

УДК 519.652

**Екатерина Ивановна Качаловская<sup>1</sup>, Дмитрий Владимирович Грицук<sup>2</sup>**<sup>1</sup>ст. преподаватель каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина**Ekaterina Kachalovskaya<sup>1</sup>, Dmitry Gritsuk<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Computer Science  
of Brest State A. S. Pushkin University<sup>2</sup>Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science  
of Brest State A. S. Pushkin Universitye-mail: <sup>1</sup>katerina.kulgun@gmail.com; <sup>2</sup>dmitry.gritsuk@gmail.com

## СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Построены интерполяционные алгебраические матричные многочлены разных структур: Лагранжева, Ньютонова, Эрмитова, Эрмита – Биркгофа и других типов. Построена итерационная схема переменных направлений в реализации спектрального метода Чебышева для двумерного уравнения Пуассона. Выполнена итерационная реализация спектрального метода для двумерных эллиптических задач. Реализован спектральный метод Чебышева для двумерного уравнения Пуассона методом переменных направлений на GPU.

**Ключевые слова:** интерполирование, многочлен, матрица.

### *Spectral Methods of Variable Directions for Problems of Mathematical Physics*

Interpolating algebraic matrix polynomials of different structures were constructed: Lagrange, Newton, Hermitian, Hermite – Birkhoff and other types. An iterative scheme of alternating directions has been constructed in the implementation of the Chebyshev spectral method for the two-dimensional Poisson equation. An iterative implementation of the spectral method for two-dimensional elliptic problems has been carried out. Implemented the Chebyshev spectral method for the two-dimensional Poisson equation using the alternating direction method on the GPU.

**Key words:** interpolation, polynomial, matrix.

### **Введение**

Спектральные методы решения дифференциальных задач привлекают внимание с точки зрения высокой точности, которая во многих случаях сравнима с аналитическими подходами. Одна из наиболее серьезных проблем, связанная с практическим использованием данного класса методик, связана со сравнительно большими вычислительными затратами на их реализацию. Например, стандартное использование спектрального метода для многомерных задач со смешанными производными приводит к большим системам линейных алгебраических уравнений с полными матрицами. Из ряда возможных путей преодоления такого ряда трудностей можно отметить перспективность использования методов переменных направлений и других итерационных методов с переобусловливателями.

### **1. Алгебраическое интерполирование**

В теории интерполирования функций скалярных аргументов построены интерполяционные многочлены относительно произвольных чебышевских систем функций и их частных случаев: тригонометрических, экспоненциальных, дробно-рациональных и других классов систем. Такого вида интерполяционные формулы, также как и формулы алгебраического типа, находят применение в ряде областей математики и ее приложений [1; 2].

При решении многих практических задач обычно используются интерполяционные формулы невысоких порядков. Это относится как к случаю интерполяции скалярных функций, так и к задаче операторного интерполирования и вызвано в значительной степени тем, что при увеличении порядка интерполяционных формул значительно усложняется их общий вид, что приводит, соответственно, к более сложной структуре получаемых на их основе алгоритмов.

Наряду с построением интерполяционных формул операторного интерполирования невысоких порядков является актуальным исследование данной задачи и для случая формул высших порядков.

Рассмотрим пространство  $C^m[T]$  квадратных матриц  $A(t) = [a_{ij}(t)]$ , для которых производная  $A^{(m)}(t) = [a_{ij}^{(m)}(t)]$  порядка  $m$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и матричный многочлен первой степени вида

$$P_1(A) = B + \sum_{j=0}^n A(t_j)C_j + \sum_{k=0}^m \int_T A^{(k)}(s)P_k(t,s)ds, \quad (1.1)$$

где  $t_0, t_1, \dots, t_n$  – фиксированные точки отрезка  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $B = B(t)$ ,  $C_j = C_j(t) (j = \overline{0, n})$ ,  $P_k(t, s) (k = \overline{0, m})$  – заданные матрицы той же размерности, что и матрица  $A(t)$ .

Пусть  $F(A)$  – заданная на  $C^m[T]$  функция матричного аргумента  $A$ . Имеет место следующая

Теорема 1.1 [3]. Для формулы

$$L_1(A) = F(A_0) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [A(t_i) - A_0(t_i)][A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} [F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] + \\ + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] d\tau, \quad (1.2)$$

где  $A_0 = A_0(t)$ ,  $A_1 = A_1(t)$  – узлы интерполирования,

$$\sigma_{1i}(t) = A_0(t) + A_1(t_i) - A_0(t_i), \quad (3)$$

$$H_i(t) = A(t) - A_0(t) - A(t_i) + A_0(t_i), \quad (1.4)$$

выполняются условия

$$L_1(A_i) = F(A_i) (i = \overline{0, 1}), \quad (1.5)$$

и она точна для матричных многочленов вида (1.1).

Если узлы интерполирования  $A_i$  имеют вид  $A_i = H + \alpha_i I$ , где  $H = H(t)$  – фиксированная матрица,  $\alpha_i = \alpha_i(t) (i = \overline{0, 1})$  – заданные числовые функции, причем  $\alpha_0(t_i) \neq \alpha_1(t_i) (i = \overline{0, n})$ ,  $I$  – единичная матрица, то формула (2) примет вид

$$L_1(A) = F(A_0) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \frac{A(t_i) - A_0(t_i)}{\alpha_1(t_i) - \alpha_0(t_i)} [F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] + \\ + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] d\tau,$$

где

$$\sigma_{1i}(t) = A_0(t) + (\alpha_1(t_i) - \alpha_0(t_i))I = H(t) + (\alpha_0(t) + \alpha_1(t_i) - \alpha_0(t_i))I, \\ H_i(t) = A(t) - A(t_i) - H(t) + H(t_i) - (\alpha_0(t) - \alpha_0(t_i))I.$$

Построим аналогичную формулу второго порядка.

Рассмотрим матричные многочлены первой и второй степени вида

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1(A) = B + \sum_{j_1, j_2=0}^n C_{j_1 j_2} [A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})] D_{j_1 j_2} + \\ + \sum_{k=0}^m \int_{T^2} P_k(t, s_1, s_2) [A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)] Q_k(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2; \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2(A) = \tilde{P}_1(A) + \sum_{j=0}^n C_{3,j} [A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})] C_{4,j} [A(t_{j_3}) - A(t_{j_4})] C_{5,j} + \\ + \sum_{k=0}^m \int_{T^4} P_{k,3}(t, s) [A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)] P_{k,4}(t, s) [A^{(k)}(s_3) - A^{(k)}(s_4)] P_{k,5}(t, s) ds, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $t_0, t_1, \dots, t_n$  – те же фиксированные точки отрезка  $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $B = B(t)$ ,  $C_{j_1 j_2} = C_{j_1 j_2}(t)$ ,  $D_{j_1 j_2} = D_{j_1 j_2}(t)$ ,  $C_{i,j} = C_{i,j}(t)$  ( $i = 3, 4, 5$ ),  $(j, j_1, j_2, j_3, j_4 = \overline{0, n})$  – заданные фиксированные матрицы,  $P_k(t, s_1, s_2)$ ,  $Q_k(t, s_1, s_2)$ ,  $P_{k,i}(t, s)$  ( $i = 3, 4, 5$ ),  $(k = \overline{0, m})$  – также заданные матрицы той же размерности, что и  $A(t)$ , а  $s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ ,  $ds = ds_1 ds_2 ds_3 ds_4$ .

Заметим, что формула (1.2) инвариантна также относительно многочленов вида (1.6). Действительно, очевидно, что  $\sigma_{1i}(t_{j_1}) - \sigma_{1i}(t_{j_2}) = A_0(t_{j_1}) - A_0(t_{j_2})$  и  $\sigma_{1i}^{(k)}(s_1) - \sigma_{1i}^{(k)}(s_2) = A_0^{(k)}(s_1) - A_0^{(k)}(s_2)$ , поэтому для

$$F(A) = \sum_{j_1, j_2=0}^n C_{j_1 j_2} [A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})] D_{j_1 j_2} \quad (1.8)$$

и

$$F(A) = \sum_{k=0}^m \int_{T^2} P_k(t, s_1, s_2) [A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)] Q_k(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2 \quad (1.9)$$

при  $i = 0, 1, \dots, n$  справедливы равенства  $F(\sigma_{1i}) - F(A_0) = 0$ .

Для функций (1.8), (1.9) и любых матриц  $A(t)$  и  $H(t)$  из пространства  $C^m[T]$  по определению дифференциала Гато справедливы, соответственно, равенства

$$\delta F[A(\cdot); H(\cdot)] = \sum_{j_1, j_2=0}^n C_{j_1 j_2} [H(t_{j_1}) - H(t_{j_2})] D_{j_1 j_2}, \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \delta F[A(\cdot); H(\cdot)] = \\ = \sum_{k=0}^m \int_{T^2} P_k(t, s_1, s_2) [H^{(k)}(s_1) - H^{(k)}(s_2)] Q_k(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из (1.10) и (1.11) при  $A(t) = \sigma_{1i}(t) + \tau(A_1(t) - \sigma_{1i}(t))$  и  $H(t) = H_i(t)$  для функций (1.8), (1.9) будем иметь

$$\delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] = F(A) - F(A_0).$$

Следовательно,  $L_1(A) \equiv F(A)$  при  $F(A) = \tilde{P}_1(A)$ , т.е. формула (1.2) точна также и для многочленов первой степени вида (1.6).

Пусть  $F(A)$  – функция от матриц, где  $A \in C^m[a, b]$ . Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} l_{21}(A) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [A(t_i) - A_1(t_i)] [A(t_i) - A_0(t_i)] [A_2(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} \times \\ \times \left( [A_1(t_i) - A_2(t_i)]^{-1} [F(\sigma_{1i}^{21}) - F(A_2)] + [A_0(t_i) - A_1(t_i)]^{-1} [F(\sigma_{1i}^{01}) - F(A_0)] \right), \\ l_{22}(A) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \int_0^1 \tau \delta^2 F[\sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}^{01}(\cdot)) + \\ + \tau S(A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{12}(\cdot)); H_{i1}(\cdot) H_{i0}(\cdot)] d\tau ds, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $\sigma_{1i}^{01}(t) = \sigma_{1i}(t)$ ,  $\sigma_{1i}^{12}(t) = A_1(t) + A_2(t_i) - A_1(t_i)$ ,  $\sigma_{1i}^{21}(t) = A_2(t) + A_1(t_i) - A_2(t_i)$ ,  $H_{i0}(t) = H_i(t)$ ,  $H_{i1}(t) = A(t) - A_1(t) - A(t_i) + A_1(t_i)$ , а функции  $\sigma_{1i}(t)$  и  $H_i(t)$ , как и раньше, задаются формулами (1.3), (1.4).

Имеет место

Теорема 1.2. Если существуют матрицы  $[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}$ ,  $[A_2(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}$ ,  $[A_1(t_i) - A_2(t_i)]^{-1}$  ( $i = \overline{0, n}$ ), то для формулы

$$L_2(A) = L_1(A) + l_{21}(A) + l_{22}(A), \quad (1.13)$$

где  $A_i = A_i(t)$  ( $i = \overline{0, 2}$ ) – узлы интерполирования,  $L_1(A)$  – многочлен, определенный формулой (1.2), выполняются условия

$$L_2(A_i) = F(A_i)(i = \overline{0, 2}), \quad (1.14)$$

и она инвариантна относительно матричных многочленов вида (1.7).

## 2. Сравнение сложности и реализация методов для решения двумерного уравнения Пуассона

### 2.1 Итерационная схема переменных направлений в реализации спектрального метода Чебышева для двумерного уравнения Пуассона

Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного уравнения Пуассона в прямоугольной области:

$$\frac{\partial}{\partial x} k(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y), \quad (2.1)$$

$$u(x = \pm 1, y) = u(x, y = \pm 1) = 0. \quad (2.2)$$

Полагаем, что коэффициенты уравнения (2.1) – достаточно гладкие функции, что допускает использование не дивергентной формы уравнения (2.1).

Для численного решения данной задачи используем спектральный метод на основе полиномов Чебышева [3]. На сетке чебышевских узлов

$$\omega_h = \left\{ (x_k, y_m), x_k = y_k = \cos \frac{k\pi}{N+1}, k = \overline{1, N}, m = \overline{1, N} \right\} \quad (2.3)$$

исходная дифференциальная задача (2.1) – (2.2) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$Ac = q, \quad (2.4)$$

где матрица  $A$  имеет вид:

$$A = K \cdot (I \otimes D^2 + D^2 \otimes I) + K_x \cdot I \otimes D + K_y \cdot D \otimes I.$$

Здесь  $D$  – матрица спектрального дифференцирования Чебышева размерности  $N \times N$ , учитывающая нулевые краевые условия [3; 4],  $I$  – единичная матрица такой же размерности,  $K, K_x, K_y$  – диагональные матрицы размерности  $N^2 \times N^2$ , содержащие значения функции  $k(x, y)$  и ее частных производных по  $x$  и  $y$  соответственно в узлах сетки (2.3), упорядоченных по столбцам.

Для решения системы уравнений (2.4) используем итерационный метод бисопряженных градиентов. В рамках данного метода сравним два типа переобусловливателей, построенных на основе разностной аппроксимации дифференциального оператора задачи (2.1), (2.2) с постоянными коэффициентами матрицы  $A_{FD}$ . В первом случае для реализации двумерной сеточной задачи воспользуемся итерационным методом переменных направлений (ADI), а во втором случае – приближенным методом неполной LU факторизации (iLU). При решении задачи с переменными коэффициентами исходная матрица системы (2.4) масштабировалась с помощью диагональной матрицы коэффициентов задачи:  $A = K^{-1} \cdot A$ .

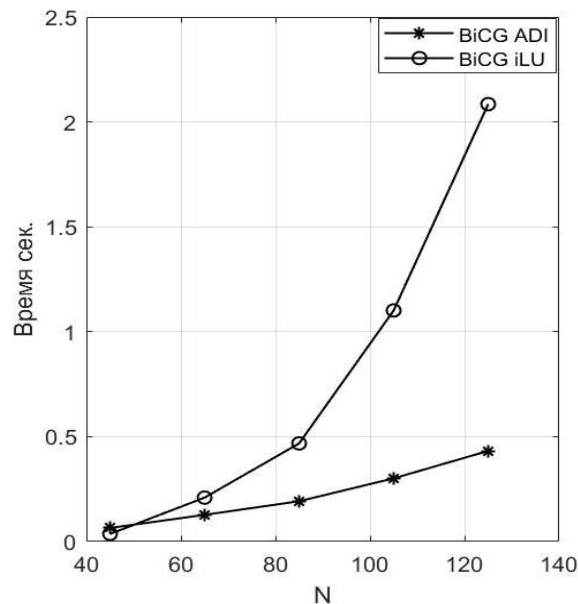
Отметим, что матрицы разностного и спектрального дифференцирования для задачи (2.1) – (2.2) с постоянными коэффициентами при любом сколь угодно большом количестве узлов сетки (2.3) удовлетворяет следующей оценке [5]:

$$1 \leq \|A_{FD}^{-1}A\| \leq \pi^2/4. \quad (2.5)$$

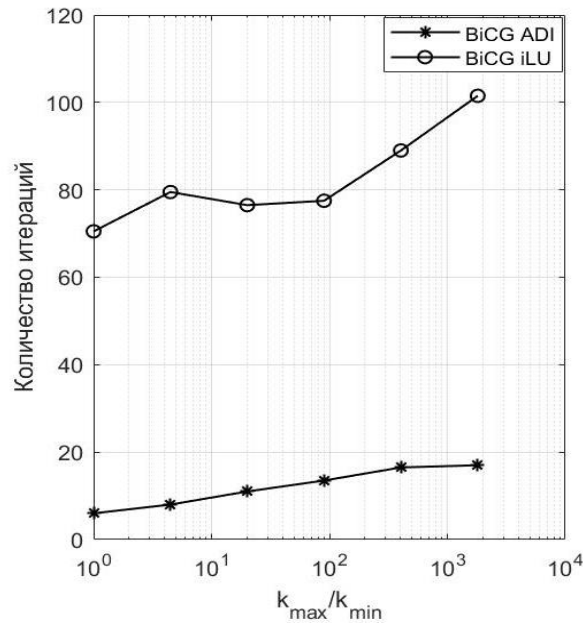
Оценка (2.5), согласно [6], позволяет рассматривать матрицу разностного дифференцирования  $A_{FD}$  в качестве спектрально-оптимального переобусловливателя для матриц спектрального дифференцирования  $A$ . Поскольку границы спектра переобусловленной матрицы равномерно ограничены по  $N$ , то количество итераций при использовании данного переобусловливателя не зависит от количества узлов сетки. Кроме того, компоненты аддитивного представления матрицы  $A_{FD}$  являются симметричными и перестановочными относительно умножения. В силу последнего обстоятельства данный тип переобусловливателя при обработке методом переменных направлений с оптимальным набором итерационных параметров обеспечивает эффективность, сопоставимую с алгоритмами быстрого дискретного преобразования Фурье [7].

Результаты численных экспериментов, касающиеся сравнения эффективности итерационных алгоритмов с использованием переобусловливателей на основе метода переменных направлений и неполной LU факторизации, представлены на рисунках 2.1, 2.2. Переменные коэффициенты задачи (2.1), (2.2) задавались в виде  $k(x, y) = \exp(-s(x^2 + 2y^4)), f(x, y) = 1$ .

Как видно из представленных результатов, схема переменных направлений обеспечивает существенные преимущества итерационного метода бисопряженных градиентов по сравнению с методом на основе неполной LU факторизации, при этом отмеченные преимущества возрастают с ростом количества узлов сетки  $N$ . Влияние неоднородности коэффициентов задачи на количество итераций достаточно хорошо компенсируется за счет соответствующего масштабирования системной матрицы (рисунок 2.2).



**Рисунок 2.1 – Зависимость вычислительных затрат от размерности сетки при реализации задачи (2.1), (2.2) с переменными коэффициентами,  $s = 1$**



**Рисунок 2.2 – Зависимость количества итераций от отношения максимального и минимального значений коэффициента задачи,  $N = 85$**

Замечание. Если вместо матрицы  $A_{FD}$  использовать матрицу на основе спектрального дифференцирования, то количество итераций в методе бисопряженных градиентов на основе неполной LU факторизации сокращается примерно вдвое, однако суммарные вычислительные затраты при этом возрастают за счет более полной матрицы переобусловливателя [8].

**2.2 Об итерационной реализации спектрального метода для двумерных эллиптических задач**

Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного эллиптического уравнения в прямоугольной области с переменными коэффициентами. В случае непрерывно дифференцируемых коэффициентов уравнение может быть представлено в не дивергентном виде:

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = -q(x, y), \tag{2.6}$$

$$u(x = \pm 1, y) = u(x, y = \pm 1) = 0. \tag{2.7}$$

Здесь  $k = k(x, y) \in C^m, m \geq 1$ .

Для численного решения данной задачи используем спектральный метод на основе полиномов Чебышева [3]. На сетке узлов

$$\omega_h = \left\{ (x_k, y_m), x_k = y_m = \cos \frac{k\pi}{N+1}, k = \overline{1, N}, m = \overline{1, N} \right\} \tag{2.8}$$

исходная дифференциальная задача (2.6) – (2.7) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида

$$AU = Q, \tag{2.9}$$

где  $A \in R^{N^2 \times N^2}$  – квадратная матрица, имеющая блочную структуру, которая строится на основе матриц спектрального дифференцирования Чебышева с учетом краевых условий (2.7) [3],  $U$  и  $Q$  – векторы приближенного решения и правой части (2.6) соответственно в узлах сетки (2.8), упорядоченных по столбцам.

Для итерационной реализации (2.9) используем метод бисопрженных градиентов (стабилизированную версию) [4]. Предварительно отнормируем строки системы (2.9) на значения коэффициентов задачи  $k(x, y)$  в соответствующих узлах сетки. В качестве переобусловливателя, который является спектрально оптимальным для матрицы второй спектральной производной с постоянными коэффициентами, используем матрицу второй разностной производной на множестве внутренних узлов сетки (2.8) [9]. Для обработки данного переобусловливателя используем итерационный метод переменных направлений (ADI) с оптимальным набором итерационных параметров [7].

Результаты численных экспериментов показывают высокую эффективность рассмотренного алгоритма. На рисунке 2.3 представлены зависимости количества итераций и удельного времени решения задачи (2.6), (2.7) от размерности сетки  $N$ . Количество итераций не превышает 13 и практически не зависит от размерности сетки, а вычислительные затраты вполне отвечают оптимальной вычислительной сложности [1].

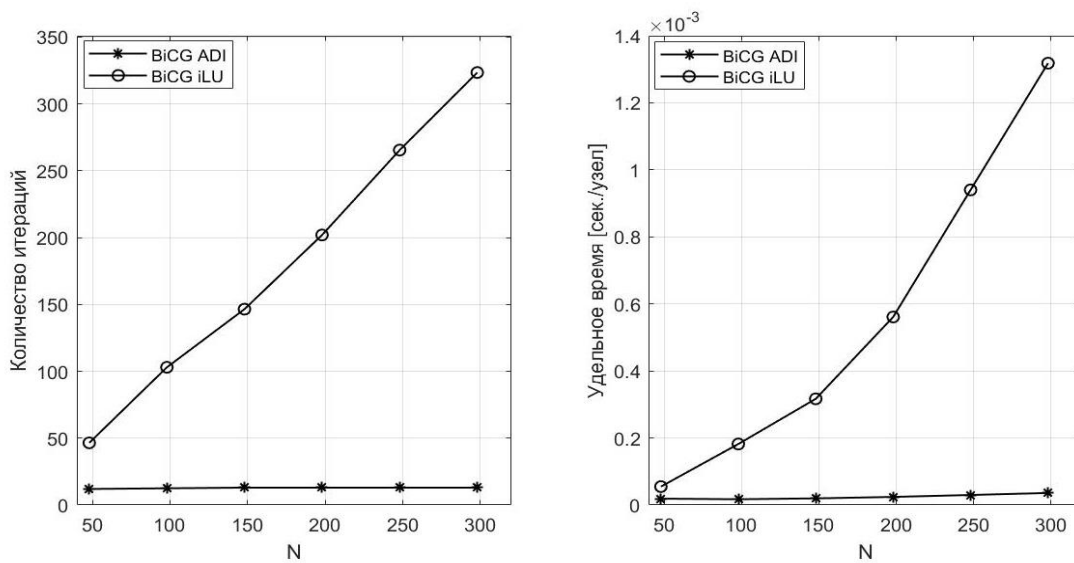


Рисунок 2.3 – Показатели эффективности итерационной реализации метода

Для сравнения на рисунке 2.3 приведены аналогичные показатели итерационного метода с переобусловливателем на основе неполной LU факторизации (iLU).

### 2.3 Особенности реализации спектрального метода Чебышева для двумерного уравнения Пуассона методом переменных направлений на GPU

Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного уравнения Пуассона в прямоугольной области:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = q(x, y), \quad (2.10)$$

$$u(x = \pm 1, y) = u(x, y = \pm 1) = 0. \quad (2.11)$$

Для численного решения данной задачи используем спектральный метод на основе полиномов Чебышева [3]. На сетке узлов

$$\omega_h = \left\{ (x_k, y_m), x_k = y_m = \cos \frac{k\pi}{N+1}, k = \overline{1, N}, m = \overline{1, N} \right\} \quad (2.12)$$

исходная дифференциальная задача (2.10) – (2.11) сводится к решению системы матричных уравнений вида

$$UA^T + AU = Q. \quad (2.13)$$

Здесь  $U$  – двумерный массив (матрица) приближенных значений решения задачи (2.10), (2.11) в узлах сетки (2.12),  $A \in R^{N \times N}$  – матрица спектрального дифференцирования Чебышева второго порядка [3; 4], в которой удалены первые и последние строки и столбцы согласно однородным краевым условиям (2.11).

Первое и второе слагаемые в левой части (2.13) отвечают применению матрицы спектрального дифференцирования  $A$  к строкам и столбцам массива  $U$ , что определяет дифференцирование по  $x$  и  $y$  соответственно.

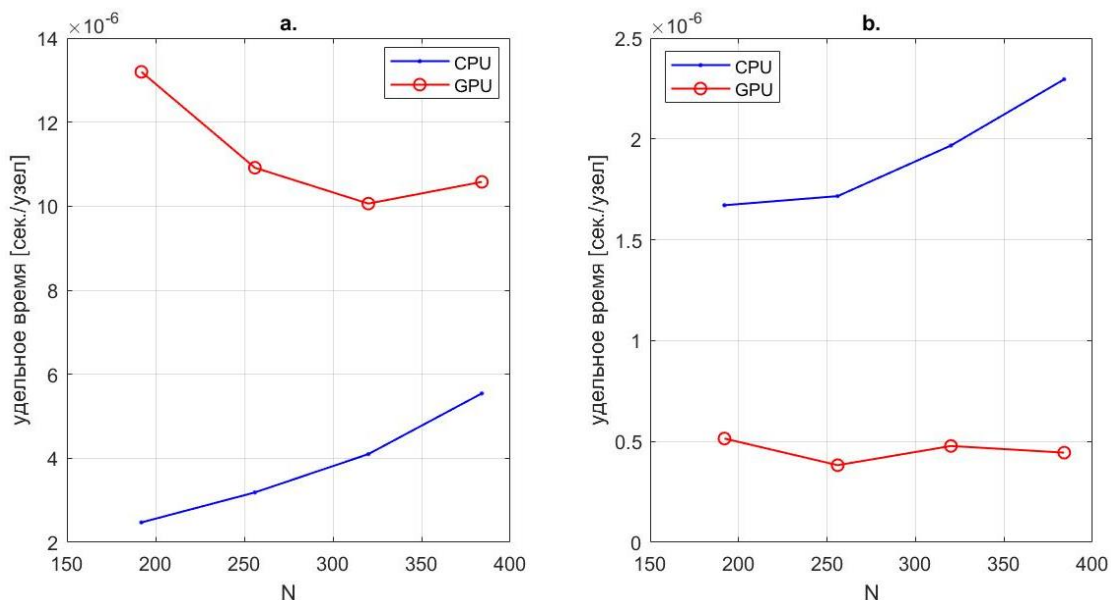
Итерационный алгоритм переменных направлений для решения системы (2.13) имеет вид [7]:

$$\begin{aligned}(\omega_{k+1}E + A)U_{k+1/2}^T &= U_k(\omega_{k+1}E - A)^T + Q^T, \\(\omega_{k+1}E + A)U_{k+1} &= (\omega_{k+1}E - A)U_{k+1/2} + Q,\end{aligned}\quad (2.14)$$

где итерационные параметры  $\omega_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , вычисляются по известным формулам [7, с. 438],  $K = \pi^{-2} \ln(4/\eta) \ln(4\varepsilon^{-1})$ ,  $\eta = \lambda \min_{max} \lambda \max_{min} \varepsilon$  – требуемая точность.

Вычислительная сложность (2.14) определяется необходимостью решения на каждой итерации систем линейных алгебраических уравнений с матрицей  $C_k = \omega_{k+1}E + A$ , что требует порядка  $O(N^3)$  арифметических операций. Учитывая, что количество итераций  $K$  имеет логарифмическую зависимость от числа обусловленности матрицы [7], а число обусловленности, в свою очередь, имеет степенную зависимость от размерности матрицы  $N$  [6], вычислительная сложность метода переменных направлений (2.14) имеет порядок  $O(N^3 \ln(N))$ .

Результаты численных экспериментов показывают, что временные затраты на реализацию алгоритма не всегда пропорциональны вычислительной сложности. Они зависят также от вычислительной платформы, на которой выполняются вычисления. На рисунке 2.4а представлены результаты численной оценки удельных временных затрат на один узел сетки при расчетах на центральном процессоре (CPU – Intel Core™ i5-6200) и графическом (GPU – GeForce 940MX).



**Рисунок 2.4 – Удельные временные затраты на реализацию итерационного алгоритма (2.14) с двойной точностью – а и одинарной точностью при постоянном итерационном параметре – б**



Вычисления проводились для полностью векторизованного алгоритма в среде Матлаб с двойной точностью. Как видно из рисунка, при вычислениях на CPU удельные временные затраты согласуются с оценкой вычислительной сложности. В то же время при использовании GPU для размерности сетки  $N = 150 \div 300$  наблюдается аномальное снижение удельных временных затрат с ростом  $N$ , что можно объяснить повышением производительности GPU при обработке больших массивов данных.

Несложно видеть также, что в целом производительность GPU при реализации алгоритма с двойной точностью в диапазоне  $N = 150 \div 400$  оказывается как минимум вдвое меньше по сравнению с производительностью CPU.

Для повышения эффективности реализации можно предложить модифицированный алгоритм с постоянным итерационным параметром. При этом количество итераций для достижения заданной точности возрастает примерно вдвое. Однако в этом случае матрицы  $C_k = \omega_{k+1}E + A = C$  и  $S_k = \omega_{k+1}E - A = S$  не меняются от итерации к итерации и могут быть вычислены один раз перед итерационным циклом. Более того, вместо решения на каждой итерации систем линейных алгебраических уравнений можно один раз обратить матрицу  $C$  и использовать далее при реализации матричное умножение. Последнее не снижает вычислительную сложность алгоритма, но позволяет снизить вычислительные затраты благодаря возможности перехода на вычисления с одинарной точностью.

Результаты численного эксперимента для случая одинарной точности с постоянным итерационным параметром представлены на рисунке 1b. Как видно из рисунка, предложенная модификация позволяет многократно повысить эффективность вычислений на GPU. Использование одинарной точности для реализации (2.14) невозможно из-за высокой вычислительной погрешности [11]. В предложенном алгоритме данная погрешность была порядка  $10^{-5} \div 10^{-4}$  [12].

### Заклучение

При решении многих практических задач обычно используются интерполяционные формулы невысоких порядков. Это относится как к случаю интерполяции скалярных функций, так и к задаче операторного интерполирования и вызвано в значительной степени тем, что при увеличении порядка интерполяционных формул, значительно усложняется их общий вид, что приводит, соответственно, к более сложной структуре получаемых на их основе алгоритмов. Наряду с построением интерполяционных формул операторного интерполирования невысоких порядков является актуальным исследование данной задачи и для случая формул высших порядков.

Построены интерполяционные алгебраические матричные многочлены разных структур: Лагранжева, Ньютонова, Эрмитова, Эрмита – Биркгофа и других типов. Также выполнено построение итерационной схемы переменных направлений в реализации спектрального метода Чебышева для двумерного уравнения Пуассона, выполнена итерационная реализация спектрального метода для двумерных эллиптических задач и реализован спектральный метод Чебышева для двумерного уравнения Пуассона методом переменных направлений на GPU.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. – 2-е изд. – М. : Наука, 1975. – 632 с.

3. Weideman, J. A. A MATLAB differentiation matrix suite / J. A. Weideman, S. C. Reddy // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). – 2000. – Т. 26, nr 4. – P. 465–519.
4. Orszag, S. A. Spectral methods for problems in complex geometrics / S. A. Orszag // Numerical methods for partial differential equations. – Academic Press, 1979. – P. 273–305.
5. Дьяконов, Е. Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач / Е. Г. Дьяконов. – М. : Наука, 1989. – 272 с.
6. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев – М. : Наука, 1978. – 532 с.
7. Кульгун, Е. И. Итерационная схема переменных направлений в реализации спектрального метода Чебышева для двумерного уравнения Пуассона / Е. И. Кульгун // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 23–24 апр. 2020 г. / Брест. гос. ун-т. – Брест, 2020. – С. 74–76.
8. Van der Vorst, H. A. BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems / H. A. Van der Vorst // SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1992, – Vol. 13, nr 2. – P. 631–644.
9. Волков, В. М. Об итерационной реализации спектрального метода для двумерных эллиптических задач / В. М. Волков, Е. И. Мацулевич // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы X респ. науч.-практ. конф., Брест, 22 окт. 2021 г. / Брест. гос. ун-т. – Брест, 2021.
10. Абрашин, В. Н. О вычислительной погрешности векторно-аддитивных итерационных методов / В. Н. Абрашин, В. М. Волков, Н. Г. Жадаева // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 990–993.
11. Кульгун, Е. И. Особенности реализации спектрального метода Чебышева для двумерного уравнения Пуассона методом переменных направлений на GPU / Е. И. Кульгун В. М. Волков, Е. В. Проконина // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 23–24 апр. 2021 г. / Брест. гос. ун-т. – Брест, 2021. – С. 12.
12. Boyd, J. P. Chebyshev and Fourier spectral methods / J. P. Boyd. – New York : DOVER Publications, 2000. – 594 p.

## REFERENCES

1. Kalitkin, N. N. Chisliennyje metody / N. N. Kalitkin. – М. : Nauka, 1978. – 512 s.
2. Bakhvalov, N. S. Chisliennyje metody / N. S. Bakhvalov. – 2-je izd. – М. : Nauka, 1975. – 632 s.
3. Weideman, J. A. A MATLAB differentiation matrix suite / J. A. Weideman, S. C. Reddy // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). – 2000. – Т. 26, nr 4. – P. 465–519.
4. Orszag, S. A. Spectral methods for problems in complex geometrics / S. A. Orszag // Numerical methods for partial differential equations. – Academic Press, 1979. – P. 273–305.
5. D'jakonov, Ye. G. Minimizacija vychislitel'noj raboty. Asimptoticheski optimal'nyje algoritmy dla elliptichieskikh zadach / Ye. G. D'jakonov. – М. : Nauka, 1989. – 272 s.
6. Samarskij, A. A. Metody reshenija setochnykh uravnenij / A. A. Samarskij, Ye. S. Nikolajev. – М. : Nauka, 1978. – 532 s.
7. Kul'gun, Ye. I. Iteracionnaja skhema pieriemiennykh napravlenij v riezalizacii spiektral'nogo metoda Chiebysheva dla dvumiernogo uravnenija Puassona /

Ye. I. Kul'gun // Matematichieskoje modelirovanije i novyje obhazovatel'nyje tiekhnologii v matematikie : materialy resp. nauch.-prakt. konf., Brest, 23–24 apr. 2020 g. / Brest. gos. un-t. – Brest, 2020. – S. 74–76.

8. Van der Vorst, H. A. BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems / H. A. Van der Vorst // SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1992, – Vol. 13, nr 2. – P. 631–644.

9. Volkov, V. M. Ob iteracionnoj riezalizacii spiektral'nogo mietoda dlja dvumiernykh elliptichieskikh zadach / V. M. Volkov, Ye. I. Maculievich // Vychislitel'nyje mietody, modeli i obrazovatel'nyje tiekhnologii : materialy X resp. nauch.-prakt. konf., Brest, 22 okt. 2021 g. / Brest. gos. un-t. – Brest, 2021.

10. Abrashin, V. N. O vychislitel'noj pogrieshnosti vektorno-additivnykh iteracionnykh mietodov / V. N. Abrashin, V. M. Volkov, N. G. Zhadajeva // Diffierenc. uravnienija. – 2005. – T. 41, nr 7. – S. 990–993.

11. Kul'gun, Ye. I. Osobiennosti riezalizacii spiektral'nogo mietoda Chiebysheva dlja dvumiernogo uravnienija Puassona mietodom pieriemienykh napravlienij na GPU / Ye. I. Kul'gun, V. M. Volkov, E. V. Prokonina, // Matematichieskoje modelirovanije i novyje obrazovatel'nyje tiekhnologii v matematikie : materialy resp. nauch.-prakt. konf., Brest, 23–24 apr. 2021 g. / Brest. gos. un-t. – Brest, 2021. – S. 12.

12. Boyd, J. P. Chebyshev and Fourier spectral methods / J. P. Boyd. – New York : DOVER Publications, 2000. – 594 p.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 12.04.2024*