УДК 519.6 + 517.983.54

О. В. Матысик[1], Д. В. Гавва[2], Е. А. Сирисько[3]
[1]канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]преподаватель-стажер каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[3]преподаватель-стажер каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: matysikoleg@mail.ru[1]

ОСТАНОВ ПО ПОПРАВКАМ В НЕЯВНОМ МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

В гильбертовом пространстве для решения линейных операторных уравнений первого рода с положительным ограниченным и несамосопряженным оператором предлагается неявный итерационный процесс. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по поправкам, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость итерационного метода, получена оценка для момента останова.

MATYSIK O. V., GAVVA D. V., SIRISKO Ye. A.

STOPPING BY THE CORRECTION IN THE IMPLICITE METHOD OF ITERATIONS OF THE SOLUTION OF LINEAR OPERATOR EQUATIONS OF THE FIRST KIND

In the Hilbert space for solving linear operator equations the first kind with affirmative limited and non self–conjugate operator the implicite iteration process is proposed. The application of a stopping rule by amendments for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution. In work the convergence of the iteration method is proved, and estimation the moment of stop is received.

1. Постановка задачи

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – оператор положительный, ограниченный, несамосопряжённый. Предполагается, что нуль не является собственным значением оператора A. Однако нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части y уравнение (1) имеет единственное решение x. Будем искать его, используя неявный итерационный метод

$$x_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\left[x_n + \alpha A^*A\left(A^*y\right)\right],\ x_0 = 0,\ \alpha > 0. \tag{2}$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближенно: $\|y - y_\delta\| \le \delta$, метод (2) примет вид

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\left[z_n + \alpha A^*A\left(A^*y_\delta\right)\right] + \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}u_n,\ z_0 = 0,\ \alpha > 0, \tag{3}$$

где u_n – ошибки в вычислении итераций, причем $\|u_n\| \le \beta$.

Обозначим $C=\left(E+\alpha\left(A^{*}A\right)^{2}\right)^{-1}$, $B=\left(E+\alpha\left(A^{*}A\right)^{2}\right)^{-1}\alpha\left(A^{*}A\right)A^{*}$. Тогда метод (3) примет вид

$$z_{n+1}=Cz_n+By_\delta+Cu_n. \tag{4}$$

Ранее [1] была изучена сходимость метода (3) с априорным выбором числа итераций для самосопряженного оператора A. Там показано, что при условии $\alpha>0$ итерационный метод (3) сходится, если число итераций n выбирать из условия $\sqrt{n}\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. В предположении, что точное решение x уравнения (1) истокообразно представимо, получены априорная оценка погрешности и априорный момент останова.

2. Правило останова по поправкам (соседним приближениям)

В том случае, когда истокообразная представимость точного решения неизвестна, метод (3) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по соседним приближениям [2–5]. Зададим уровень останова $\varepsilon>0$ и момент останова m определим условиями:

$$\|z_n-z_{n+1}\|>\varepsilon,\ (n<m),\qquad \|z_m-z_{m+1}\|\le\varepsilon. \tag{5}$$

Покажем, что метод (3) с правилом останова (5) сходится. Справедлива

Лемма 1. *Пусть приближение* w_n *определяется условиями*

$$w_0=z_0,\ w_{n+1}=Cw_n+By+Cu_n,\ n\ge 0. \tag{6}$$

Тогда справедливо неравенство $\sum\limits_{k=0}^{n}\|w_k-w_{k+1}+Cu_k\|^2\le\|w_0-x\|^2+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2$.

Доказательство. Из (6) имеем при $n=k$ $Cu_k=w_{k+1}-Cw_k-By$. Отсюда, используя равенство $A^{*}Ax=A^{*}y$, получим

$$u_k=C^{-1}w_{k+1}-w_k-C^{-1}By=C^{-1}w_{k+1}-w_k-$$
$$-\left(E+\alpha\left(A^{*}A\right)^{2}\right)\left(E+\alpha\left(A^{*}A\right)^{2}\right)^{-1}\alpha\left(A^{*}A\right)A^{*}y=$$
$$=C^{-1}w_{k+1}-w_k-\alpha\left(A^{*}A\right)A^{*}y=C^{-1}w_{k+1}-w_k-\alpha\left(A^{*}A\right)^{2}x=C^{-1}w_{k+1}-$$
$$-w_k-C^{-1}(E-C)x=C^{-1}(w_{k+1}-x)-(w_k-x).$$

Обозначим $\Delta_k=w_k-x$, тогда $u_k=C^{-1}\Delta_{k+1}-\Delta_k$, откуда $Cu_k=\Delta_{k+1}-C\Delta_k$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2=\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_{k+1}-C\Delta_k,\Delta_{k+1}-C\Delta_k)=\sum_{k=1}^{n}(\Delta_k,\Delta_k)+\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,C\Delta_k)-$$

$$-2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_{k+1},C\Delta_k)=\sum_{k=1}^{n}(\Delta_k,\Delta_k)+\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,C\Delta_k)-2\sum_{k=0}^{n-1}\left(C^{\frac{1}{2}}\Delta_{k+1},C^{\frac{1}{2}}\Delta_k\right). \quad (7)$$

Оценивая абсолютную величину последнего слагаемого правой части (7) по неравенству Коши – Буняковского, приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\geq\sum_{k=1}^{n}(\Delta_k,\Delta_k)+\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,C\Delta_k)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2},\ n\geq 1. \quad (8)$$

Покажем, что $(E-C)\Delta_k=w_k-w_{k+1}+Cu_k$, $k\geq 0$. Имеем $Cu_k=\Delta_{k+1}-C\Delta_k$, $\Delta_k+Cu_k=\Delta_k+\Delta_{k+1}-C\Delta_k$, тогда $\Delta_k+Cu_k=(E-C)\Delta_k+\Delta_{k+1}$, $w_k-x+Cu_k=$ $=(E-C)\Delta_k+w_{k+1}-x$, отсюда следует, что

$$(E-C)\Delta_k=w_k-w_{k+1}+Cu_k,\ k\geq 0. \quad (9)$$

Используя равенство (9), запишем неравенство (7) в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\geq\sum_{k=1}^{n}(\Delta_k,\Delta_k)+\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,C\Delta_k)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2}=$$

$$=-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}(\Delta_k,\Delta_k)+\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,C\Delta_k)-(C\Delta_n,C\Delta_n)-2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)+2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)-$$

$$-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2}=-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k)+$$

$$+2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)-(C\Delta_n,C\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2}=$$

$$=-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k)+\gamma_n,$$

где $\gamma_n=2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)-(C\Delta_n,C\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2}$.

Нетрудно показать, что $\gamma_n\geq 0$ при любых $\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_n$.

Тогда $\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\geq-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k)$. Используя равенство (9), получим $\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\geq-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}\|w_k-w_{k+1}+Cu_k\|^2$, откуда выполняется

$$\sum_{k=0}^{n}\|w_k-w_{k+1}+Cu_k\|^2\leq\|w_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2.$$

Лемма 1 доказана.

Имеет место

Лемма 2. *При* $\forall w_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta. \tag{10}$$

Доказательство.

Для доказательства леммы 2 воспользуемся теоремой:

Теорема 1 (Тёплица). *Пусть выполняются условия*:

1) $P_{n_k} \ge 0$;

2) $\sum_{k=1}^{n} P_{n_k} = 1$;

3) $\lim_{n\to\infty} P_{n_k} = 0$ *для любого фиксированного* k;

4) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. *Тогда* $(t_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} P_{n_k} x_k\right), n \in N$ *сходится* и $\lim_{n\to\infty} t_n = a$.

Доказательство.

Из (4) имеем $\lim_{n\to\infty} x_n = a,$ поэтому $(\forall\varepsilon > 0), (\exists n_0 \in N), (\forall n \in N, n > n_0)$, что $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как любая сходящаяся последовательность ограничена, то $(\exists M > 0)$, $(\forall n \in N)$, что $|x_n| \le M$, поэтому получим $|x_n - a| \le |x_n| + |a| \le 2M$, значит, $|x_n - a| \le 2M$.

Из (3) $\lim_{n\to\infty} P_{n_k} = 0$ для любого фиксированного k, поэтому $\exists n_0' > n_0$, что $P_{n_k} < \frac{\varepsilon}{4n_0 M}$, $k = \overline{1, n_0}$ для $\forall n > n_0'$.

Таким образом, справедливо записать:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} P_{n_k} x_k - a\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} P_{n_k} x_k - \sum_{k=1}^{n} P_{n_k} a\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} P_{n_k} (x_k - a)\right| \le \sum_{k=1}^{n} P_{n_k} |x_k - a| =$$

$$= P_{n_1}|x_1 - a| + \ldots + P_{n_{n_0}}|x_{n_0} - a| + P_{n_{n_0+1}}|x_{n_0+1} - a| + \ldots + P_{n_n}|x_n - a| \le$$

$$\le n_0 \frac{\varepsilon}{4n_0 M} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2}(P_{n_{n_0+1}} + \ldots + P_{n_n}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, для $(\forall n > n_0')$ $\lim t_n = a$.

Теорема 1 доказана.

Используя теорему 1, рассмотрим и докажем следующие примеры:

<u>Пример 1.</u> Дано: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Доказать: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = a$.

Доказательство. Воспользовавшись теоремой 1, имеем $P_{n_k}=\frac{1}{n},\ k=\overline{1,n}, n\in N$.

Тогда 1) $P_{n_k}\ge 0$; 2) $\sum_{k=1}^{n}P_{n_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=1$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}P_{n_k}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Следовательно, получим

$t_n=\sum_{k=1}^{n}P_{n_k}x_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a.$

<u>Пример 2.</u> Дано: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $x_n>0$. Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}=a\cdot$

Доказательство. Из теоремы 1 имеем $P_{n_k}=\frac{\frac{1}{x_k}}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$. Тогда справедливо

записать 1) $P_{n_k}\ge 0$; 2) $\sum_{k=1}^{n}P_{n_k}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}=1$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}P_{n_k}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_k}}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}=0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P_{n_k}x_k=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}=a\cdot$

<u>Пример 3</u>. Дано: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}x_k}=a$.

Доказательство. Поскольку $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}\le\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=a$.

Опираясь на пример 3, получим

$$\varliminf_{n\to\infty}\|a_n\|=\underline{\lim}_{n\to\infty}\|a_n\|=\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}\|a_k\|}=\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\prod_{k=0}^{n-1}\|a_k\|^2}=$$

$$=\underline{\lim}_{n\to\infty}\left\{\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}\|a_k\|^2}\right\}^{1/2}\le\overline{\lim}_{n\to\infty}\left\{\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\|a_k\|^2}{n}\right\}^{1/2}. \qquad (11)$$

А теперь вернёмся непосредственно к доказательству леммы 2.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\|w_n-w_{n+1}\|\le\underline{\lim}_{n\to\infty}\|w_n-w_{n+1}+Cu_n\|+\|C\|\beta\le\text{ (см. (11)) }\le$$

$$\le \|C\|\beta + \varlimsup_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \le \|C\|\beta + \varlimsup_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\|w_0 - x\|^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \varlimsup_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\|w_0 - x\|^2 + \frac{1}{n}n\|C\|^2\beta^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \|C\|\beta = 2\|C\|\beta, \text{ так как } \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\|w_0 - x\|^2 = 0.$$

Отсюда следует (10), и, значит, лемма 2 доказана.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) *если* $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определён при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\|, \|u_n\| \le \beta$;

б) *если* $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива следующая оценка:*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)};$$

в) *если, кроме того,* $\varepsilon(\delta, \beta) \to 0,\ \delta, \beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1,\ p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0$.

Доказательство.

а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1}C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{n-k-1}\right). \tag{12}$$

При $n = 1$ из $z_n = Cz_{n-1} + By_\delta + Cu_{n-1}$ имеем $z_1 = Cz_0 + By_\delta + Cu_0$, из (12) получим то же самое, т. е. при $n = 1$ формула (12) верна. Предположим, что (12) верна при $n = p$, т. е. $z_p = C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1}C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k-1}\right)$ и докажем ее справедливость при $n = p+1$. Имеем

$$z_{p+1} = Cz_p + By_\delta + Cu_p = C\left(C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1}C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k-1}\right)\right) + By_\delta + Cu_p = C^{p+1}z_0 +$$

$$+ C^2\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-1} + By_\delta + Cu_{p-2} + CBy_\delta + C^2u_{p-3} + \ldots + C^{p-2}By_\delta + C^{p-1}\right) + By_\delta + Cu_p =$$

$$= C^{p+1}z_0 + C\left(By_\delta + Cu_{p-1} + CBy_\delta + C^2u_{p-2} + \ldots + C^{p-1}By_\delta + C^pu_0 + C^{-1}By_\delta + u_p\right) =$$

$$= C^{p+1}z_0 + C\sum_{k=0}^{p}C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k}\right).$$

Таким образом, справедливость (12) доказана.

Отсюда получим

$$w_n = C^n w_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left(C^{-1}By + u_{n-k-1}\right) = C^n w_0 + \left(E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1}\right)By +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n w_0 + \left(E - C^n\right)\left(E - C\right)^{-1}\left(A^* A\right)^{-1}\left(E - C\right)A^* y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} =$$

$$= C^n w_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.$$

Учитывая, что $z_0 = w_0$, получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n z_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y_\delta + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} z_0 - A^{-1}\left[E - C^{n+1}\right]y_\delta -$$

$$- C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} = C^n w_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y - A^{-1}\left(E - C^n\right)y + A^{-1}\left(E - C^n\right)y_\delta +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} w_0 - A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y + A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y - A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y_\delta -$$

$$- C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} = w_n - w_{n+1} + A^{-1}C^n\left(E - C\right)\left(y_\delta - y\right) = w_n - w_{n+1} + C^n B\left(y - y_\delta\right).$$

Следовательно,

$$\left\|z_n - z_{n+1}\right\| \le \left\|w_n - w_{n+1}\right\| + \left\|C^n B\left(y - y_\delta\right)\right\|. \tag{13}$$

Обозначим $\sigma = B\left(y - y_\delta\right)$, тогда

$$\left\|C^n B\left(y - y_\delta\right)\right\| = \left\|C^n \sigma\right\| = \left\|\int_0^M \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^n} dE_\lambda \sigma\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0} \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^n} dE_\lambda \sigma\right\| + \left\|\int_{\varepsilon_0}^M \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^n} dE_\lambda \sigma\right\| \le$$

$$\le \left\|E_{\varepsilon_0}\sigma\right\| + q^n \left\|\sigma\right\| \to 0,\ n \to \infty,\ \varepsilon_0 \to 0,$$

так как при $\alpha > 0,\ \lambda \in (0, M]$ имеем $\dfrac{1}{1 + \alpha\lambda^2} \le q < 1$. Поэтому (см. лемму 2)

$$\lim_{n\to\infty} \left\|z_n - z_{n+1}\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|w_n - w_{n+1}\right\| \le 2\left\|C\right\|\beta.$$

Следовательно, условием $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ и u_n, $\|u_n\| \le \beta$.

б) Рассмотрим последовательность (6) и определим момент останова m' условием

$$\left\|w_n - w_{n+1}\right\| > \varepsilon - \|B\|\delta,\ \left(n < m'\right),\ \left\|w_{m'} - w_{m'+1}\right\| \le \varepsilon - \|B\|\delta. \tag{14}$$

Из (13) следует, что $m \le m'$. Из леммы 1 при $n = m'$ получим

$$\sum_{k=0}^{m'} \left\| w_k - w_{k+1} + Cu_k \right\|^2 \le \left\| w_0 - x \right\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \left\| Cu_k \right\|^2 .$$

Отсюда справедливо записать

$$\sum_{k=0}^{m'-1} \left(\left\| w_k - w_{k+1} \right\| - \left\| C \right\| \beta \right)^2 \le \left\| w_0 - x \right\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \left\| Cu_k \right\|^2 .$$

Так как по (14) при $n < m'$ имеем

$$\left\| w_n - w_{n+1} \right\| > \varepsilon - \left\| B \right\| \delta ,$$

то

$$m'(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta)^2 \le \|w_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2 \beta^2 .$$

Учитывая, что $w_0 = z_0$ и $m \le m'$, из последнего неравенства получим оценку для момента останова $m \le m' \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}$.

в) Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y \cdot \tag{15}$$

Предположим, что (15) верно, тогда

$$x - C^n x = B(E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1})y,$$
$$(E - C^n)x = B(E - C^n)(E - C)^{-1} y,$$
$$(E - C^n)x = A^{-1}(E - C)(E - C^n)(E - C)^{-1} Ax,$$
$$(E - C^n)x = (E - C^n)x.$$

Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (15) доказана.

Из (12) вычтем (15), получим

$$z_n - x = C^n (z_0 - x) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1} B(y - y_\delta) + u_{n-k-1} \right]. \tag{16}$$

Отсюда $\Delta_n = C^n \Delta_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1} B(y - y_\delta) + u_{n-k-1} \right]$, где $\Delta_n = z_n - x$ и $\Delta_0 = z_0 - x$. Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \le \|C^n \Delta_0\| + \left(\|B\|\delta + \|C\|\beta \right) n . \tag{17}$$

В частности, (17) справедливо и при $n = m$. Если $m \to \infty$ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$, тогда, как показано ранее, $\left\| C^m \Delta_0 \right\| \to 0,\, m \to \infty$. Поэтому для доказательства $\|z_m - x\| \to 0$, $\delta \to 0, \beta \to 0$ достаточно показать, что $m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta \right) \to 0, m \to \infty, \delta \to 0, \beta \to 0.$

Из (16) получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n(E-C)(z_0 - x) - Cu_n - C^n B(y_\delta - y) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k (E-C)u_{n-k-1}. \tag{18}$$

Так как спектр оператора $C = \left(E + \alpha(A^*A)^2\right)^{-1}$ принадлежит [0, 1], то нетрудно показать, что

$$\left\|C^n(E-C)\right\| \le \frac{1}{n+1}. \tag{19}$$

Поэтому из (18) получим при $n = m-1$

$$\|z_{m-1} - z_m\| \le \left\|C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E-C)(z_0 - x)\right\| + \left\|C^{m-1}B(y_\delta - y)\right\| + \|Cu_{m-1}\| +$$

$$+\left\|C\sum_{k=0}^{m-2} C^k (E-C)u_{m-k-2}\right\| \le \left\|C^{\frac{m-1}{2}}(E-C)\right\|\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| + \|C\|\beta + \|B\|\delta + \|C\|\beta\sum_{k=0}^{m-2}\frac{1}{k+1} \le$$

$$\le \frac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m),$$

так как $\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k} \le 1 + \ln m$ [6].

Так как по условию теоремы $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, $d > 1$, $p \in (0,1)$, то при всех достаточно малых δ, β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из б) получим $m \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta + 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)}$.

Поскольку $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon$, то $\varepsilon \le \dfrac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta.$

Отсюда получим, что $m \le \dfrac{2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\|}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta(2 + \ln m)}$. Умножим обе части последнего неравенства на $\|B\|\delta + \|C\|\beta$, получим

$$m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \le \frac{2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\|\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln\dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}\right]}.$$

При $m \to \infty$ множитель $\left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| \to 0$, а дробь

$$\frac{2\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta}\right]}$$ ограничена при $\delta, \beta \to 0.$

Поэтому $m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \to 0$ при $m \to \infty$, $\delta, \beta \to 0$. Отсюда и из неравенства (17) при $m \to \infty$

$$\lim_{\delta,\beta\to 0} \|\Delta_m\| = \lim_{\delta,\beta\to 0} \|z_m - x\| = \lim_{\delta,\beta\to 0} \left(\left\| C^m \Delta_0 \right\| + m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \right) = 0.$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Априорный выбор параметра регуляризации в неявном итерационном методе решения линейных некорректных уравнений / О. В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2019. – № 1. – С. 72–78.

2. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.

3. Савчук, В. Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37–42.

4. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.

5. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : БрГУ, 2014. – 213 с.

6. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.09.2020