

УДК 513.82

**А.А. Юдов<sup>1</sup>, М.А. Кононюк<sup>2</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина<sup>2</sup>магистрант каф. алгебры, геометрии и математического моделирования  
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: modelmath@brsu.brest.by

**КЛАССИФИКАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ  
ПРОСТРАНСТВ СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ  
ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА**

Целью исследования является классификация однородных редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пятимерного евклидова пространства.

Изучение геометрии однородных пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались Л.К. Тутаев, В.И. Ведерников, А.С. Феденко, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, А.А. Юдов и др. В работе исследуется подгруппа Ли группы Ли движений пятимерного евклидова пространства, классифицируются редуктивные однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений пятимерного евклидова пространства.

Классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой  $H$ . Ставится задача среди всех таких однородных пространств выделить редуктивные однородные пространства. В данной главе найдены редуктивные однородные пространства вида  $H/G_i$ , где  $G_i$  – связные подгруппы Ли группы Ли  $H$  вращений пространства  $R_5$ . Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства  $H/G_i$  рассматриваются соответствующие алгебры Ли  $\overline{H}$  и  $\overline{G_i}$ , затем находятся все  $n$ -мерные подпространства алгебры Ли  $\overline{H}$ , инвариантные относительно  $\text{ad}\overline{G_i}$ . Среди таких пространств находятся дополнительные к  $\overline{G_i}$ . Эти пространства будут редуктивными дополнениями для однородного пространства  $H/G_i$ . Поскольку пространство  $G/H$  редуктивно, отсюда будет следовать редуктивность однородного пространства  $G/G_i$ . При этом можно показать, что всякое редуктивное однородное пространство  $G/G_i$  может быть получено таким образом.

**Определение 1.** Однородное пространство  $H/G_i$  называется редуктивным, если алгебра Ли  $\overline{H}$  группы Ли  $H$  распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G_i}, \quad (2)$$

причем подпространство  $m$  инвариантно относительно  $\text{ad}\overline{G_i}$ , где  $\text{ad}\overline{G_i}$  – присоединенное представление алгебры Ли  $\overline{G_i}$ .

**Теорема 1.** Однородное пространство  $G/H$  является редуктивным.

Доказательство. Алгебра Ли  $\overline{G}$  группы Ли  $G$  имеет базис:  $\{i_1 \dots i_{15}\}$ , а алгебра Ли  $\overline{H}$  группы Ли  $H$  имеет базис:  $\{i_6 \dots i_{15}\}$ . Выбрав в качестве подпространства  $m$  подпространство с базисом  $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$ , получим представление  $\overline{G}$  в виде прямой суммы:  $\overline{G} = \overline{H} + m$ . Причем подпространство  $m$  инвариантно относительно  $ad \overline{H}$ , что и требовалось доказать.  $i_1 \dots i_{15}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $F$  – подгруппа Ли группы Ли  $H$ . Однородное пространство  $G/F$  редуктивно тогда и только тогда, когда редуктивно однородное пространство  $H/F$ .

Доказательство. Пусть однородное пространство  $G/F$  редуктивно и  $\overline{G} = \overline{F} + n$  – соответствующее разложение. Рассмотрим подпространство  $l = n \cap \overline{H}$ , при этом  $\overline{H} = \overline{F} + l$  – прямая сумма. Поскольку  $\overline{H} \subset \overline{F} + n \cap \overline{H} = \overline{F} + l$ . И обратно,  $\overline{F} + l \subset \overline{H}$ , поскольку сумма  $\overline{F} + n$  – прямая.

Инвариантность  $l$  относительно  $ad \overline{F}$  следует из того, что  $ad \overline{F}(l) \subset ad \overline{F}(\overline{H}) \subset \overline{H}$ . А также из того, что  $ad \overline{F}(l) \subset ad \overline{F}(n) \subset n$ . Отсюда следует:  $ad \overline{F}(l) \subset l$ .

Обратно. Пусть однородное пространство  $H/F$  редуктивно, причем  $\overline{H}$  равно  $\overline{F} + l$  – соответствующее редуктивное разложение.

Рассмотрим  $n = l + m$ , тогда  $\overline{G} = \overline{F} + n$  – сумма прямая. При этом  $ad \overline{F}(n) = ad \overline{F}(l) + ad \overline{F}(m) \subset l + m = n$ . Поскольку  $ad \overline{F}(l) \subset l$  в силу редуктивности однородного пространства  $H/F$ , а  $ad \overline{F}(m) \subset ad \overline{H}(m) \subset m$  в силу редуктивности однородного пространства  $G/H$ , что и требовалось доказать.

Из теоремы 2 получаем следующее следствие.

**Следствие 1.** Классификация однородных пространств  $G/G_i$ ,  $G_i \subset H$  равносильна классификации однородных пространств  $H/G_i$ .

В работе производится классификация однородных пространств  $H/G_i$ .

Для нахождения редуктивных дополнений используем следующий способ (опишем его на примере нахождения трехмерного векторного подпространства  $m$ ). Пусть  $a_1, a_2, a_3$  – базис алгебры Ли  $\overline{G}_i$  группы Ли  $G_i$ , принадлежащей группе Ли  $H$ . Рассмотрим трехмерное векторное подпространство  $m$  алгебры Ли  $\overline{H}$ , образованное векторами  $b_1, b_2, b_3$ , т.е.  $m = \{b_1, b_2, b_3\}$ . Для этого подпространства  $m$  потребуем выполнимость условия инвариантности относительно  $ad a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Т.е. выполнимость условий:

$$\begin{aligned} b_j &= b_{j6} i_6 + \dots + b_{j15} i_{15} \\ [a_i, b_j] &= a_{j1} b_1 + a_{j2} b_2 + a_{j3} b_3, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{3}$$

Систему (3) будем называть системой инвариантности пространства  $m$  или просто системой инвариантности. Раскладывая левую и правую части по базису  $i_6 \dots i_{15}$  алгебры Ли  $\overline{H}$ , получим систему инвариантности в виде системы алгебраических урав-

нений. Пусть, например,  $b_j = b_{j_6}i_6 + \dots + b_{j_{15}}i_{15}$ . Элементарными преобразованиями можно от базиса  $\{b_1, b_2, b_3\}$  перейти к базису  $\{b'_1, b'_2, b'_3\}$  с более простыми коэффициентами  $b_{jk}$ . Для этого придется рассмотреть 210 случаев. При этом система инвариантности упростится. Пусть система инвариантности решена и в итоге получены трехмерные пространства  $m_1 \dots m_p$ , инвариантные относительно  $\text{ad } \overline{G}_i$ . Среди этих пространств нужно выбрать такие, которые удовлетворяют условию (2). Такие пространства  $m_i$  и будут искомыми редуцированными дополнениями.

Рассмотрим однородное пространство  $H/G_7$ ,  $G_7 = \{i_6, i_7, i_{10}, i_{15}\}$ ,  $a = \{i_6\}$ ,  $\overline{H} = \{i_6 \dots i_{15}\}$ .

$$1^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & t & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & r & \rho & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & \varphi & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & g & h & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуцированное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_6 + \mu i_{13} + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_6 + t i_{13} + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_6 + \rho i_{13} + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_6 + \varphi i_{13} + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{11} + c i_6 + d i_{13} + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_{12} + g i_6 + h i_{13} + k i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda[a, i_6] + \mu[a, i_{13}] + \nu[a, i_{14}] + \sigma[a, i_{15}] = -i_{10}, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s[a, i_6] + t[a, i_{13}] + p[a, i_{14}] + q[a, i_{15}] = -i_{11}, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r[a, i_6] + \rho[a, i_{13}] + \delta[a, i_{14}] + \omega[a, i_{15}] = -i_{12}, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi[a, i_6] + \varphi[a, i_{13}] + \psi[a, i_{14}] + b[a, i_{15}] = i_7, \\ [a, X_5] &= [a, i_{11}] + c[a, i_6] + d[a, i_{13}] + e[a, i_{14}] + f[a, i_{15}] = i_8, \\ [a, X_6] &= [a, i_{12}] + g[a, i_6] + h[a, i_{13}] + k[a, i_{14}] + m[a, i_{15}] = i_9. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 &= \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{11} + \\ &+ \varepsilon_1 i_{12} + i_6(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi + \omega_1 c + \varepsilon_1 g) + i_{13}(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d + \varepsilon_1 h) + \\ &+ i_{14}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e + \varepsilon_1 k) + i_{15}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \quad (6)$$

Сравнивая формулу (6) с первой формулой (5), получим:

$$\delta_1 = -1, \varepsilon = 0, \varphi = 0, \psi = 0, b = 0.$$

Сравнивая формулу (6) со второй формулой (5), получим:

$$\omega_2 = -1, c = 0, d = 0, e = 0, f = 0.$$

Сравнивая формулу (6) с третьей формулой (5), получим:

$$\varepsilon_3 = -1, g = 0, h = 0, k = 0, m = 0.$$

Сравнивая формулу (6) с четвертой формулой (5), получим:

$$\alpha_4 = 1, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0.$$

Сравнивая формулу (6) с пятой формулой (5), получим:

$$\beta_5 = 1, s = 0, t = 0, p = 0, q = 0.$$

Сравнивая формулу (6) с шестой формулой (5), получим:

$$\gamma_6 = 1, r = 0, \rho = 0, \delta = 0, \omega = 0.$$

Относительно оператора  $i_6$  инвариантно следующее шестимерное подпространство  $\{i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}\}$ .

$$2^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & t & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & r & 0 & \rho & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & 0 & \varphi & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{12} + \mu i_{13} + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{12} + t i_{13} + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{12} + \rho i_{13} + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{12} + \varphi i_{13} + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{11} + c i_{12} + d i_{13} + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_6 + h i_{13} + k i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \tag{7}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{12}] + \mu [a, i_{13}] + \nu [a, i_{14}] + \sigma [a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_9, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s [a, i_{12}] + t [a, i_{13}] + p [a, i_{14}] + q [a, i_{15}] = -i_{11} + s i_9, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r [a, i_{12}] + \rho [a, i_{13}] + \delta [a, i_{14}] + \omega [a, i_{15}] = -i_{12} + r i_9, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi [a, i_{12}] + \varphi [a, i_{13}] + \psi [a, i_{14}] + b [a, i_{15}] = i_7 + \xi i_9, \\ [a, X_5] &= [a, i_{11}] + c [a, i_{12}] + d [a, i_{13}] + e [a, i_{14}] + f [a, i_{15}] = i_8 + c i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_6] + h [a, i_{13}] + k [a, i_{14}] + m [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 = & \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{11} + \varepsilon_1 i_6 + \\ & + i_{12}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi + \omega_1 c) + i_{13}(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d + \varepsilon_1 h) + \\ & + i_{14}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e + \varepsilon_1 k) + i_{15}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \quad (9)$$

Сравнивая формулу (9) с первой формулой (8), получим:

$$\delta_1 = -1, \sigma = \lambda, -\xi + \lambda r = 0, -\varphi + \lambda \rho = 0, -\psi + \lambda \delta = 0, -b + \lambda \omega = 0.$$

Сравнивая формулу (9) со второй формулой (8), получим:

$$\omega_2 = -1, \gamma_2 = s, -c + sr = 0, -d + s\rho = 0, -e + s\delta = 0, -f + s\omega = 0.$$

Сравнивая формулу (9) с третьей формулой (8), получим:

$$\lambda \alpha_1 + s\beta_1 + r\sigma_1 + \xi\delta_1 + c\omega_1 = -1, \sigma_3 = r \Rightarrow r^2 = -1.$$

Делаем вывод, что уравнение противоречиво, а это значит, что относительно оператора  $i_6$  нет инвариантных подпространств.

$$3^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s & t & 0 & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & r & \rho & 0 & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & \varphi & 0 & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & d & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{12} + \mu i_6 + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{12} + t i_6 + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{12} + \rho i_6 + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{12} + \varphi i_6 + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{11} + c i_{12} + d i_6 + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_{13} + k i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{12}] + \mu [a, i_6] + \nu [a, i_{14}] + \sigma [a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_9, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s [a, i_{12}] + t [a, i_6] + p [a, i_{14}] + q [a, i_{15}] = -i_{11} + s i_9, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r [a, i_{12}] + \rho [a, i_6] + \delta [a, i_{14}] + \omega [a, i_{15}] = -i_{12} + r i_9, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi [a, i_{12}] + \varphi [a, i_6] + \psi [a, i_{14}] + b [a, i_{15}] = i_7 + \xi i_9, \\ [a, X_5] &= [a, i_{11}] + c [a, i_{12}] + d [a, i_6] + e [a, i_{14}] + f [a, i_{15}] = i_8 + c i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + k [a, i_{14}] + m [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 = & \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{11} + \varepsilon_1 i_{13} + \\ & + i_{12}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi + \omega_1 c) + i_6(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d + \varepsilon_1 h) + \\ & + i_{14}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e + \varepsilon_1 k) + i_{15}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \quad (12)$$

Сравнивая формулу (12) с первой формулой (11), получим:

$$\delta_1 = -1, \gamma_1 = \lambda, -\xi + \lambda r = 0, -\varphi + \lambda \rho = 0, -\psi + \lambda \delta = 0, -b + \lambda \omega = 0.$$

Сравнивая формулу (12) со второй формулой (11), получим:

$$\omega_2 = -1, \gamma_2 = s, -c + sr = 0, -d + s\rho = 0, -e + s\delta = 0, -f + s\omega = 0.$$

Сравнивая формулу (12) с третьей формулой (11), получим:

$$\lambda \alpha_3 + s\beta_3 + r\gamma_3 + \xi\delta_3 + c\omega_3 = -1, \gamma_3 = r \Rightarrow r^2 = -1.$$

Делаем вывод, что уравнение противоречиво, а это значит, что относительно оператора  $i_6$  нет инвариантных подпространств.

$$4^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & \nu & 0 & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s & t & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & r & \rho & \delta & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & \varphi & \psi & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & d & e & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{12} + \mu i_6 + \nu i_{13} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{12} + t i_6 + p i_{13} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{12} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{12} + \varphi i_6 + \psi i_{13} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{11} + c i_{12} + d i_6 + e i_{13} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda[a, i_{12}] + \mu[a, i_6] + \nu[a, i_{13}] + \sigma[a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_9, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s[a, i_{12}] + t[a, i_6] + p[a, i_{13}] + q[a, i_{15}] = -i_{11} + s i_9, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r[a, i_{12}] + \rho[a, i_6] + \delta[a, i_{13}] + \omega[a, i_{15}] = -i_{12} + r i_9, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi[a, i_{12}] + \varphi[a, i_6] + \psi[a, i_{13}] + b[a, i_{15}] = i_7 + \xi i_9, \\ [a, X_5] &= [a, i_{11}] + c[a, i_{12}] + d[a, i_6] + e[a, i_{13}] + f[a, i_{15}] = i_8 + c i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_{14}] + m[a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 = & \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{11} + \varepsilon_1 i_{14} + \\ & + i_{12}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi + \omega_1 c) + i_6(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d + \varepsilon_1 h) + \\ & + i_{13}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e) + i_{15}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \quad (15)$$

Сравнивая формулу (15) с первой формулой (14), получим:

$$\delta_1 = -1, \gamma_1 = \lambda, -\xi + \lambda r = 0, -\varphi + \lambda \rho = 0, -\psi + \lambda \delta = 0, -b + \lambda \omega = 0.$$

Сравнивая формулу (15) со второй формулой (14), получим:

$$\omega_2 = -1, \gamma_2 = s, -c + sr = 0, -d + s\rho = 0, -e + s\delta = 0, -f + s\omega = 0.$$

Сравнивая формулу (15) с третьей формулой (14), получим:

$$\lambda \alpha_3 + s\beta_3 + r\gamma_3 + \xi\delta_3 + c\omega_3 = -1, \gamma_3 = r \Rightarrow r^2 = -1.$$

Относительно оператора  $i_6$  нет инвариантных подпространств.

$$5^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & \nu & \sigma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s & t & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & r & \rho & \delta & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & \varphi & \psi & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & d & e & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуцированное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{12} + \mu i_6 + \nu i_{13} + \sigma i_{14}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{12} + t i_6 + p i_{13} + q i_{14}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{12} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{14}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{12} + \varphi i_6 + \psi i_{13} + b i_{14}, \\ X_5 &= i_{11} + c i_{12} + d i_6 + e i_{13} + f i_{14}, \\ X_6 &= i_{15}. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda[a, i_{12}] + \mu[a, i_6] + \nu[a, i_{13}] + \sigma[a, i_{14}] = -i_{10} + \lambda i_9, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s[a, i_{12}] + t[a, i_6] + p[a, i_{13}] + q[a, i_{14}] = -i_{11} + s i_9, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r[a, i_{12}] + \rho[a, i_6] + \delta[a, i_{13}] + \omega[a, i_{14}] = -i_{12} + r i_9, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi[a, i_{12}] + \varphi[a, i_6] + \psi[a, i_{13}] + b[a, i_{14}] = i_7 + \xi i_9, \\ [a, X_5] &= [a, i_{11}] + c[a, i_{12}] + d[a, i_6] + e[a, i_{13}] + f[a, i_{14}] = i_8 + c i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 = & \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{11} + \varepsilon_1 i_{15} + \\ & + i_{12}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi + \omega_1 c) + i_6(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d + \varepsilon_1 h) + \\ & + i_{13}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e) + i_{14}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f). \end{aligned} \quad (18)$$

Сравнивая формулу (18) с первой формулой (17), получим:

$$\delta_1 = -1, \gamma_1 = \lambda, -\xi + \lambda r = 0, -\varphi + \lambda \rho = 0, -\psi + \lambda \delta = 0, -b + \lambda \omega = 0.$$

Сравнивая формулу (18) со второй формулой (17), получим:

$$\omega_2 = -1, \gamma_2 = s, -c + sr = 0, -d + s\rho = 0, -e + s\delta = 0, -f + s\omega = 0.$$

Относительно оператора  $i_6$  нет инвариантных подпространств.

$$6^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \mu & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & t & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & r & 0 & 0 & \rho & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & 0 & \varphi & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{11} + \mu i_{13} + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{11} + t i_{13} + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{11} + \rho i_{13} + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{11} + \varphi i_{13} + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{12} + d i_{13} + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_6 + h i_{13} + k i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \tag{19}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{11}] + \mu [a, i_{13}] + \nu [a, i_{14}] + \sigma [a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_8, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s [a, i_{11}] + t [a, i_{13}] + p [a, i_{14}] + q [a, i_{15}] = -i_{11} + s i_8, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r [a, i_{11}] + \rho [a, i_{13}] + \delta [a, i_{14}] + \omega [a, i_{15}] = -i_{12} + r i_8, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi [a, i_{11}] + \varphi [a, i_{13}] + \psi [a, i_{14}] + b [a, i_{15}] = i_7 + \xi i_8, \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + d [a, i_{13}] + e [a, i_{14}] + f [a, i_{15}] = i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_6] + h [a, i_{13}] + k [a, i_{14}] + m [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 &= \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{12} + \\ &+ \varepsilon_1 i_6 + i_{11}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi) + i_{13}(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d + \varepsilon_1 h) + \\ &+ i_{14}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e + \varepsilon_1 k) + i_{15}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \tag{21}$$

Сравнивая формулу (21) с первой формулой (20), получим:

$$\delta_1 = -1, \beta_1 = \lambda, -\xi + \lambda s = 0, -\varphi + \lambda t = 0, -\psi + \lambda p = 0, -b + \lambda q = 0.$$

Сравнивая формулу (21) со второй формулой (20), получим:

$$\lambda \alpha_2 + s \beta_2 + r \gamma_2 + \xi \delta_2 = -1, \beta_2 = s \Rightarrow s^2 = -1.$$

Относительно оператора  $i_6$  нет инвариантных подпространств.

$$7^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu & 0 & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s & 0 & t & 0 & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & r & 0 & \rho & 0 & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & \varphi & 0 & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{11} + \mu i_6 + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{11} + t i_6 + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{11} + \rho i_6 + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{11} + \varphi i_6 + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{12} + d i_6 + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_{13} + k i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \quad (22)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{11}] + \mu [a, i_6] + \nu [a, i_{14}] + \sigma [a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_8, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s [a, i_{11}] + t [a, i_6] + p [a, i_{14}] + q [a, i_{15}] = -i_{11} + s i_8, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r [a, i_{11}] + \rho [a, i_6] + \delta [a, i_{14}] + \omega [a, i_{15}] = -i_{12} + r i_8, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi [a, i_{11}] + \varphi [a, i_6] + \psi [a, i_{14}] + b [a, i_{15}] = i_7 + \xi i_8, \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + d [a, i_6] + e [a, i_{14}] + f [a, i_{15}] = i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + k [a, i_{14}] + m [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 &= \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{12} + \\ &+ \varepsilon_1 i_{13} + i_{11} (\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi) + i_6 (\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d) + \\ &+ i_{14} (\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e + \varepsilon_1 k) + i_{15} (\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \quad (24)$$

Сравнивая формулу (24) с первой формулой (23), получим:

$$\delta_1 = -1, \beta_1 = \lambda, -\xi + \lambda s = 0, -\varphi + \lambda t = 0, -\psi + \lambda p = 0, -b + \lambda q = 0.$$

Сравнивая формулу (24) со второй формулой (23), получим:

$$\lambda \alpha_2 + s \beta_2 + r \gamma_2 + \xi \delta_2 = -1, \beta_2 = s \Rightarrow s^2 = -1.$$

Относительно оператора  $i_6$  инвариантных подпространств нет.

$$8^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu & \nu & 0 & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s & 0 & t & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & r & 0 & \rho & \delta & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & \varphi & \psi & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d & e & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуktивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{11} + \mu i_6 + \nu i_{13} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{11} + t i_6 + p i_{13} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{11} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{11} + \varphi i_6 + \psi i_{13} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{12} + d i_6 + e i_{13} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \tag{25}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{11}] + \mu [a, i_6] + \nu [a, i_{13}] + \sigma [a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_8, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s [a, i_{11}] + t [a, i_6] + p [a, i_{13}] + q [a, i_{15}] = -i_{11} + s i_8, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r [a, i_{11}] + \rho [a, i_6] + \delta [a, i_{13}] + \omega [a, i_{15}] = -i_{12} + r i_8, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi [a, i_{11}] + \varphi [a, i_6] + \psi [a, i_{13}] + b [a, i_{15}] = i_7 + \xi i_8, \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + d [a, i_6] + e [a, i_{13}] + f [a, i_{15}] = i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_{14}] + m [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 &= \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{12} + \\ &+ \varepsilon_1 i_{14} + i_{11} (\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi) + i_6 (\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d) + \\ &+ i_{13} (\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e) + i_{15} (\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \tag{27}$$

Сравнивая формулу (27) с первой формулой (26), получим:

$$\delta_1 = -1, \beta_1 = \lambda, -\xi + \lambda s = 0, -\varphi + \lambda t = 0, -\psi + \lambda p = 0, -b + \lambda q = 0.$$

Сравнивая формулу (27) со второй формулой (26), получим:

$$\lambda \alpha_2 + s \beta_2 + r \gamma_2 + \xi \delta_2 = -1, \beta_2 = s \Rightarrow s^2 = -1.$$

Относительно оператора  $i_6$  инвариантных подпространств нет.

$$9^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu & \nu & \sigma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s & 0 & t & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & r & 0 & \rho & \delta & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & \varphi & \psi & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d & e & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{11} + \mu i_6 + \nu i_{13} + \sigma i_{14}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{11} + t i_6 + p i_{13} + q i_{14}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{11} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{14}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{11} + \varphi i_6 + \psi i_{13} + b i_{14}, \\ X_5 &= i_{12} + d i_6 + e i_{13} + f i_{14}, \\ X_6 &= i_{15}. \end{aligned} \quad (28)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{11}] + \mu [a, i_6] + \nu [a, i_{13}] + \sigma [a, i_{14}] = -i_{10} + \lambda i_8, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s [a, i_{11}] + t [a, i_6] + p [a, i_{13}] + q [a, i_{14}] = -i_{11} + s i_8, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r [a, i_{11}] + \rho [a, i_6] + \delta [a, i_{13}] + \omega [a, i_{14}] = -i_{12} + r i_8, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi [a, i_{11}] + \varphi [a, i_6] + \psi [a, i_{13}] + b [a, i_{14}] = i_7 + \xi i_8, \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + d [a, i_6] + e [a, i_{13}] + f [a, i_{14}] = i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 &= \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{12} + \\ &+ \varepsilon_1 i_{15} + i_{11} (\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi) + i_6 (\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d) + \\ &+ i_{13} (\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e) + i_{14} (\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f). \end{aligned} \quad (30)$$

Сравнивая формулу (30) с первой формулой (29), получим:

$$\delta_1 = -1, \beta_1 = \lambda, -\xi + \lambda s = 0, -\varphi + \lambda t = 0, -\psi + \lambda p = 0, -b + \lambda q = 0.$$

Сравнивая формулу (30) со второй формулой (29), получим:

$$\lambda \alpha_2 + s \beta_2 + r \gamma_2 + \xi \delta_2 = -1, \beta_2 = s \Rightarrow s^2 = -1.$$

Относительно оператора  $i_6$  нет инвариантных подпространств.

$$10^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 & 0 & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s & t & 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & r & \rho & 0 & 0 & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \varphi & 0 & 0 & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуکتивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{11} + \mu i_{12} + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{11} + t i_{12} + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{11} + \rho i_{12} + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{11} + \varphi i_{12} + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_6 + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_{13} + k i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \tag{31}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_6$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{11}] + \mu [a, i_{12}] + \nu [a, i_{14}] + \sigma [a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_8 + \mu i_9, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s [a, i_{11}] + t [a, i_{12}] + p [a, i_{14}] + q [a, i_{15}] = -i_{11} + s i_8 + t i_9, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r [a, i_{11}] + \rho [a, i_{12}] + \delta [a, i_{14}] + \omega [a, i_{15}] = -i_{12} + r i_8 + \rho i_9, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi [a, i_{11}] + \varphi [a, i_{12}] + \psi [a, i_{14}] + b [a, i_{15}] = i_7 + \xi i_8 + \varphi i_9, \\ [a, X_5] &= [a, i_6] + e [a, i_{14}] + f [a, i_{15}] = 0, \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + k [a, i_{14}] + m [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_6$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 &= \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_6 + \varepsilon_1 i_{13} + \\ &+ i_{11}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi) + i_{12}(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi) + \\ &+ i_{14}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e) + i_{15}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \tag{33}$$

Сравнивая формулу (33) с первой формулой (32), получим:

$$\delta_1 = -1, \beta_1 = \lambda, \gamma_1 = \mu, -\xi + \lambda s + \mu r = 0, -\varphi + \lambda t + \mu \rho = 0, -\psi + \lambda p + \mu \delta = 0, -b + \lambda q + \mu \omega = 0.$$

Сравнивая формулу (33) со второй формулой (32), получим:

$$\lambda \alpha_2 + s \beta_2 + r \gamma_2 + \xi \delta_2 = -1, \beta_2 = s, \gamma_2 = t, \Rightarrow s^2 + rt = -1.$$

Инвариантных подпространств относительно оператора  $i_6$  нет.

Вычисляя редуکتивные дополнения подалгебры  $\{i_6, i_7, i_{10}, i_{15}\}$ , получаем теорему.

**Теорема 3.** Относительно оператора  $i_6$  инвариантны следующие подпространства:

$$\begin{aligned} &\{i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}\}, \\ &\{i_8, i_9, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}\}, \\ &\{i_7 + \lambda i_9, i_8 - s i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{14} + \omega i_{15}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{14} - \omega i_{15}, i_{12}\}, \\ & \{i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{15}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{13} - \omega i_{15}, i_{12}\}, \\ & \{i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{14}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{13} - \omega i_{14}, i_{12}\}, \\ & \{i_8 + \nu i_6, i_9 + \rho i_6, i_{11}, i_{12}\}, \\ & \{i_7, i_9, i_{10}, i_{12}\}, \\ & \{i_7 + \lambda i_9, i_8, i_{11}, i_{12}\}, \\ & \{i_7 + \lambda i_8 + \mu i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}\}, \\ & \{i_8 + \mu i_9, i_{11}, i_{12}\}, \\ & \{i_7 + \lambda i_8 + \mu i_9, i_{10} + \lambda i_{11}, i_{12}\}, \\ & \{i_7 + \lambda i_8 + \mu i_9 + i_{10}, i_{11}, i_{12}\}. \end{aligned}$$

**Теорема 4.** Среди пространств, полученных в теореме 3 относительно оператора  $i_7$ , инвариантны следующие подпространства:

$$\{i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{14}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{13} - \omega i_{14}, i_{12}\}, \{i_8, i_9, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}\}.$$

**Теорема 5.** Среди пространств, полученных в теореме 3 относительно оператора  $i_{10}$ , инвариантны следующие подпространства:

$$\begin{aligned} & \{i_8, i_9, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}\}, \{i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{14} + \omega i_{15}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{14} - \omega i_{15}, i_{12}\}, \\ & \{i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{14}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{13} - \omega i_{14}, i_{12}\}, \{i_8 + \mu i_9, i_{11}, i_{12}\}. \end{aligned}$$

**Теорема 6.** Относительно оператора  $i_{15}$  инвариантны все подпространства из теоремы 3.3, кроме следующих подпространств:

$$\begin{aligned} & \{i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{14} + \omega i_{15}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{14} - \omega i_{15}, i_{12}\}, \\ & \{i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{15}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{13} - \omega i_{15}, i_{12}\}. \end{aligned}$$

**Теорема 7.** Однородное пространство  $H / G_7$  является редуктивным, редуктивным дополнением для этого пространства является подпространство:

$$\{i_8, i_9, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}\}.$$

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцовых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1. – С. 13–22.
2. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.
3. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Вестн. Брест. ун-та. Сер. 4, Физика. Математика. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.10.2018

**Yudov A.A., Kononyuk M.A. Classification and Study of Reductive Homogeneous Spaces with a Structural Group – the Lie Group of Motions of a Five-Dimensional Euclidean Space**

*The aim of the study is to classify homogeneous reductive spaces with a fundamental group – the Lie group of motions of a five-dimensional Euclidean space.*