и H_1, H_2 ее подгруппы Ли, причем $H_1 \subset H_2$

Определение 3. Каноническим морфизмом однородного пространства G/H_1 в однородное пространство G/H_2 называется морфизм f вида:

$$f : G / H_1 \rightarrow G / H_2 : aH_1 \rightarrow aH_2, \forall a \in G.$$

Таким образом, полученная выше классификация цепочек подгрупп Ли группы вращений пространства 1R_6 приводит к классификации всех канонических морфизмов однородных пространств со структурной группой H – группой всех вращений пространства 1R_6 .

3. Классификация редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства 1R_6

Определение 4. Однородное пространство H/G_i называется редуктивным, если алгебра Ли \bar{H} группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств:

$$\bar{H} = m + G_i, \tag{4}$$

причем подпространство m инвариантно относительно $ad\bar{G}_i$, где $ad\bar{G}_i$ – присоединенное представление алгебры Ли G_i .

Рассмотрим однородное пространство $\frac{H}{G_8}$, где G_8 подгруппа Ли группы Ли H , вращений шестимерного Лоренцевого пространства, имеющая алгебру Ли $\bar{G}_8 = \{i_{16}, i_{21}\}$.

Для решения системы инвариантности задача сводится к рассмотрению 105 случаев:

$$1^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi & \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & m & n \end{pmatrix}$$

По строчкам в этой матрице записаны координаты базисных векторов X_1, \dots, X_{13} , определяющих инвариантные подпространства m , причем базис в алгебре \bar{H} выберем следующим образом: $i_{10}, i_{11}, i_{14}, i_{15}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_7, i_8, i_9, i_{12}, i_{13}, i_{16}, i_{21}$.

Таким образом, инвариантные подпространства $m = \{X_1, \dots, X_{13}\}$ для частного случая 1^0 задаются векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_{10} + \lambda i_{16} + \mu i_{21}, X_2 = i_{11} + \vartheta i_{16} + \delta i_{21}, X_3 = i_{14} + s i_{16} + t i_{21}, X_4 = i_{15} + \\ &+ p i_{16} + q i_{21}, X_5 = i_{17} + r i_{16} + \rho i_{21}, X_6 = i_{18} + \omega i_{16} + \varepsilon i_{21}, X_7 \\ &= i_{19} + \varphi i_{16} + \psi i_{21}, \\ X_8 &= i_{20} + a i_{16} + b i_{21}, X_9 = i_7 + c i_{16} + d i_{21}, X_{10} = i_8 + e i_{16} + f i_{21}, X_{11} = i_9 + \\ &+ g i_{16} + h i_{21}, X_{12} = i_{12} + k i_{16} + l i_{21}, X_{13} = i_{13} + m i_{16} + n i_{21}. \end{aligned} \tag{5}$$

Используя таблицу коммутаторов, получим:

$$\begin{aligned} ada(X_1) &= [i_{21}, X_1] = -i_{11} \\ ada(X_2) &= [i_{21}, i_{11}] = i_{10} \\ ada(X_3) &= [i_{21}, i_{14}] = -i_{15} \\ ada(X_4) &= [i_{21}, i_{15}] = i_{14} \\ ada(X_5) &= [i_{21}, i_{17}] = -i_{18} \\ ada(X_6) &= [i_{21}, i_{18}] = i_{17} \\ ada(X_7) &= [i_{21}, i_{19}] = -i_{20} \\ ada(X_8) &= [i_{21}, i_{20}] = i_{19} \\ ada(X_9) &= [i_{21}, i_7] = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}ada(X_{10}) &= [i_{21}, i_8] = 0 \\ada(X_{11}) &= [i_{21}, i_9] = 0 \\ada(X_{12}) &= [i_{21}, i_{12}] = 0 \\ada(X_{13}) &= [i_{21}, i_{13}] = 0\end{aligned}$$

Запишем линейную комбинацию векторов X_1, \dots, X_{13} :

$$\begin{aligned}\alpha_1(i_{10} + \lambda i_{16} + \mu i_{21}) + \beta_1(i_{11} + \vartheta i_{16} + \delta i_{21}) + \gamma_1(i_{14} + s i_{16} + t i_{21}) + \delta_1(i_{15} + \\+ p i_{16} + q i_{21}) + \omega_1(i_{17} + r i_{16} + \rho i_{21}) + \varepsilon_1(i_{18} + \omega i_{16} + \varepsilon i_{21}) + \rho_1(i_{19} + \varphi i_{16} + \\+ \psi i_{21}) + \sigma_1(i_{20} + a i_{16} + b i_{21}) + t_1(i_7 + c i_{16} + d i_{21}) + p_1(i_8 + e i_{16} + f i_{21}) + \\+ q_1(i_9 + g i_{16} + h i_{21}) + r_1(i_{12} + k i_{16} + l i_{21}) + s_1(i_{13} + m i_{16} + n i_{21}) = i_7 t_1 + i_8 p_1 + \quad (7) \\+ i_9 q_1 + i_{10} \alpha_1 + i_{11} \beta_1 + i_{12} r_1 + i_{13} s_1 + i_{14} \gamma_1 + i_{15} \delta_1 + i_{16} (\alpha_1 \lambda + \beta_1 \vartheta + \gamma_1 s + \delta_1 p + \\+ \omega_1 r + \varepsilon_1 \omega + \rho_1 \varphi + \sigma_1 a + t_1 c + p_1 e + q_1 g + r_1 k + s_1 m) + i_{17} \omega_1 + i_{18} \varepsilon_1 + i_{19} \rho_1 + \\+ i_{20} \sigma_1 + i_{21} (\alpha_1 \mu + \beta_1 \delta + \gamma_1 t + \delta_1 q + \omega_1 \rho + \varepsilon_1 \varepsilon + \rho_1 \psi + \sigma_1 b + t_1 d + p_1 f + q_1 h + \\+ r_1 l + s_1 n).\end{aligned}$$

Приравнивая эту линейную комбинацию к правой части первой формулы (6) и затем аналогично соответствующие линейные комбинации к правым частям остальных формул (6) и проведя соответствующие вычисления, получим:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -1, \vartheta = 0, \delta = 0, \\ \alpha_2 &= 1, \lambda = 0, \mu = 0, \\ \delta_3 &= -1, p = 0, q = 0, \\ \gamma_4 &= 1, s = 0, t = 0, \\ \varepsilon_5 &= -1, \omega = 0, \varepsilon = 0, \\ \omega_6 &= 1, r = 0, \rho = 0 \\ \sigma_7 &= -1, a = 0, b = 0, \\ \rho_8 &= 1, \varphi = 0, \psi = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, относительно оператора i_{21} инвариантны следующие тринадцатимерные подпространства:

$$\{i_{10}, i_{11}, i_{14}, i_{15}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_7 + c i_{16} + d i_{21}, i_8 + e i_{16} + f i_{21}, i_9 + g i_{16} + h i_{21}, i_{12} + \\+ k i_{16} + l i_{21}, i_{13} + m i_{16} + n i_{21}\}.$$

Для инвариантности относительно i_{16} требуется, чтобы

$$g = 0, h = 0, k = 0, l = 0, e = 0, f = 0, m = 0, n = 0.$$

Полученные инвариантные подпространства редуктивны, так как $\Delta \neq 0$. Таким образом, однородное пространство H/G_8 является редуктивным, редуктивным дополнением для него является пространство:

$$m = \{i_{10}, i_{11}, i_{14}, i_{15}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_7 + c i_{16} + d i_{21}, i_8, i_9, i_{12}, i_{13}\}.$$

$$2^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi & 0 & \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & g & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & n \end{pmatrix}$$

Рассмотрим случай 2^0 .

Инвариантное подпространство $m = \{X_1, \dots, X_{13}\}$ для частного случая 2^0 задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_{10} + \lambda i_{13} + \mu i_{21}, X_2 = i_{11} + \vartheta i_{13} + \delta i_{21}, X_3 = i_{14} + s i_{13} + t i_{21}, X_4 = i_{15} + \\ &+ p i_{13} + q i_{21}, X_5 = i_{17} + r i_{13} + \rho i_{21}, X_6 = i_{18} + \omega i_{13} + \varepsilon i_{21}, X_7 = i_{19} + \varphi i_{13} + \\ &+ \psi i_{21}, X_8 = i_{20} + a i_{13} + b i_{21}, X_9 = i_7 + c i_{13} + d i_{21}, X_{10} = i_8 + e i_{13} + f i_{21}, X_{11} = \\ &= i_9 + g i_{13} + h i_{21}, X_{12} = i_{12} + k i_{13} + l i_{21}, X_{13} = i_{16} + n i_{21}. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя таблицу коммутаторов получим:

$$\begin{aligned} ada(X_1) &= [i_{21}, X_1] = -i_{11} \\ ada(X_2) &= [i_{21}, i_{11}] = i_{10} \\ ada(X_3) &= [i_{21}, i_{14}] = -i_{15} \\ ada(X_4) &= [i_{21}, i_{15}] = i_{14} \\ ada(X_5) &= [i_{21}, i_{17}] = -i_{18} \\ ada(X_6) &= [i_{21}, i_{18}] = i_{17} \\ ada(X_7) &= [i_{21}, i_{19}] = -i_{20} \\ ada(X_8) &= [i_{21}, i_{20}] = i_{19} \\ ada(X_9) &= [i_{21}, i_7] = 0 \\ ada(X_{10}) &= [i_{21}, i_8] = 0 \\ ada(X_{11}) &= [i_{21}, i_9] = 0 \\ ada(X_{12}) &= [i_{21}, i_{12}] = 0 \\ ada(X_{13}) &= [i_{21}, i_{16}] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Запишем линейную комбинацию векторов X_1, \dots, X_{13} :

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_{10} + \lambda i_{13} + \mu i_{21}) + \beta_1(i_{11} + \vartheta i_{13} + \delta i_{21}) + \gamma_1(i_{14} + s i_{13} + t i_{21}) + \delta_1(i_{15} + \\ + p i_{13} + q i_{21}) + \omega_1(i_{17} + r i_{13} + \rho i_{21}) + \varepsilon_1(i_{18} + \omega i_{13} + \varepsilon i_{21}) + \rho_1(i_{19} + \varphi i_{13} + \\ + \psi i_{21}) + \sigma_1(i_{20} + a i_{13} + b i_{21}) + t_1(i_7 + c i_{13} + d i_{21}) + p_1(i_8 + e i_{13} + f i_{21}) + \\ + q_1(i_9 + g i_{13} + h i_{21}) + r_1(i_{12} + k i_{13} + l i_{21}) + s_1(i_{16} + n i_{21}) = i_7 t_1 + i_8 p_1 + i_9 q_1 + \\ + i_{10} \alpha_1 + i_{11} \beta_1 + i_{12} r_1 + i_{13} (\alpha_1 \lambda + \beta_1 \vartheta + \gamma_1 s + \delta_1 p + \omega_1 r + \varepsilon_1 \omega + \rho_1 \varphi + \sigma_1 a + \\ + t_1 c + p_1 e + q_1 g + r_1 k) + i_{14} \gamma_1 + i_{15} \delta_1 + i_{16} s_1 + i_{17} \omega_1 + i_{18} \varepsilon_1 + i_{19} \rho_1 + i_{20} \sigma_1 + \\ + i_{21} (\alpha_1 \mu + \beta_1 \delta + \gamma_1 t + \delta_1 q + \omega_1 \rho + \varepsilon_1 \varepsilon + \rho_1 \psi + \sigma_1 b + t_1 d + p_1 f + q_1 h + r_1 l + \\ + s_1 n). \end{aligned} \quad (10)$$

Приравнивая эту линейную комбинацию к правой части первой формулы (9) и затем аналогично соответствующие линейные комбинации к правым частям остальных формул (9) и проведя соответствующие вычисления, получим:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -1, \vartheta = 0, \delta = 0, \\ \alpha_2 &= 1, \lambda = 0, \mu = 0, \\ \delta_3 &= -1, p = 0, q = 0, \\ \gamma_4 &= 1, s = 0, t = 0, \\ \varepsilon_5 &= -1, \omega = 0, \varepsilon = 0, \\ \omega_6 &= 1, r = 0, \rho = 0 \\ \sigma_7 &= -1, a = 0, b = 0, \\ \rho_8 &= 1, \varphi = 0, \psi = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, относительно оператора i_{21} инвариантны следующие тринадцатимерные подпространства:

$$\{i_{10}, i_{11}, i_{14}, i_{15}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_7 + ci_{13} + di_{21}, i_8 + ei_{13} + fi_{21}, i_9 + gi_{13} + hi_{21}, i_{12} + ki_{13} + li_{21}, i_{16} + ni_{21}\},$$

которые редуцированными дополнениями не являются, поскольку прямой суммы нет, т. к. $\Delta = 0$.

В случаях $2^0 - 21^0, 55^0, 78^0, 105^0$ аналогично полученные инвариантные подпространства редуцированными дополнениями не являются, т. к. $\Delta = 0$.

В случаях $22^0 - 54^0, 56^0 - 77^0, 79^0 - 104^0$ системы инвариантности противоречивы.

Теорема 30. Однородное пространство H/G_8 является редуцированным, редуцированным дополнением для него является пространство:

$$m = \{i_{10}, i_{11}, i_{14}, i_{15}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_7 + ci_{16} + di_{21}, i_8 + li_{16} + fi_{21}, i_9 + gi_{16} + hi_{21}, i_{12} + ki_{16} + li_{21}, i_{13} + mi_{16} + ni_{21}\}.$$

4. Тензоры кривизны и кручения канонической связности на редуцированных однородных пространствах

Будем вычислять тензоры кривизны и кручения канонической связности на редуцированных однородных пространствах с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства 1R_6 .

Свойства тензора кривизны и кручения канонической связности характеризуется следующей теоремой.

Теорема 31 [1, с. 180, теорема 2.6]. Пусть P есть G – инвариантная структура на редуцированном однородном пространстве G/H с разложением $\bar{G} = \bar{H} + m$. Для тензора кручения T и тензора кривизны R канонической связности в P мы имеем:

- (1) $T(X, Y)_0 = -[X, Y]_m$ для $X, Y \in m$.
- (2) $(R(X, Y)Z)_0 = -[[X, Y]_{\bar{H}}, Z]$ для $X, Y, Z \in m$.
- (3) $\nabla T = 0$.
- (4) $\nabla R = 0$.

Тензоры кривизны и кручения играют важную роль при исследовании свойств данной связности, поскольку они определяют связность с помощью структурных формул Э. Картана. Воспользуемся теоремой 31 и получим формулы для тензоров кривизны и кручения соответствующей канонической связности в исследуемых редуцированных однородных пространствах.

Рассмотрим редуکتивное однородное пространство H/G_8 , которое имеет редуکتивное разложение

$$\bar{H} = \bar{G}_8 + m,$$

где $m = \{i_7 + ci_{16} + di_{21}, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}\}$.

Выберем в редуکتивном дополнении m базис:

$$e_1 = i_7 + ci_{16} + di_{21}, e_2 = i_8, e_3 = i_9, e_4 = i_{10}, e_5 = i_{11}, e_6 = i_{12}, e_7 = i_{13}, e_8 = i_{14}, \\ e_9 = i_{15}, e_{10} = i_{17}, e_{11} = i_{18}, e_{12} = i_{19}, e_{13} = i_{20}.$$

Тогда, согласно теореме 31, тензоры кручения получим по формуле $T(X, Y)_0 = -[X, Y]_m$ для $X, Y \in m$, а тензоры кривизны $-(R(X, Y)Z)_0 = -[[X, Y]_{\bar{H}}, Z]$ для $X, Y, Z \in m$. Таким образом, координату $T_{j,k}^i$ тензора кручения получим как i -ю координату разложения вектора $-[e_j, e_k]_m$, по базису $B = \{i_7 + ci_{16} + di_{21}, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}\}$ редуکتивного дополнения m .

Координату $R_{j,k,l}^i$ тензора кривизны получим как i -ю координату разложения вектора $-[[e_j, e_k]_{\bar{G}_8}, e_l]$ по базису B редуکتивного дополнения m . Производя соответствующие вычисления, получаем теорему.

Теорема 32. Тензор кручения канонической связности однородного пространства H/G_8 с редуکتивным дополнением $m = \{i_7 + ci_{16} + di_{21}, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}\}$ имеет следующие ненулевые координаты:

$$T_{1,2}^3 = c, T_{1,2}^6 = -1, T_{1,3}^2 = -c, T_{1,3}^7 = -1, T_{1,4}^5 = d, T_{1,4}^8 = -1, T_{1,5}^4 = -d, \\ T_{1,5}^9 = -1, T_{1,6}^2 = -1, T_{1,6}^7 = c, T_{1,7}^3 = -1, T_{1,7}^6 = -c, T_{1,8}^4 = -1, T_{1,8}^9 = d, \\ T_{1,9}^5 = -1, T_{1,9}^8 = -d, T_{1,10}^{11} = d, T_{1,10}^{12} = c, T_{1,11}^{10} = -d, T_{1,11}^{13} = c, T_{1,12}^{10} = -c, \\ T_{1,12}^{13} = d, T_{1,13}^{11} = -c, T_{1,13}^{12} = -d, T_{2,4}^3 = -1, T_{2,5}^{11} = -1, T_{2,6}^1 = 1, T_{2,10}^4 = \\ = -1, T_{2,11}^5 = -1, T_{3,4}^{12} = -1, T_{3,5}^{13} = -1, T_{3,7}^1 = 1, T_{3,12}^4 = -1, T_{3,13}^5 = -1, \\ T_{4,8}^1 = 1, T_{4,10}^2 = 1, T_{4,11}^3 = 1, T_{4,12}^3 = 1, T_{5,9}^1 = 1, T_{5,11}^2 = 1, T_{5,13}^3 = 1, T_{6,8}^{10} = 1, \\ T_{6,9}^{11} = 1, T_{6,10}^8 = -1, T_{6,11}^9 = -1, T_{7,8}^{12} = 1, T_{7,9}^{13} = 1, T_{7,12}^8 = -1, T_{7,13}^9 = -1, \\ T_{8,10}^6 = 1, T_{8,12}^7 = 1, T_{9,11}^6 = 1, T_{9,13}^7 = 1.$$

При этом ненулевыми координатами этого тензора кручения будут также координаты, отличающиеся от данных только перестановкой двух нижних индексов, поскольку $T_{i,j}^k = -T_{j,i}^k$, т. е. тензор кручения кососимметричен по нижним индексам. Других ненулевых координат у тензора кручения нет.

Теорема 33. Тензор кривизны имеет только следующие, отличные от нуля координаты:

$$R_{1,2,6}^7 = -1, R_{2,3,2}^3 = 1, R_{2,3,3}^2 = -1, R_{2,3,6}^7 = 1, R_{2,3,7}^6 = -1, R_{2,3,10}^{12} = 1, \\ R_{2,3,11}^{13} = 1, R_{2,3,12}^{10} = -1, R_{2,3,13}^{11} = -1, R_{2,6,2}^3 = c, R_{2,6,3}^2 = -c, R_{2,6,4}^5 = d, \\ R_{2,6,5}^4 = -d, R_{2,6,6}^7 = c, R_{2,6,7}^6 = -c, R_{2,6,8}^9 = d, R_{2,6,9}^8 = -d, R_{2,6,10}^{11} = d, \\ R_{2,6,10}^{12} = c, R_{2,6,11}^{10} = -d, R_{2,6,11}^{13} = c, R_{2,6,12}^{10} = -c, R_{2,6,12}^{13} = d, R_{2,6,13}^{11} = -c, \\ R_{4,5,13}^{12} = -d, R_{4,5,4}^5 = 1, R_{4,5,5}^4 = -1, R_{4,5,8}^9 = 1, R_{4,5,9}^8 = -1, R_{4,5,10}^{11} = 1, \\ R_{4,5,11}^{10} = -1, R_{4,5,12}^{13} = 1, R_{4,5,13}^{12} = -1, R_{4,8,2}^3 = c, R_{4,8,3}^2 = -c, R_{4,8,4}^5 = d, \\ R_{4,8,5}^4 = -d, R_{4,8,6}^7 = c, R_{4,8,7}^6 = -c, R_{4,8,8}^9 = d, R_{4,8,9}^8 = -d, R_{4,8,10}^{11} = d, \\ R_{4,8,10}^{12} = c, R_{4,8,11}^{10} = -d, R_{4,8,11}^{13} = c, R_{4,8,12}^{10} = -c, R_{4,8,12}^{13} = d, R_{4,8,13}^{11} = -c, \\ R_{4,8,13}^{12} = -d, R_{5,9,2}^3 = c, R_{5,9,3}^2 = -c, R_{5,9,4}^5 = d, R_{5,9,5}^4 = -d, R_{5,9,6}^7 = c, \\ R_{5,9,7}^6 = -c, R_{5,9,8}^9 = d, R_{5,9,9}^8 = -d, R_{5,9,10}^{11} = d, R_{5,9,10}^{12} = c, R_{5,9,11}^{10} = -d, \\ R_{5,9,11}^{13} = c, R_{5,9,12}^{10} = -c, R_{5,9,12}^{13} = d, R_{5,9,13}^{11} = -c, R_{5,9,13}^{12} = -d, R_{8,9,4}^5 =$$

$$\begin{aligned}
&= -1, R_{8,9,5}^4 = 1, R_{8,9,8}^9 = -1, R_{8,9,9}^8 = 1, R_{8,9,10}^{11} = -1, R_{8,9,11}^{10} = 1, R_{8,9,12}^{13} = \\
&= -1, R_{8,9,13}^{12} = 1, R_{10,11,4}^5 = -1, R_{10,11,5}^4 = 1, R_{10,11,8}^9 = -1, R_{10,11,9}^8 = 1, \\
&R_{10,11,10}^{11} = -1, R_{10,11,11}^{10} = 1, R_{10,11,12}^{13} = -1, R_{10,11,13}^{12} = 1, R_{10,12,2}^3 = -1, \\
&R_{10,12,3}^2 = 1, R_{10,12,6}^7 = -1, R_{10,12,7}^6 = 1, R_{10,12,10}^{12} = -1, R_{10,12,11}^{13} = -1, \\
&R_{10,12,12}^{10} = 1, R_{10,12,13}^{11} = 1, R_{11,13,2}^3 = -1, R_{11,13,3}^2 = 1, R_{11,13,6}^7 = -1, \\
&R_{11,13,7}^6 = 1, R_{11,13,10}^{12} = -1, R_{11,13,11}^{13} = -1, R_{11,13,12}^{10} = 1, R_{11,13,13}^{11} = 1, \\
&R_{12,13,4}^5 = -1, R_{12,13,5}^4 = 1, R_{12,13,8}^9 = -1, R_{12,13,9}^8 = 1, R_{12,13,10}^{11} = -1, \\
&R_{12,13,11}^{10} = 1, R_{12,13,12}^{13} = -1, R_{12,13,13}^{12} = 1.
\end{aligned}$$

При этом тензор кривизны кососимметричен по первым двум нижним индексам.

Заклучение

В работе решены следующие задачи:

1. Найлены образы стационарности подгрупп Ли группы Ли вращений пространства L_6 .
2. Построены цепочки подгрупп Ли вращений пространства L_6 по включению, тем самым классифицированы канонические морфизмы однородных пространств.
3. Исследованы канонические связности на полученных редуктивных однородных пространствах.
4. Вычислены тензоры кривизны и кручения инвариантных аффинных связностей найденных редуктивных пространств.

Результаты работы могут быть применены для решения аналогичных задач в других псевдоевклидовых пространствах, а также в научно-исследовательской работе по дифференциальной геометрии и в теоретической физике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 413 с.
2. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцевых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1 (126). – С. 13–22.
3. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.
4. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 18.10.2020