

УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик¹, Е.Н. Минзер²¹канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина²магистрант специальности «Веб-программирование и интернет-технологии»
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: matysikoleg@mail.ru¹**ИТЕРАЦИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ
ЯВНЫМ ДВУХШАГОВЫМ МЕТОДОМ
С ПРАВИЛОМ ОСТАНОВА ПО МАЛОСТИ НЕВЯЗКИ**

В гильбертовом пространстве для решения линейных операторных уравнений с положительным ограниченным и самосопряженным оператором предлагается явный итерационный метод. Исследована сходимость предложенного метода в случае априорного выбора числа итераций. Для метода обосновано применение правила останова по малости невязки, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В исходной норме гильбертова пространства доказана сходимость итерационного метода, получены оценка погрешности метода и оценка для момента останова. Решена численная модельная задача, и будет реализована визуализация результатов действий предложенного метода.

1. Постановка задачи.

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения уравнения (1) предлагается явный итерационный метод:

$$x_n = 2(E - \alpha A)x_{n-1} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2} + \alpha^2 Ay, \quad x_0 = x_1 = 0. \quad (2)$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y , ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. В этом случае метод (2) примет вид:

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A)x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 Ay_\delta, \quad x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \quad (3)$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ .

2. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций.

Воспользовавшись интегральным представлением ограниченного положительного самосопряженного оператора A и формулой (2), по индукции получим

$$x - x_n = \int_0^M \left[\lambda^{-1} (1 - \alpha\lambda)^n + n\alpha(1 - \alpha\lambda)^{n-1} \right] dE_\lambda y,$$

где $M = \|A\|$, E_λ – спектральная функция оператора A . Так как при $0 < \alpha < 2/M$ имеем $|1 - \alpha\lambda| < 1$, то отсюда легко выводится [1–3] сходимость процесса (2) при $n \rightarrow \infty$.

Итерационный процесс (3) является сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ . Справедлива

Теорема 1. *Итерационный процесс (3) сходится при $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$, если выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из [2; 3].

При этом легко показывается оценка $\|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta$.

Скорость сходимости приближений (3) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения (1), т.е. $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда $y = A^{s+1}z$ и, следовательно, получим

$$x - x_n = \int_0^M \lambda^s (1 - \alpha\lambda)^{n-1} dE_\lambda z + \int_0^M \lambda^{s+1} (1 - \alpha\lambda)^{n-1} (n-1)\alpha dE_\lambda z. \text{ Для оценки нормы } \|x - x_n\|$$

найдем максимумы модулей подынтегральных функций $f_1(\lambda) = \lambda^s (1 - \alpha\lambda)^{n-1}$ и $f_2(\lambda) = \lambda^{s+1} (1 - \alpha\lambda)^{n-1} (n-1)\alpha$. Нетрудно показать, что при условии $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$ справедливо неравенство $\|x - x_n\| \leq s^s (s+2) [(n-1)\alpha e]^{-s} \|z\|$. Таким образом, общая оценка погрешности итерационной процедуры (3) запишется в виде

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq s^s (s+2) [(n-1)\alpha e]^{-s} \|z\| + \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим оценку

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq \left(\frac{5}{4}\right)^{s/(s+1)} (s+1)(s+2)^{1/(s+1)} e^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \text{ и априорный момент останова}$$

$$n_{\text{опт}} = 1 + \left(\frac{5}{4}\delta\right)^{-1/(s+1)} e^{-s/(s+1)} s(s+2)^{1/(s+1)} \alpha^{-1} \|z\|^{1/(s+1)}. \text{ Существенно, что порядок опти-}$$

мальной оценки есть $O(\delta^{s/(s+1)})$, и, как следует из [1; 2; 6], он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями. Очевидно, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α , но от него зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ и, значит, объема вычислительной работы, следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$ и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым.

Для метода (3) в статье [4] при условии $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$ исследована сходимость в энергетической норме ($\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$) гильбертова пространства.

3. Правило останова по малости невязки.

В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения итерационный метод (3) становится неэффективным, так как тогда невозможно получить оценку погрешности и определить априорно момент останова. Тем не менее этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по малости невязки, аналогичным [5; 6]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова условиями

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, (n < m), \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon, \varepsilon = b\delta, b > 1. \quad (4)$$

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε , т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (4) к методу (3). Ниже метод итераций (3) с остановом (4) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_m \|x - x_{m,\delta}\| \right) = 0$. Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)^{n-1} \right]$. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \frac{5}{4}(n-1)\alpha, \quad n \geq 1, M = \|A\|, 0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}, \quad (5)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq 2, \quad 0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}, \quad (6)$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \forall \lambda \in (0, M], 0 < \alpha < 2/M, \quad (7)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq (s+2) \left(\frac{s}{\alpha e} \right)^s (n-1)^{-s}, \quad n \geq 1, 0 \leq s < \infty, 0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}. \quad (8)$$

Лемма 1. Пусть $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$. Тогда справедливо

$$\forall w \in H \quad (E - Ag_n(A))w \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Воспользовавшись интегральным представлением ограниченного самосопряженного оператора A , получим $\|(E - Ag_n(A))w\| = \left\| \int_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda w \right\| \leq \left\| \int_0^M (1 - \alpha\lambda)^n dE_\lambda w \right\| + \left\| \int_0^M n\alpha\lambda(1 - \alpha\lambda)^{n-1} dE_\lambda w \right\|$. Так как $|1 - \alpha\lambda| < 1$ при условии $0 < \alpha < 2/M$, то каждый из интегралов по норме стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$ [7, с. 302], а, значит, и $\|(E - Ag_n(A))w\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$. Тогда для $\forall v \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение $(n-1)^s \|A^s (E - Ag_n(A))v\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, 0 \leq s < \infty$.

Доказательство. Так как (8) верно, то выполняется $(n-1)^s \|A^s(E - Ag_n(A))\| \leq$
 $\leq (n-1)^s \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq (s+2) \left(\frac{s}{\alpha e} \right)^s = \gamma_s, \quad n \geq 1$. Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [8, с. 151], по которой сходимость $B_n u \rightarrow Bu$ при $n \rightarrow \infty$ для $\forall u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|, n=1, 2, \dots$ ограничены независимой от n постоянной. У нас $\|B_n\| = (n-1)^s \|A^s(E - Ag_n(A))\| \leq \gamma_s$, т.е. $\|B_n\|$ совокупно ограничены. В качестве плотного в $\overline{R(A)}$ подмножества возьмем множество $R(A)$ и положим $s_1 = s + 1$. Тогда для каждого $v = Aw \in R(A)$ получим

$$\begin{aligned} (n-1)^s \|A^s(E - Ag_n(A))v\| &= (n-1)^s \|A^{s+1}(E - Ag_n(A))w\| \leq (n-1)^s \times \\ &\times \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^{s+1} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \|w\| \leq (n-1)^s (s+3) \left(\frac{s+1}{\alpha e} \right)^{s+1} (n-1)^{-(s+1)} \|w\| = \\ &= (n-1)^{-1} \gamma_{s_1} \|w\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так как $s_1 < \infty$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$. Если для некоторых $n_k < \bar{n} = \text{const}$ и $v_0 \in \overline{R(A)}$ при $k \rightarrow \infty$ имеем $w_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$, то $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$.

Доказательство. В силу (6) справедливо $\|v_k\| = \|(E - Ag_{n_k}(A))v_0\| \leq 2\|v_0\|, k \in N$. Следовательно, последовательность v_k ограничена. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $v_k \rightharpoonup v \ (k \in N' \subseteq N)$, тогда $Av_k \rightharpoonup Av \ (k \in N')$. Но по условию имеем $w_k = Av_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, следовательно, $Av = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A , то $v = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|v_k\|^2 &= (v_k, (E - Ag_{n_k}(A))v_0) = (v_k, v_0) - (v_k, Ag_{n_k}(A)v_0) = \\ &= (v_k, v_0) - (Av_k, g_{n_k}(A)v_0) = (v_k, v_0) - (w_k, g_{n_k}(A)v_0) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так как $w_k \rightarrow 0, v = 0$ и по условию (5) $\|g_{n_k}(A)\| \leq \frac{5}{4}(n_k - 1)\alpha < \frac{5}{4}(\bar{n} - 1)\alpha$. Следовательно, $\|v_k\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности v_k стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $v_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Лемма 3 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 2. Пусть $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$ и пусть момент останова $t = t(\delta)$ в методе (3) выбирается по правилу (4). Тогда $x_{t(\delta), \delta} \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство. По индукции нетрудно показать, что $x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E - \alpha A)^n - n\alpha A(E - \alpha A)^{n-1} \right] y_\delta$. Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \quad (9)$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A[E - Ag_n(A)]x - (E - Ag_n(A))(y_\delta - y). \quad (10)$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

$$\sigma_n = (n-1)\|A(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Кроме того, из (5) и (6) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta, \quad (13)$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \leq 2. \quad (14)$$

Применим правило останова (4). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b\delta$, $b > 1$, и из (10) и (14) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \leq (b+2)\delta. \quad (15)$$

Для любых $n < m$ справедливы неравенства $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Поэтому $\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \geq (b-2)\delta$. Итак, для любых $n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq (b-2)\delta. \quad (16)$$

Из (12) и (16) при $n = m-1$ получаем $\frac{\sigma_{m-1}}{m-2} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \geq (b-2)\delta$, или, что то же, $(m-2)\delta \leq \frac{\sigma_{m-1}}{b-2} \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, (так как из (12) $\sigma_m \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$). Если при этом $m \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$, то, используя равенство (9), получим $\|x_{m,\delta} - x\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \frac{5}{4}\alpha(m-1)\delta$, $m \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, так как из (11) вытекает $\|(E - Ag_m(A))x\| \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$.

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \rightarrow x$, $\delta_n \rightarrow 0$. Действительно, из (15) имеем

$$\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \leq (b+2)\delta_n, \quad \delta_n \rightarrow 0. \text{ Следовательно, } A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0, \quad \delta_n \rightarrow 0,$$

поэтому по лемме 3 получаем, что тогда $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 0$. Отсюда $\|x_{m(\delta_n), \delta_n} - x\| \leq \|(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| + \frac{5}{4}\alpha(m(\delta_n) - 1)\delta_n \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 0$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда справедливы оценки $m(\delta) \leq 2 + \frac{s+1}{\alpha e} \left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta} \right]^{1/(s+1)}$,

$$\|x_{m(\delta), \delta} - x\| \leq 2^{1/(s+1)} [(b+2)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{5}{4}\alpha \left\{ 1 + \frac{s+1}{\alpha e} \left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta} \right]^{1/(s+1)} \right\} \delta. \quad (17)$$

Доказательство. Справедливо записать:

$$\|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| = \left\| \int_0^M \lambda^{s+1} (1 - \lambda g_{m-1}(\lambda)) dE_\lambda z \right\| \leq (s+3)(s+1)^{s+1} [(m-2)\alpha e]^{-(s+1)} \|z\|.$$

Тогда, воспользовавшись неравенством (16), получим

$$(b-2)\delta \leq (s+3)(s+1)^{s+1} [(m-2)\alpha e]^{-(s+1)} \|z\|, \text{ откуда имеем } m \leq 2 + \frac{s+1}{\alpha e} \left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta} \right]^{1/(s+1)}.$$

При помощи неравенства моментов оценим

$$\begin{aligned} \|(E - Ag_m(A))x\| &= \|A^s (E - Ag_m(A))z\| \leq \|A^{s+1} (E - Ag_m(A))z\|^{s/(s+1)} \|(E - Ag_m(A))z\|^{1/(s+1)} \leq \\ &\leq 2^{1/(s+1)} [(b+2)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \quad (15). \end{aligned}$$

Теперь, поскольку соотношение (9) справедливо для любых n , то

$$\begin{aligned} \|x_{m, \delta} - x\| &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq 2^{1/(s+1)} [(b+2)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \\ &+ \frac{5}{4}\alpha(m-1)\delta \leq 2^{1/(s+1)} [(b+2)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{5}{4}\alpha \left\{ 1 + \frac{s+1}{\alpha e} \left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta} \right]^{1/(s+1)} \right\} \delta. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Порядок оценки (17) есть $O(\delta^{s/(s+1)})$, и он оптимален в классе задач с истокорпредставимыми решениями $x = A^s z$, $s > 0$ [6].

Замечание 2. Хотя формулировка теоремы 3 дается с указаниями степени истокорпредставимости s и истокорпредставляющего элемента z , на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова (4). И тем не менее в теореме 3 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m , обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокорпредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4), как показывает теорема 2, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.

4. Численный пример.

Рассмотрим в пространстве $L_2(0,1)$ задачу в виде уравнения Фредгольма I рода

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,1] \quad \text{с симметричным положительным ядром}$$

$K(t,s) = \frac{1}{1+100(t-s)^2}$. В качестве точного решения сформулированной задачи выберем функцию $x(s) = \begin{cases} s, & 0 \leq s < \frac{1}{2}, \\ 1-s, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$

С использованием метода правых прямоугольников при $m = 32$, $h = \frac{1}{m}$ была вычислена в точках $t_i = ih$, $i = \overline{1, m}$ правая часть $y(t)$ рассматриваемого уравнения. Данная задача относится к классу обратных задач теории потенциала, и она некорректна. Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ , и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения $\tilde{y}_i$, $i = \overline{1, m}$, полученные следующим образом: $\tilde{y}_i = [y(t_i) \cdot 10^k + 0,5] / 10^k$, квадратные скобки означают целую часть числа и $k = 3$.

Будем решать задачу методом (3), который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n)} = 2x_i^{(n-1)} - 2\alpha \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h x_j^{(n-1)} - x_i^{(n-2)} + \alpha^2 \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h \tilde{y}_j + 2\alpha \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h x_j^{(n-2)} - \\ - \alpha^2 \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j) h \left(\sum_{k=1}^m K(t_j, s_k) h x_k^{(n-2)} \right), \quad x_i^{(0)} = x_i^{(1)} = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

При счете используется $\alpha = 0,8$. Для решения задачи сведений об истокообразной представимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по малости невязки (3), выбрав $\varepsilon = 1,5\delta$. Итак, при $\delta = 0,001$ для достижения оптимальной точности при счете явным двухшаговым итерационным процессом потребовалось 14 итераций.

В конечном итоге будет создан и протестирован веб-сервис для визуализации результатов действий итерационных процедур (метода (3) и явного метода Ландвебера [5; 6; 9; 10]) с определением оптимальных значений норм решения, невязок, погрешности приближений, а также числа итераций для достижения необходимой точности при изменении значения уровня погрешности входных данных при решении некорректных задач первого рода. Веб-приложение будет предоставлять возможность решения линейных некорректных задач с выбором различных значений $K(t, s)$, $x(s)$, $y(t)$ и визуализации приближенного решения в виде графика.

Веб-сервис будет написан на стеке технологий JAVAEE. Для визуализации страницы сервиса используются JSP страницы. Расширение функциональных возможностей сервера реализуется с помощью JAVA SERVLET. Веб-приложение должно разворачиваться в контейнере сервлетов APACHE TOMCAT 8.5 и представлять собой WAR-архив.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.
2. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.
3. Минзер, Е. И. Итерационная регуляризация некорректных задач при помощи двухшагового метода явного типа / Е. И. Минзер // XIX Респ. науч.-практ. конф. молодых ученых, Брест, 12 мая 2017 г. : сб. материалов. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2017. – С. 82–83.
4. Матысик, О. В. Апостериорный выбор параметра регуляризации в явной двухшаговой итерационной схеме решения некорректных задач / О. В. Матысик, Е. И. Минзер // Инновац. наука. – 2017. – № 3. – С. 23–25.
5. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
6. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
7. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 680 с.
8. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.
9. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
10. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 17.10.2018

Matysik O.V., Minzer E.N. The Iterative Regularization of Non-correct Equations by an Explicit Two-step Method with the Rule of Stop on the Smallness of Non-band

In the Hilbert space for solving linear operator equations with a positive bounded and self-adjoint operator, an explicit iterative method is proposed. The convergence of the proposed method is investigated in the case of an a priori choice of the number of iterations. For the method, the application of the stopping rule due to the smallness of the discrepancy is justified, which makes the iteration method under consideration effective even when there is no information about the source-specific representability of the exact solution. In the initial norm of the Hilbert space, the convergence of the iterative method is proved, the estimate of the error of the method and the estimate for the stopping time are obtained. The numerical model problem has been solved and visualization of the results of the actions of the proposed method will be implemented.

УДК 513.82

А.А. Юдов¹, М.А. Кононюк²¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина²магистрант каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: modelmath@brsu.brest.by**КЛАССИФИКАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ
ПРОСТРАНСТВ СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ
ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА**

Целью исследования является классификация однородных редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пятимерного евклидова пространства.

Изучение геометрии однородных пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались Л.К. Тутаев, В.И. Ведерников, А.С. Феденко, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, А.А. Юдов и др. В работе исследуется подгруппа Ли группы Ли движений пятимерного евклидова пространства, классифицируются редуктивные однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений пятимерного евклидова пространства.

Классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой H . Ставится задача среди всех таких однородных пространств выделить редуктивные однородные пространства. В данной главе найдены редуктивные однородные пространства вида H/G_i , где G_i – связные подгруппы Ли группы Ли H вращений пространства R_5 . Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства H/G_i рассматриваются соответствующие алгебры Ли $\overline{H}$ и $\overline{G_i}$, затем находятся все n -мерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$, инвариантные относительно $\text{ad } \overline{G_i}$. Среди таких пространств находятся дополнительные к $\overline{G_i}$. Эти пространства будут редуктивными дополнениями для однородного пространства H/G_i . Поскольку пространство G/H редуктивно, отсюда будет следовать редуктивность однородного пространства G/G_i . При этом можно показать, что всякое редуктивное однородное пространство G/G_i может быть получено таким образом.

Определение 1. Однородное пространство H/G_i называется редуктивным, если алгебра Ли $\overline{H}$ группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G_i}, \quad (2)$$

причем подпространство m инвариантно относительно $\text{ad } \overline{G_i}$, где $\text{ad } \overline{G_i}$ – присоединенное представление алгебры Ли $\overline{G_i}$.