УДК 519.6+519.81

В. В. Морозов
ст. преподаватель каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: morozoffw@mail.ru

МЕТОД ВТОРОГО ПОРЯДКА РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод простой итерации, или метод последовательных приближений, – это математический алгоритм нахождения неизвестного корня операторного уравнения путем его постепенного уточнения. Выражая из начального приближения последующие, получают более точные результаты. Этот метод используется для поиска корней функциональных уравнений с интегральным оператором, решения нелинейных алгебраических уравнений и систем уравнений. Метод Ньютона – более совершенный метод решения функциональных уравнений, предназначенный для решения как интегральных, так и дифференциальных уравнений. Причем более жесткие требования, накладываемые на гладкость оператора уравнения, позволяют изолировать корень в достаточно узкой области локализации. Большим препятствием для реализации этого метода является приближение к нулю первой производной Фреше. В настоящее время разрабатываются различные методы регуляризации итерационных процессов, позволяющие и в этом случае избежать расходимости вычислительного процесса. Однако при равенстве нулю сильной производной метод Ньютона не имеет смысла по определению, в связи с чем возникает необходимость увеличения порядка дифференцируемости оператора уравнения и генерации итерационного процесса второго порядка.

MOROZOV V. V.

SECOND-ORDER METHOD FOR SOLVING OPERATOR EQUATIONS

The simple iteration method, or the method of successive approximations, is a mathematical algorithm for finding the unknown root of an operator equation by gradually refining it. By expressing the subsequent ones from the initial approximation, more accurate results are obtained. This method is used to find the roots of functional equations with an integral operator, to solve nonlinear algebraic equations and systems of equations. Newton's method is a more advanced method for solving functional equations, designed to solve both integral and differential equations. Moreover, more stringent requirements imposed on the smoothness of the operator of the equation make it possible to isolate the root in a rather narrow localization region. A big obstacle to the implementation of this method is the approach to zero of the first Frechet derivative. At present, various methods of regularization of iterative processes are being developed, allowing in this case to avoid the divergence of the computational process. However, when the strong derivative is equal to zero, Newton's method does not make sense by definition, and therefore it becomes necessary to increase the order of differentiability of the operator of the equation and generate a second-order iterative process.

Введение

При решении нелинейных систем алгебраических уравнений методом Ньютона используется первая производная Фреше оператора системы, которую называют матрицей Якоби. Для получения оценок качества приближения корня системы применяется и вторая производная Фреше, называемая гессианом. Билинейная матрица, соответствующая второй сильной производной, представляет собой трехмерную матрицу.

Для решения интегральных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений используется полиномиальная аппроксимация линейных и билинейных банаховых операторов, участвующих в итерационном процессе.

Применяемый для аппроксимации элементов полиномиальный базис одновременно является базисом всюду плотного множества пространства решений и итеративным базисом вычислительного процесса, т. е. итерационный многочлен приближения корня степени n из P_n, в случае необходимости может быть представлен в виде многочлена в реорганизованном базисе P_{n+1}.

Отметим, что здесь вместо традиционного базиса множества многочленов используется лагранжевый базис, который и обеспечивает итеративность вычислительного процесса при увеличении параметра дискретизации. Логическим завершением вычислительного процесса является локализация корня функционального уравнения методом второго порядка с заданной точностью приближения.

Целью данной работы является определение условий сходимости итерационных методов второго порядка решения функциональных уравнений, а также установление и доказательство критериев локализации корней операторных уравнений.

Решаемые задачи:

1) разработать алгоритм итерационного метода второго порядка решения банаховых уравнений;

2) сформулировать и доказать критерии локализации корней банаховых уравнений методом второго порядка.

Метод второго порядка решения операторных уравнений

Введем понятие «корень» из отображения и рассмотрим его свойства.

Определение. Если для отображения F существует такое отображение G, что $G^2 = F$, то G называется *квадратным корнем* из отображения F. Будем обозначать корень из отображения F как $G \equiv \sqrt{F}$.

Оператор, являющийся корнем из линейного оператора, не всегда линейный. Пусть A и B – два линейных оператора, отображающих B-пространство U в B-пространство V. Тогда если $(A \pm B)^2 = I$, то операторы A и B *коммутативны*, т. е. $AB = BA$.

Рассмотрим, например, $A + B = I$. Тогда $(A - B)(A + B) = (A + B)(A - B)$. Следовательно, $AB - BA = BA - AB$ и т. д. Отметим, что в общем случае линейные операторы не являются коммутативными (перестановочными).

Рассмотрим частный случай линейных операторов – матрицы, отображающие E-пространство R^n в себя (порядок матрицы, осуществляющей подобное преобразование евклидова пространства, равен n).

Для извлечения квадратного корня из матрицы $B = I - A$ разработаем алгоритм, основанный на следующей теореме.

Теорема 1. Если s-грань матрицы $\lceil A \rceil \le q < 1$, то последовательность приближенных значений корня из матрицы $I - A$ можно построить с помощью рекуррентного соотношения

$$R_{i+1} = R_i - \frac{R_i^2 - (I - A)}{2},\ i = 0,\ 1,\ \dots,\ \text{где } R_0 = I - \frac{A}{2}. \qquad (1)$$

Доказательство теоремы следует из сходимости метода последовательных приближений решения уравнения

$$R = F(R),\ \text{где } F(R) \equiv R - \frac{R^2 - (I - A)}{2}.$$

Найдем $F'(R) = I - R$ и для всех $i \in N$ оценим s-грань $\lceil I - R_i \rceil$. С учетом преобразований (1)

$$I - R_{i+1} = I - R_i + \frac{R_i^2 - (I - A)}{2} = \frac{(I - R_i)^2}{2} + \frac{A}{2}$$

следует, что при $i \ge 0$ справедливо неравенство $\lceil I - R_{i+1} \rceil \le q < 1$, т. е. отображение F – сжатие. Этот факт можно доказать и по-другому:

$$R_{i+1} - R_i = R_i - R_{i-1} - \left(\frac{R_i^2 - (I - A)}{2} - \frac{R_{i-1}^2 - (I - A)}{2} \right) =$$

$$= (R_i - R_{i-1})\left(I - \frac{R_i + R_{i-1}}{2}\right) = (R_i - R_{i-1})\, \frac{I - R_i + I - R_{i-1}}{2}.$$

Из условия теоремы следует, что

$$\lceil I - R \rceil \le \lceil A \rceil \le q < 1.$$

Использованный в теореме алгоритм поиска корня с некоторыми изменениями часто применяется в прикладном анализе, например, при доказательстве сходимости модифицированного метода Ньютона при решении квадратных операторных уравнений (теорема 4) и т. п.

Теорема 2. Если s-грань линейного оператора Q не превосходит 1 ($\lceil Q \rceil \le 1$), то существует линейный оператор $R = \sqrt{I - Q}$, равный

$$R = I - \frac{Q}{2} - \frac{Q^2}{8} - \frac{Q^3}{16} - \ldots - \frac{(2m-3)!!}{(2m)!!} Q^m - \ldots .$$

Доказательство теоремы основано на том, что построенный для оператора $\sqrt{I - Q}$ ряд Тейлора обладает абсолютной сходимостью:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(2m-3)!!}{(2m)!!} \le 2, \text{ где } \frac{3!!}{6!!} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{1}{16} \text{ и т. д.}$$

При решении операторного уравнения

$$F(u_0) = 0 \tag{2}$$

с дважды непрерывно дифференцируемым отображением F может быть использован метод второго порядка.

Аппроксимируя нелинейный оператор уравнения (1) многочленом второй степени (по аналогии с линейной аппроксимацией в методе Ньютона), получим квадратное уравнение относительно поправки Δu к нулевому приближению u_0:

$$\frac{1}{2} F''(u_0)\Delta^2 u + F'(u_0)\Delta u + F(u_0) = 0. \tag{3}$$

Чтобы найти корни этого уравнения, умножим обе его части на оператор$\cdot[F'(u_0)]^{-1}$ (существование которого, как и в методе Ньютона, будем предполагать).

В случае $F : R^n \to R^n$ дискретным аналогом уравнения (3) является система из n квадратных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{1j1}\Delta u_1 + a_{1j2}\Delta u_2 + \ldots + a_{1jn}\Delta u_{\text{n}})\Delta u_j + \Delta u_1 = -\Delta u_{1H}; \\ \qquad\qquad\qquad . \quad . \quad . \\ \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{nj1}\Delta u_1 + a_{nj2}\Delta u_2 + \ldots + a_{njn}\Delta u_n)\Delta u_j + \Delta u_n = -\Delta u_{nH}, \end{array} \right. \tag{4}$$

где $\{a_{ijk}, i, j, k = 1, \ldots, n\}$ – дискретная (в виде кубичной матрицы) форма билинейного оператора $0{,}5\cdot[F'(u_0)]^{-1} F''(u_0)$, а $\{\Delta u_{iH}, i = 1, \ldots, n\}$ – дискретная (в виде вектора) поправка $[F'(u_0)]^{-1} F(u_0)$ к приближению u_0 корня уравнения (2), определяемая методом Ньютона.

Методы решения квадратных операторных уравнений, основанные на существовании оператора $[F'(u_0)]^{-1}$, обратного к $F'(u_0)$, называют методами Ньютона.

Метод 1. Применим к обеим частям квадратного операторного уравнения (3) оператор $[F'(u_0)]^{-1}$ и обозначим полученную левую часть через $\Phi(\Delta u)$:

$$\Phi(\Delta u) \equiv \frac{1}{2}[F'(u_0)]^{-1}F''(u_0)\Delta^2 u + \Delta u + \Delta u_H = 0, \tag{5}$$

где $\Delta u_H = [F'(u_0)]^{-1}F(u_0)$, и решим уравнение (9.5) методом Ньютона

$$\Delta u_{n+1} = \Delta u_n - [\Phi'(\Delta u_n)]^{-1}\Phi(\Delta u_n),\ n = 0,\ 1,\ \ldots.$$

Для установления условий сходимости метода нулевого приближения $\Delta u_0 = 0$ предварительно отыщем нижнюю и верхнюю оценки нормы решения Δu. Из определения нормы и уравнения (5) следует неравенство:

$$||\Delta u|| \le \lceil A\rceil\cdot||\Delta u||^2 + ||C||,\ \text{где}\ A = \frac{1}{2}[F'(u_0)]^{-1}F''(u_0),\ C = \Delta u_H.$$

Отсюда вытекает оценка нормы сверху:

$$||\Delta u|| \le \frac{1-\sqrt{1-4\lceil A\rceil\|C\|}}{2\lceil A\rceil} = \frac{2\|C\|}{1+\sqrt{1-4\lceil A\rceil\|C\|}}, \tag{6}$$

или в исходных обозначениях:

$$||\Delta u|| \le \frac{2\|\Delta u_H\|}{1+\sqrt{1-2\lceil[F'(u_0)]^{-1}F''(u_0)\rceil\|\Delta u_H\|}}. \tag{7}$$

Аналогично из неравенства

$$||\Delta u|| \ge ||C|| - \lceil A\rceil\cdot||\Delta u||^2$$

можно получить нижнюю оценку нормы $||\Delta u||$:

$$||\Delta u|| \ge \frac{2\|\Delta u_H\|}{1+\sqrt{1+2\lceil[F'(u_0)]^{-1}F''(u_0)\rceil\|\Delta u_H\|}}. \tag{8}$$

Тогда достаточное условие сходимости метода Ньютона решения (4) нулевого приближения $\Delta u_0 = 0$ к корню уравнения (5) будет выполнено при

$$k = \lceil[\Phi'(0)]^{-1}\rceil\cdot\lceil\Phi''(\Delta u)\rceil\cdot||[\Phi'(0)]^{-1}\Phi(0)|| \le 1/2.$$

Из соотношений

1) $\Phi(\Delta u)|_0 = \Phi(0) = \Delta u_H$;

2) $\Phi'(\Delta u)|_0 = [F'(u_0)]^{-1}F''(u_0)\cdot 0 + I = I$;

3) $\Phi''(\Delta u) = [F'(u_0)]^{-1}F''(u_0)$;

4) $([\Phi'(\Delta u)]^{-1}\Phi(\Delta u))|_0 = I\cdot\Delta u_H = \Delta u_H$

следует, что для сходимости метода достаточно выполнения условия

$$k = \lceil[\Phi'(0)]^{-1}\rceil\cdot\lceil\Phi''(\Delta u)\rceil\cdot||[\Phi'(0)]^{-1}\Phi(0)|| \le 1\cdot\lceil[F'(u_0)]^{-1}F''(u_0)\rceil\cdot||\Delta u_H|| \le 1/2.$$

Метод 2. Преобразуем уравнение (3) к виду

$$\left(\frac{1}{2}[F'(u_0)]^{-1}F''(u_0)\Delta u + I\right)\Delta u + \Delta u_H = 0 \tag{9}$$

и обозначим $V = \frac{1}{2}[F'(u_0)]^{-1}F''(u_0)\Delta u + I$.

Тогда если $\lfloor V \rfloor > 0$, то решение (9) находится по формуле:

$$\Delta u = -V^{-1}\Delta u_H. \tag{10}$$

Оценим значение i-грани V снизу:

$$\lfloor V \rfloor \geq 1 - \lceil 0{,}5 \cdot [F'(u_0)]^{-1}F''(u_0)\rceil \cdot ||\Delta u||. \tag{11}$$

Подставив в неравенство (11) выражение оценки $||\Delta u||$ из соотношения (7), получим интересующую нас оценку:

$$\lfloor V \rfloor \geq \frac{1+\sqrt{1-4\lceil A \rceil \|C\|}}{2} = v \geq 1/2. \tag{12}$$

Используем в выражении V из (9) значение Δu из (10), тогда

$$V = I - 0{,}5 \cdot [F'(u_0)]^{-1}F''(u_0) \cdot V^{-1}\Delta u_H. \tag{13}$$

Достаточное условие сходимости МПП [1] основано на соблюдении в области $\lceil V - I \rceil \leq 1/2$ принципа сжимающих отображений $\lceil \Phi'(V) \rceil < 1$, где

$$\Phi(V) = I - 0{,}5 \cdot [F'(u_0)]^{-1}F''(u_0) \cdot V^{-1}\Delta u_H.$$

При $4\lceil A \rceil\, ||C|| \leq 1$ уравнение (13) решается методом простой итерации нулевого приближения $V_0 = I$, так как оценка s-грани оператора $\Phi'(V)$ с учетом неравенства (12) имеет вид:

$$\lceil \Phi'(V) \rceil \leq 0{,}5 \cdot \lceil [F'(u_0)]^{-1}F''(u_0)\rceil \cdot ||\Delta u_H|| \cdot \lfloor V \rfloor^{-2} \leq 1.$$

Тогда, зная V, найдем $\Delta u = -V^{-1}\Delta u_H$. Оценим норму Δu:

$$||\Delta u|| \leq \lceil V^{-1} \rceil \cdot ||\Delta u_H|| \leq v^{-1}||C|| \leq \frac{2\|C\|}{1+\sqrt{1-4\lceil A \rceil \|C\|}}, \tag{14}$$

что согласуется с ранее полученными результатами (6).

Однако методы 1 и 2 имеют важный недостаток: для их реализации необходимо существование оператора, обратного к $B = F'(u_0)$.

Рассмотрим метод решения квадратного уравнения (3), лишь косвенно требующий это ограничение. Пусть $A = F''(u_0)$, $C = F(u_0)$ и корень (3) принадлежит шару $Q_R = \{||\Delta u|| \leq R\}$, тогда значение радиуса R определим из неравенств

$$||B\Delta u|| \geq ||\frac{1}{2}A\Delta^2 u|| - ||C||; \tag{15}$$

$$||B\Delta u|| \leq ||\frac{1}{2}A\Delta^2 u|| + ||C||. \tag{16}$$

Оценка нормы Δu, вытекающая из неравенств (16), $||B\Delta u|| \geq \lfloor B \rfloor\, ||\Delta u||$ и $||A\Delta^2 u|| \leq \lceil A \rceil\, ||\Delta^2 u||$ (т. е. $\frac{1}{2}\lceil A \rceil\, ||\Delta u||^2 - \lfloor B \rfloor\, ||\Delta u|| + ||C|| \geq 0$), имеет вид

$$||\Delta u|| \le R = \frac{\lfloor B\rfloor - \sqrt{\lfloor B\rfloor^2 - 2\lceil A\rceil \| C\|}}{\lceil A\rceil} = \frac{2\| C\|}{\lfloor B\rfloor + \sqrt{\lfloor B\rfloor^2 - 2\lceil A\rceil \| C\|}}. \quad (17)$$

Эта оценка основана на требованиях теоремы 8.10 [2]. А именно: для вычисления R необходимо, чтобы было справедливо неравенство $2\lceil A\rceil ||C|| \le \lfloor B\rfloor^2$, которое подразумевает существование обратного оператора B^{-1}, т. е. выполнения условия $\lfloor B\rfloor \ge \rho > 0$ ($\lceil B^{-1}\rceil \le 1/\rho$).

При $\lfloor B\rfloor = 0$ оценку нормы Δu можно получить из неравенства

$$\frac{1}{2}\lfloor A\rfloor ||\Delta u||^2 - \lceil B\rceil ||\Delta u|| - ||C|| \le 0, \quad (18)$$

которое следует из (15):

$$||B\Delta u|| \le \lceil B\rceil ||\Delta u|| \text{ и } ||A\Delta^2 u|| \ge \lfloor A\rfloor ||\Delta u||^2.$$

Оценка, вытекающая из неравенства (18)

$$||\Delta u|| \le R = \frac{\lceil B\rceil + \sqrt{\lceil B\rceil^2 + 2\lfloor A\rfloor \| C\|}}{\lfloor A\rfloor}, \quad (19)$$

верна для любого сходящегося метода решения уравнения (3). Но так как R не стремится к нулю при $||C|| \to 0$, то прежде всего данная оценка будет интересовать нас для $\lceil B\rceil << 1$.

При близкой к нулю сильной производной $F'(u_0)$ справедлива оценка нормы Δu сверху $||\Delta u|| \le R = \sqrt{\frac{2\| C\|}{\lfloor A\rfloor}}$.

Существование матрицы, обратной к $D = 0{,}5A\Delta u + B$, обеспечивается неравенством $\lfloor 0{,}5A\Delta u + B\rfloor > 0$. Исходя из этих предположений, решим (3) итерационным методом, аналогичным изложенному в теореме 2:

$$\Delta u_{n+1} = \Delta u_n - \frac{[0{,}5A\Delta u_n + B]^{-1}(0{,}5A\Delta^2 u_n + B\Delta u_n + C)}{2}, \; n = 0, 1, \ldots . \quad (20)$$

Теорема 4. Если в шаре $||\Delta u|| \le R$ (19) квадратное уравнение (3) с $||C|| > 0$ имеет решение, то его меньший по норме корень $\Delta^* u$ можно найти методом последовательных приближений (20) с нулевого приближения $\Delta u_0 = 0$ при условии $\lfloor 0{,}5A\Delta u_n + B\rfloor > 0$, $n = 0, 1, \ldots$.

Если $||C|| > 0$, то метод последовательных приближений (20) осуществляет поиск корня в области $||\Delta u|| < R$ с увеличением на каждом шаге нормы Δu_n. Отметим, что при $||C|| = 0$, меньшим по норме корнем (3) является тривиальное решение.

Идея и геометрическая интерпретация МВП решения функциональных уравнений

Изложим идею МВП решения операторного уравнения (2). Пусть отображение F дважды непрерывно дифференцируемо в шаре $Q[u_0, \delta]$, центр которого u_0 (степень многочлена по умолчанию равна n) примем за нулевое приближение искомого корня. Будем считать, что $F''(u)$ в шаре Q_δ удовлетворяет условию Липшица с константой L

$$\lceil F''(u) - F''(v)\rceil \le L||u - v||, \; \{u, v\} \subset Q_\delta. \quad (21)$$

Аппроксимируем $F(u) = F(u_0 + \Delta u)$, где поправка Δu приводит u_0 к корню (2), многочленом Тейлора второй степени. Тогда при $F(u) = 0$ получим:

$$\frac{1}{2}F''(u_0)\Delta^2 u + F'(u_0)\Delta u + F(u_0) = 0. \tag{22}$$

Для нулевого приближения u_0 уравнения (2) и корня Δu уравнения (22) погрешность квадратичной аппроксимации формулы Тейлора равна

$$F(u_0 + \Delta u) = \omega(u_0, \Delta u), \text{ где } ||\omega(u_0, \Delta u)|| = o(||\Delta u||^2).$$

Таким образом, норма невязки уравнения (2) на следующем приближении $u_0 + \Delta u$ будет на два порядка выше, чем норма приращения аргумента.

Это вытекает из теоремы о конечных приращениях:

$$||F(u_0 + \Delta u) - F(u_0) - F'(u_0)\Delta u - \frac{1}{2}F''(u_0)\Delta^2 u|| \le \frac{L}{6}||\Delta u||^3.$$

Если (22) имеет решение, то корень Δu с меньшей нормой обозначим Δu_0 и примем за поправку к приближению u_0 и т. д.

$$u_{k+1} = u_k + \Delta u_k,\ k = 0, 1, \dots . \tag{23}$$

Пример 1. Решить нелинейное алгебраическое уравнение

$$F(x) \equiv x^3 - 3x - 2 = 0,\ x \in R \tag{24}$$

методом второго порядка с начального приближения $x_0 = 1$.

Для построения графика функции $y = F(x)$ найдем производную $F(x)$ ($F'(x) = 3x^2 - 3$) и определим из уравнения $F'(x) = 0$ экстремальные точки.

Абсциссы точек локальных максимума и минимума равны -1 и $+1$ соответственно. Чтобы построить график параболы $y = ax^2 + bx + c$, проходящей через точку $(1; -4)$ и являющуюся приближением функции $y = F(x)$ вблизи точки $x_0 = 1$, найдем вторую производную $F(x)$ ($F''(x) = 6x$) в точке x_0, т. е. $F''(1) = 6$.

Тогда для определения коэффициентов a, b и c составим линейную систему уравнений

$$\begin{cases} y''(1) \equiv 2a = 6; \\ y'(1) \equiv 2a + b = 0; \\ y(1) \equiv a + b + c = \quad 4. \end{cases}$$

Отсюда уравнение искомой параболы примет вид $y = 3x^2 - 6x - 1$. На рисунке 1 ее график изображен штриховой линией. Точки пересечения параболы с осью абсцисс являются приближениями корней исходного уравнения (24). Любое из двух значений x может рассматриваться как очередное приближение МВП.

Однако на практике вычислительный процесс по каждой ветви алгоритма проще продолжать параметрическим методом Ньютона, так как с его помощью прогнозируется существование корня в окрестности приближения, а МВП используется тогда, когда метод Ньютона применить невозможно либо он дает поправку с большой нормой.

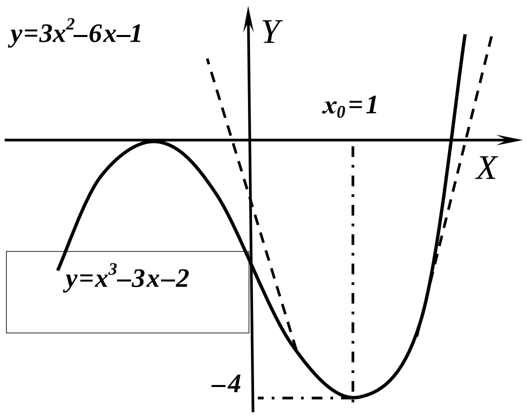

Рисунок 1

Как и в методе Ньютона [3], для получения приближения корня уравнения (24) методом второго порядка необязательно находить явный вид многочлена аппроксимации. Поправку можно найти из уравнения (22):

$$0{,}5F''(1)\Delta^2 x + F'(1)\Delta x + F(1) = 0 \Leftrightarrow 3\Delta^2 x - 4 = 0.$$

Тогда следующее приближение $x_1 = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (или $x_1 = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$). Эти значения являются абсциссами точек пересечения параболы, аппроксимирующей исходное уравнение (24) в точке x_0, с осью OX, так как

$$y(x_1) \equiv 3(x_1)^2 - 6x_1 - 1 = 0.$$

Пример 2. Найти корни функционального уравнения с нелинейным оператором $F : C_{[0;1]} \to C_{[0;1]}$:

$$F(u) \equiv u^3 + 2xu^2 - x^2u - 2x^3 = 0 \qquad (25)$$

в шаре $Q_R = \{u(x) : ||u(x)|| \le R = 2, x \in [0; 1]\}$ с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-10}$.

Вычислим первую и вторую сильные производные оператора F на элементе $u(x)$:

$$F'(u) = 3u^2 + 4xu - x^2,\ F''(u) = 6u + 4x.$$

По условию задачи $\lceil F''(u) \rceil \le 16 = K$. Определить глобальную оценку B невозможно, так как, кроме экстремальных функций $u = c_-\,x$ и $u = c_+\,x$ ($c_-\,x$ и $c_+\,x$ – корни уравнения $F'(u) = 0$), в области Q_R находится бесконечное множество непрерывных функций $u(x)$, для которых не существует $[F'(u)]^{-1}$.

Два корня уравнения (25) можно вычислить параметрическим методом Ньютона, описанным в разделе 8.4 [2]. В качестве нулевого приближения ПМН используем непрерывную функцию, принадлежащую полосе $-2 \le u_0(x) \le 2$.

При выполнении условий

$$-2 \le u_0(x) < c_-\,x \text{ или } c_+\,x < u_0(x) \le 2$$

оператор $F'(u_0)$ имеет обратный, причем с любого приближения $u_0(x)$ из первого множества процесс сходится к одному корню уравнения (25) $u^* = -2x$, а из второго множества – к другому корню $u^{**}(x) = x$.

Однако найти с помощью параметрического процесса (22) третий корень уравнения ($u^{***} = -x$) невозможно, так как к нему нельзя приблизиться функциями из $C_{[0;\,1]}$, не пересекая линий экстремума (рисунок 2). Отметим, что этот корень (25) можно найти методом второго порядка с нулевого приближения $u = c_- x$ (или $u = c_+ x$), для которых $F'(u) \equiv 0$ (метод второго порядка применяется также при $\lfloor F'(u) \rfloor = 0$).

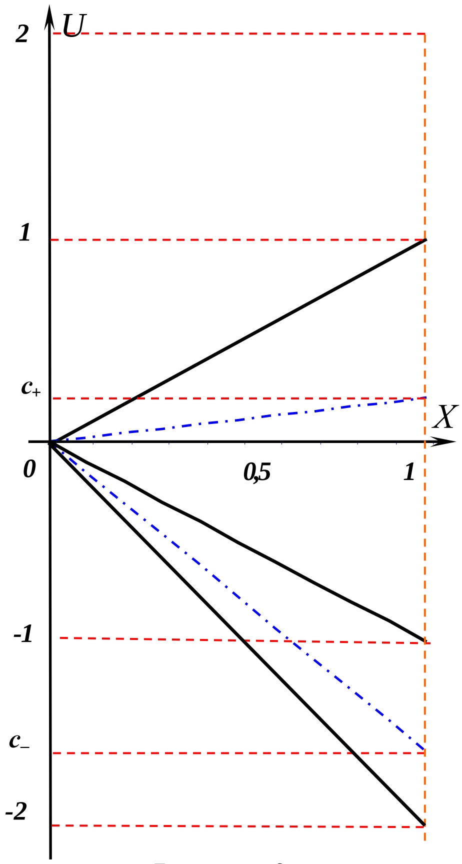

Рисунок 2

Сходимость МВП при равенстве нулю s-грани сильной производной оператора уравнения

Сформулируем некоторые необходимые и достаточные условия сходимости метода второго порядка решения операторного уравнения (2).

Необходимым условием построения вычислительного процесса является дважды непрерывная дифференцируемость отображения $F: U \to V$ в области $Q[u_0, \delta]$ существования корня. Но если первая производная Фреше в точке u_0 имеет положительную i-грань $\lfloor F'(u_0) \rfloor \geq q > 0$, то для поиска корней уравнения (2) надо использовать параметрический метод Ньютона [2].

Поэтому будем полагать, что i-грань линейного оператора $F'(u_0)$ равна 0 и его линейная регуляризация не имеет смысла. Тогда при определенных условиях решить уравнение (2) с начального приближения u_0 можно, используя метод более высокого порядка точности.

В частности, для доказательства сходимости метода второго порядка требуется, чтобы вторая производная оператора F в области Q_δ:

1) удовлетворяла условию Липшица:

$$\lceil F''(u) - F''(v) \rceil \le L||u - v||; \quad (26)$$

2) имела положительную i-грань:

$$\lfloor F''(u) \rfloor \ge \rho > 0. \tag{27}$$

Пусть также s-грань производной Фреше оператора F уравнения (2) равна нулю в точках итерационного процесса, т. е.

$$F'(u_n) = 0,\ n = 0, 1, \dots . \tag{28}$$

Необходимым условием сходимости метода является выполнение неравенства $\delta \ge r$, где r – меньший положительный корень уравнения

$$T(r) \equiv \frac{1}{6} L r^3 - \frac{1}{2} \rho r^2 + ||F(u_0)|| = 0. \tag{29}$$

Теорема 5. Пусть в шаре Q_δ существует корень уравнения (2), а также выполнены условия (26)–(29).

Тогда если

$$||F(u_0)|| \le \frac{2\rho^3}{3L^2}, \tag{30}$$

то уравнение (2) можно решить методом второго порядка

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n,\ n = 0, 1, \dots , \tag{31}$$

где поправка Δu_n определяется из квадратного уравнения

$$\frac{1}{2} F''(u_n)\Delta^2 u + F(u_n) = 0. \tag{32}$$

При этом корень u^* операторного уравнения (2), к которому сходится МВП (31) – (32), находится в области $Q_r = \{u : ||u - u_0|| \le r\}$.

Из формул Тейлора и конечных приращений для нулевого приближения u_0 корня u^* уравнения (2), по условию теоремы принадлежащего области Q_δ, вытекает неравенство

$$||F(u^*) - F(u_0) - \frac{1}{2} F''(u_0)\Delta^2 u|| \le \frac{1}{6} L||\Delta u||^3, \text{ где } \Delta u = u^* - u_0. \tag{33}$$

Тогда, учитывая оценки глобальных (26)–(27) и локальных констант, можно указать точные границы области существования корня уравнения (2). Из неравенства (33) и свойств нормы следует соотношение

$$||\frac{1}{2} F''(u_0)\Delta^2 u|| - ||F(u_0)|| \le \frac{1}{6} L||\Delta u||^3. \tag{34}$$

Неравенство (34) после введения функции T примет вид:

$$T(||\Delta u||) \equiv \frac{1}{6} L||\Delta u||^3 - \frac{1}{2} \rho||\Delta u||^2 + ||F(u_0)|| \ge 0. \tag{35}$$

Приравняв $T'(u)$ к нулю, найдем точки локального экстремума Δ_{min} и Δ_{max} функции $T(u)$. Так как

$$T'(||\Delta u||) \equiv \frac{1}{2} L||\Delta u||^2 - \rho||\Delta u|| = 0,$$

то

$$\Delta_{max} = 0 \text{ и } \Delta_{min} = 2\rho L^{-1}. \tag{36}$$

Значение $T(\Delta_{max}) > 0$. Стало быть, при $T(\Delta_{min}) = -\frac{2\rho^3}{3L^2} + ||F(u_n)|| \le 0$ существует корень r уравнения (29), который в условиях теоремы расположен в интервале $0 < r \le \Delta_{min}$.

При $||F(u_0)||$, стремящемся к нулю, значение r ограничивает норму Δu из неравенства (34), т. е. $||\Delta u|| \le r$, где r – меньший положительный корень уравнения (29).

Требование $\delta \ge r$ означает, что на практике проверку выполнения условий (26) и (27) теоремы 5 достаточно осуществить в области Q_r, т. е. при $\delta = r$. Установим скорость сходимости метода второго порядка.

Из справедливого для $n = 0, 1, \ldots$ неравенства

$$||F(u_{n+1}) - F(u_n) - \frac{1}{2} F''(u_n)\Delta^2 u_n|| \le \frac{1}{6} L||\Delta u_n||^3$$

следует оценка нормы невязки уравнения (**) на $n+1$ приближении

$$||F(u_{n+1})|| \le \frac{1}{6} L||\Delta u_n||^3. \tag{37}$$

Пусть Δu_n – корень уравнения (32), тогда $||\Delta u_n|| \le \sqrt{\frac{2\,\|F(u_n)\|}{\rho}}$ и

$$||\Delta u_{n+1}|| \le \sqrt{\frac{2\,\|F(u_{n+1})\|}{\rho}} = \sqrt{\frac{L\,\|\Delta u_n\|}{6\rho}}\,||\Delta u_n||. \tag{38}$$

Из неравенства (38) определим коэффициент сжатия:

$$q = \sqrt{\frac{L\,\|\Delta u_0\|}{6\rho}} = \sqrt{\frac{L}{6\rho}\sqrt{\frac{2\,\|F(u_0)\|}{\rho}}} \le \sqrt{\frac{L}{6\rho}\sqrt{\frac{4\rho^2}{3L^2}}} = 3^{-3/4} < \frac{1}{2}.$$

Оценка $||\Delta u||$, вытекающая из (29), имеет вид:

$$r^2 \le \frac{6\|F(u_0)\|}{3\rho - Lr}, \text{ где } r \le \frac{2\rho}{L} \text{ или } ||\Delta u|| \le r \le \sqrt{\frac{6\,\|F(u_0)\|}{\rho}}. \tag{39}$$

Значит, в условиях теоремы вычислительный процесс (31)–(32) при $n \to \infty$ сходится к корню уравнения (2). Однако вероятность того, что в каждой точке процесса $F'(u_n) = 0$ мала. Поэтому итерации МВП будем применять лишь в тех случаях, когда демпфированная поправка $\beta\Delta u_n$ параметрического метода Ньютона к приближению u_n выводит процесс (22) из области существования корня (2), т. е. вместо регуляризации линейного оператора $F'(u_n)$ при решении уравнения $F'(u_n)\Delta u_n = -F(u_n)$.

Метод M_λ решения уравнения с равной нулю i-гранью сильной производной оператора

Пусть в области $Q[u_0, \delta]$ существования корня уравнения (2) выполнены условия (26) и (27). Рассмотрим метод решения уравнения с помощью аппроксимации отображения F на элементе $u^* = u_0 + \Delta u$ многочленом Тейлора второй степени:

$$F(u_0 + \Delta u) \approx \frac{1}{2} F''(u_0)\Delta^2 u + F'(u_0)\Delta u + F(u_0),$$

полагая, что i-грань $\lfloor F'(u) \rfloor$ равна 0 в точках итерационного процесса

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n,\ n = 0,\ 1,\ \ldots, \tag{40}$$

где Δu_n – меньший по норме корень квадратного уравнения

$$\frac{1}{2} F''(u_n)\Delta^2 u + F'(u_n)\Delta u + F(u_n) = 0. \tag{41}$$

Ранее был рассмотрен случай, когда $F'(u_n) = 0$. Предположим, что

$$\lceil F'(u) \rceil \le M,\ u \in Q_\delta. \tag{42}$$

Теорема 6. Пусть в области Q_δ существует корень уравнения (2), выполнены условия (26), (27) и (42), а также верно неравенство $\delta \ge r$, где r – меньший положительный корень уравнения

$$T(r) \equiv \frac{1}{6} L r^3 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{r}^2 + Mr + ||F(u_0)|| = 0. \tag{9.43}$$

Предположим также, что

$$T(\frac{1}{L}(\boldsymbol{\rho} + \sqrt{\boldsymbol{\rho}^2 - 2LM})) < 0, \text{ где } 2LM < \rho^2. \tag{9.44}$$

Тогда уравнение (2) решается методом второго порядка (40) – (41). Причем корень u^* уравнения (2), к которому сходится МВП, находится в области

$$Q_r = \{u : ||u - u_0|| \le r\}.$$

Из формул Тейлора и конечных приращений для корня (2), по условию теоремы принадлежащего области Q_δ, справедливо неравенство

$$||F(u^*) - F(u_0) - F'(u_0)\Delta u - \frac{1}{2} F''(u_0)\Delta^2 u|| \le \frac{1}{6} L||\Delta u||^3,\ \Delta u = u^* - u_0. \tag{45}$$

Учитывая оценки глобальных (26), (27) и локальных констант,

$$T(||\Delta u||) \equiv \frac{1}{6} L||\Delta u||^3 - \frac{1}{2} \rho||\Delta u||^2 + M||\Delta u|| + ||F(u_0)|| \ge 0. \tag{46}$$

Приравняв $T'(u)$ к 0, найдем точки локального экстремума Δ_{min} и Δ_{max} функции $T(u)$. Так как

$$T'(||\Delta u||) \equiv \frac{1}{2} L||\Delta u||^2 - \rho||\Delta u|| + M = 0,$$

то при условии $\rho^2 > 2LM$ это уравнение имеет два корня:

$$\Delta_{max} = \frac{1}{L}(\rho - \sqrt{\rho^2 - 2LM}), \quad (47)$$

$$\Delta_{min} = \frac{1}{L}(\rho + \sqrt{\rho^2 - 2LM}). \quad (48)$$

Если $T(\Delta_{min}) < 0$, то существует корень r уравнения (43), который в условиях теоремы расположен в интервале $0 < r \le \Delta_{min}$ и ограничивает при $||F(u_0)||$, стремящемся к 0, норму Δu из неравенства (46), т. е. $||\Delta u|| \le r$, где r – меньший положительный корень уравнения (43).

Установим скорость сходимости МВП. Из двух неравенств (19)

и $||F(u_{n+1}) - F(u_n) - F'(u_n)\Delta u_n - \frac{1}{2}F''(u_n)\Delta^2 u_n|| \le \frac{1}{6}L||\Delta u_n||^3$

следует, что

$$||F(u_{n+1})|| \le \frac{1}{6}L||\Delta u_n||^3$$

и

$$||\Delta u_n|| \le \frac{M}{\rho} + \sqrt{\left(\frac{M}{\rho}\right)^2 + 2\frac{\|F(u_n)\|}{\rho}}. \quad (49)$$

Значит, при выполнении условий теоремы МВП сходится к корню уравнения (2) с достаточно хорошим приближением по норме $||F(u_0)||$. Как и в методе Ньютона, проблему сходимости с удаленных от корня приближений решим параметрическим методом второго порядка, который назовем M_λ. Идея метода в том, что поправка Δu находится из уравнения

$$\frac{1}{2}F''(u_n)\Delta^2 u + \lambda(F'(u_n)\Delta u + F(u_n)) = 0, \lambda \in (0; 1]. \quad (50)$$

Тогда s-грань оператора $\lambda F'(u_n)$ с уменьшением λ может быть сколь угодно приближена к 0, что позволит вместо (41) решать уравнение (9.32). Снижение же нормы $\lambda F(u_n)$ гарантирует генерацию сходящегося в области существования корня процесса (40–50), т. к. оценка нормы приращения Δu из уравнения (9.50) при $\lambda \to 0$ имеет вид:

$$||\Delta u_n|| \le \frac{\lambda M}{\rho} + \sqrt{\left(\frac{\lambda M}{\rho}\right)^2 + 2\lambda\frac{\|F(u_n)\|}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{2}{\rho}\|F(u_n)\|}\,\lambda^{1/2}. \quad (51)$$

Алгоритм решения нелинейной системы алгебраических уравнений методом второго порядка

Ранее было отмечено, что метод второго порядка решения операторных уравнений вида (2) применяется тогда, когда сильная производная отображения F необратима на одном из итерационных приближений, т. е. когда определить корень уравнения методом Ньютона или его модификациями не представляется возможным.

Как и в других методах [4; 5], где поправка к приближению находится явно, основным этапом МВП является поиск приращения аргумента Δu по заданному приращению образа $F(u_n)$.

В методе второго порядка для этого требуется решить квадратное операторное уравнение

$$\frac{1}{2}F''(u_n)\Delta^2 u + F'(u_n)\Delta u + F(u_n) = 0. \qquad (52)$$

Так как корень НСАУ по теории должен иметь меньшую норму, то поиск итерационным методом поправки Δu (в алгоритме решения обозначим ее X) будем искать с начального приближения $X = 0$.

Подпрограмму решения квадратного операторного уравнения (52) МПП назовем *RKU* (рисунок 3), а входные данные к ней обозначим

$$A = \frac{1}{2}F''(u_n),\ B = F'(u_n),\ C = F(u_n).$$

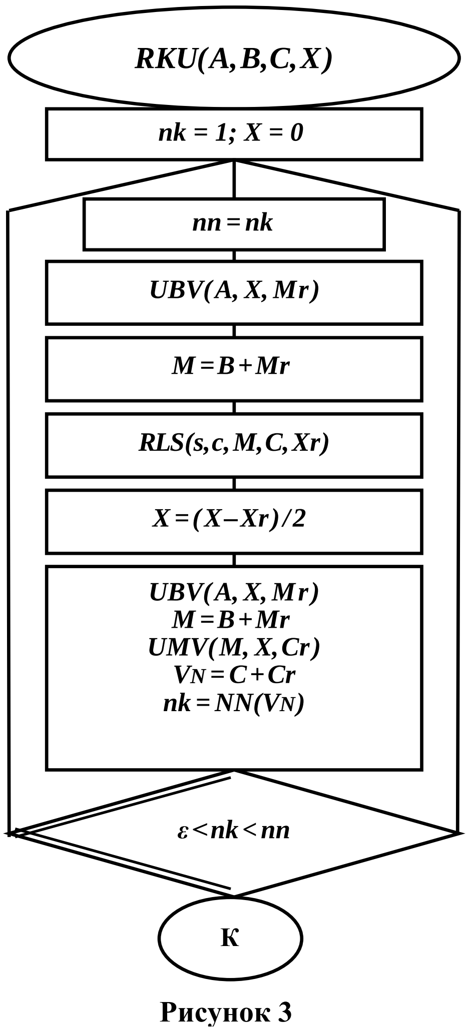

Рисунок 3

Для исполнения алгоритма данной процедуры требуется ввести две операции с массивами: умножение квадратной матрицы на вектор (*UMV*) и умножение кубичной матрицы на вектор (*UBV*). В результате произведения исходных массивов этих подпрограмм получим вектор *V* и матрицу *M* соответственно (рисунок 4).

В *RKU* так же используется подпрограмма решения линейной системы *RLS* (раздел 2.6 [2]) и функция вычисления нормы невязки решения квадратного уравнения на приближении *X*. Уточнение поправки *Du*=*X* в итерационном методе второго порядка осуществляется до тех пор, пока норма невязки nk при решении квадратного уравнения уменьшается и превосходит ε.

Алгоритмы подпрограмм *VVN* (вычисление вектора невязки НСАУ) и *YAC* (взятие первой производной Фреше оператора НСАУ), используемые в МВП, описаны в [2] (раздел 8.5). Подпрограмма *ITP* находит оптимальный параметр λ итерационного процесса.

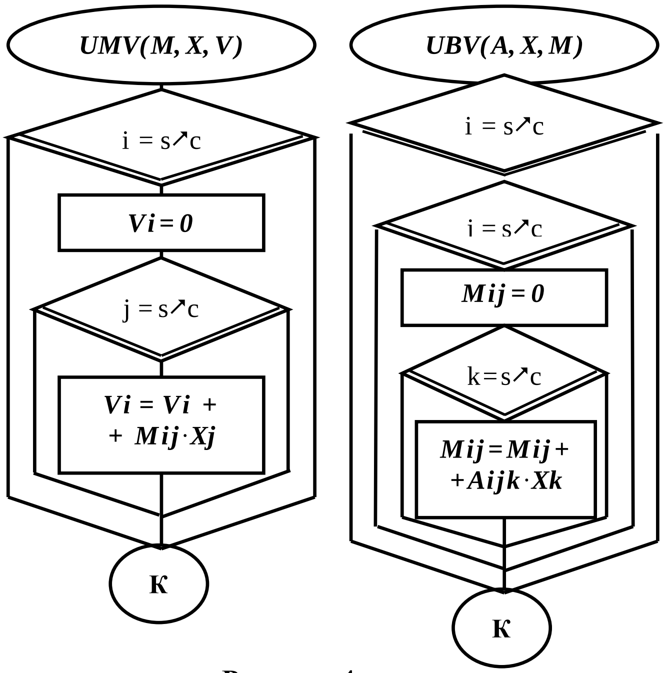

Рисунок 4

Сейчас перейдем к описанию алгоритма основного модуля программы решения нелинейной системы методом второго порядка *MVP*.

После ввода нулевого приближения *U* и вычисления вектора V_N невязки найдем при помощи функции N_N норму вектора невязки в R^n и сравним ее с заданной точностью. Если норма окажется меньше ε, то конструкция повторений с предусловием опускается.

Использование данного критерия Останова связано с упрощением прочтения алгоритма (более совершенные условия завершения вычислительного процесса приводятся в [2] в разделах 8.3 и 8.4). В случае продолжения итерационного процесса МВП решения НСАУ находятся приближения якобиана $B = Y$, гессиана G и билинейного оператора $A = G/2$.

Полученные массивы являются коэффициентами квадратного операторного уравнения (52), корень которого есть вектор поправки к текущему приближению. Чтобы придать целостность изложению метода второго порядка решения НСАУ, приведем описание подпрограммы *GES(U,Y,G)* вычисления второй сильной производной отображения на элементе *U*.

На рисунке 5 изображена объект-схема алгоритма построения гессиана G отображения F на элементе u_n, заданном в виде вектора *U* размерности $z = c - s + 1$, где s для нелинейных алгебраических систем обычно равно *1*. Опишем алгоритм вычисления элементов $k^{\text{-го}}$ листа гессиана НСАУ.

Входными данными в процедуру *GES* являются вектор *U* и основной якобиан *Y*. В счетчике изменим k-ую координату вектора *U*, а затем найдем вектор невязки *VNP*, соответствующий измененному вектору *U*.

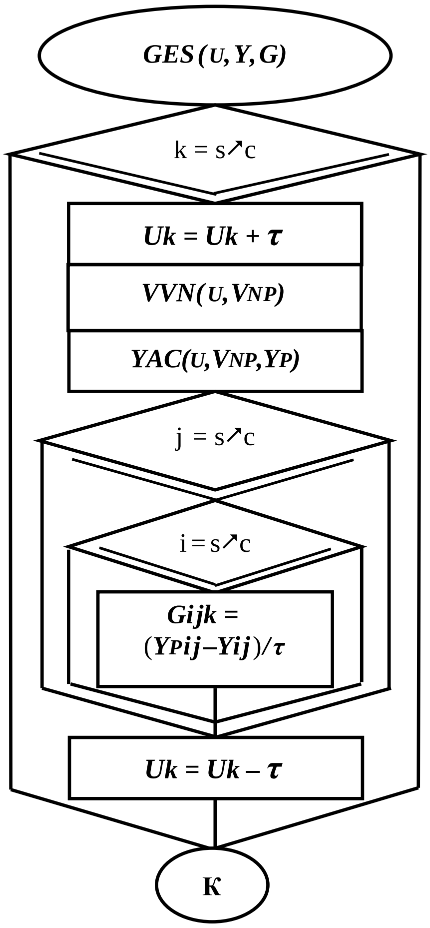

Рисунок 5

По полученным векторам приближения *U* и невязки *VNP* построим еще один якобиан *YP*. Исходный и новый якобианы входят в формулу вычисления элементов k-го листа гессиана

$$G_{ijk} = (YP_{ij} - Y_{ij})/\tau.$$

С помощью поправки Du и демпфирующего множителя λ находится следующее приближение. По этому приближению определяется вектор невязки V_N, норма V_N и проверяется выполнение условия критерия Останова (рисунок 6). Результатом исполнения алгоритма является вычисление приближения U корня U^* системы (16) с нормой невязки в R^n меньше ε.

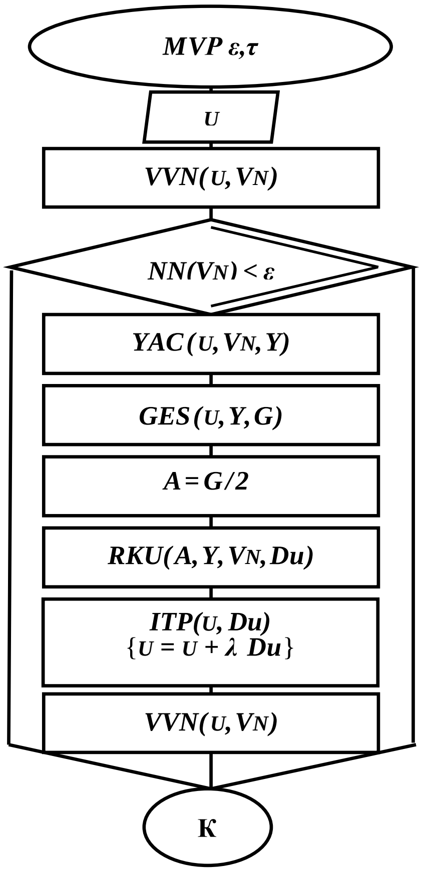

Рисунок 6

Сейчас тестовую нелинейную систему алгебраических уравнений из раздела 7.2 [2] можно решить с любого приближения (например, *(–1; 0)*), обращающего определитель якобиана в нуль.

Если с этих приближений решать систему (19) методом Ньютона, то здесь даже использование регуляризации линейного оператора не приведет к сходимости процесса.

Другими словами, для нахождения ньютоновской поправки гиперплоскость, образованная производной Фреше, наклоняется от точки касания в неопределенном направлении. Очевидно, что (в отличие от МВП) точно определить оптимальное направление антиградиентного спуска методом Ньютона в данном случае маловероятно.

Заключение

Локализация методами полиномиального анализа изолированного корня функционального уравнения (5) в определенной окрестности $Q_r = ||u - u_0|| \le r$ приближения из всюду плотного множества пространства решений позволяет исследователям, при достаточно малом r, использовать его в качестве искомого корня, не нарушая методологию функционального анализа. В данной работе локализация корня осуществляется методом второго порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 742 с.

2. Морозов, В. В. Прикладной анализ и программирование : пособие / В. В. Морозов. – Брест : БрГУ, 2012. – 246 с.

3. Красносельский, М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайнико, П. П. Забрейко. – М. : Наука, 1969. – 456 с.

4. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2006. – 430 с.

5. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 624 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.10.2020