УДК 519.6 + 517.983.54

***Олег Викторович Матысик*[1], *Мария Сергеевна Горбач*[2], *Павел Олегович Олихвер*[3]**
[1]*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*
[2]*студент III курса физико-математического факультета Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*
[3]*магистр физ.-мат. наук, преподаватель каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*
***Oleg Matysik*[1], *Maria Gorbach*[2], *Pavel Olikhver*[3]**
[1]*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science of Brest State A. S. Pushkin University*
[2]*3-d Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics of Brest State A. S. Pushkin University*
[3]*Master of Physical and Mathematical Sciences, Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Computer Science of Brest State A. S. Pushkin University*
e-mail: [1]matysikoleg@mail.ru

РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С САМОСОПРЯЖЕННЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Для решения линейных операторных уравнений первого рода с положительным ограниченным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве предлагается явная итерационная процедура с переменным шагом. Исследована сходимость итерационного метода в случае априорного и апостериорного выбора параметра регуляризации при точной и приближенной правых частях операторного уравнения в исходной норме гильбертова пространства. Доказана сходимость метода в полунорме гильбертова пространства. Методом решена численная модельная задача. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении линейных операторных уравнений, а также при решении прикладных некорректных задач.

Ключевые слова: *некорректное уравнение первого рода, регуляризующий алгоритм, явная итерационная процедура, гильбертово пространство, ограниченный и самосопряженный оператор, полунорма.*

Regularizing Algorithm for Ill-Posed Equations of the First Kind with a Self-Adjoint and Bounded Operator

To solve linear operator equations of the first kind with a positive bounded self-adjoint operator in a Hilbert space, an explicit iterative procedure with variable step is proposed. The convergence of the iterative method is studied in the case of a priori and a posteriori choice of the regularization parameter for the exact and approximate right-hand sides of the operator equation in the original norm of the Hilbert space. The convergence of the method has been proven in the seminorm of a Hilbert space. The method solved a numerical model problem. The results obtained can be used in theoretical research in solving linear operator equations, as well as in solving applied ill-posed problems.

Key words: *ill-posed equation of the first kind, regularizing algorithm, explicit iteration procedure, Hilbert space, bounded and self-adjoint operator, seminorm.*

Введение

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач. Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике и управлении, может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \tag{1}$$

с заданным оператором $A: X \to Y$ и элементом y, где X и Y – метрические пространства, а в особо оговариваемых случаях – банаховы или даже гильбертовы. Ж. Адамаром (J. Hadamard) [1] было введено следующее понятие корректности.

Определение. *Задачу отыскания решения $x \in X$ уравнения* (1) *называют корректной (или корректно поставленной, или корректной по Адамару), если при любой фиксированной правой части $y = y_0 \in Y$ уравнения* (1) *его решение:*

а) существует в пространстве X;

б) определено в пространстве X однозначно;

в) устойчиво в пространстве X, т. е. непрерывно зависит от правой части $y \in Y$. В случае нарушения любого из этих условий задачу называют некорректной (некорректно поставленной); более конкретно при нарушении условия в) ее принято называть неустойчивой.

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора A^{-1} на всем пространстве Y.

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались. Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решения некорректных задач. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения первого рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2, обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии и т. д.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы, поскольку они легко реализуются на ПЭВМ. Различные итерационные схемы решения некорректно поставленных задач были предложены в работах [2–12].

В настоящей статье предлагается явная итерационная процедура с переменным шагом решения некорректных задач в гильбертовом пространстве и проведено исследование ее основных свойств.

Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным *явным методом итераций Ландвебера* [2] $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right)$, $x_{0,\delta} = 0$ показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В *методе Ландвебера* на параметр α (шаг по антиградиенту) накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$, что может привести на практике к необходимости большого числа итераций. Однако предлагаемый метод имеет преимущество по сравнению с *методом Ландвебера* в следующем: для достижения оптимальной точности здесь потребуется сделать число итераций по крайней мере в 2,5 раза меньше, чем методом итераций [2].

Как известно, погрешность метода простой итерации с постоянным [2; 4] или переменным [6] шагом зависит от суммы шагов по антиградиенту, и притом так, что для сокращения числа операций желательно, чтобы шаги по антиградиенту были как можно большими. Однако на эти шаги накладываются ограничения сверху [2; 4; 6]. Возникает идея попытаться ослабить эти ограничения. Это удается сделать, выбирая для шага три значения α, β, γ попеременно, где γ уже не обязано удовлетворять прежним требованиям.

Рассмотренный в статье явный итерационный метод найдет практическое применение в прикладной математике: он может быть использован для решения задач, встречающихся в теории оптимального управления, математической экономике, геофизике, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, диагностике плазмы, в наземной или воздушной геологоразведке, при решении обратной кинематической задачи сейсмики, космических исследованиях (спектроскопии) и медицине (компьютерной томографии).

1. Постановка задачи

В действительном гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{2}$$

с ограниченным положительным самосопряженным оператором $A: H \to H$ в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, однако, вообще говоря, не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (2) является некорректной (неустойчивой). Если решение уравнения (2) все же существует и единственно, то для его отыскания естественно пытаться применить различные итерационные схемы. В настоящей работе предлагается явная итерационная процедура с переменным шагом

$$\begin{gathered} x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0, \\ \alpha_{3n+1} = \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0,1,2,\ldots. \end{gathered} \tag{3}$$

В случае приближенной правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ уравнения (2) приближения (3) примут вид

$$\begin{gathered} x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}\left(Ax_{n,\delta} - y_\delta\right), \quad x_{0,\delta} = 0, \\ \alpha_{3n+1} = \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0,1,2,\ldots. \end{gathered} \tag{4}$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (4) понимается утверждение о том, что приближения (4) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (2) при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод (4) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta \to 0}\left(\inf\limits_{n}\|x - x_{n,\delta}\|\right) = 0$.

2. Сходимость метода с априорным выбором числа итераций

По индукции покажем, что

$$\begin{gathered} x_{n+1} = \alpha_{n+1}y + \alpha_n(E - \alpha_{n+1}A)y + \ldots + \alpha_1(E - \alpha_{n+1}A)(E - \\ - \alpha_n A)\ldots(E - \alpha_2 A)y = \sum_{k=0}^{n}\alpha_{n-k+1}\prod_{i=0}^{k-1}(E - \alpha_{n-i+1}A)y. \end{gathered} \tag{5}$$

Из (3) и (5) при $n = 0$ следует, что $x_1 = \alpha_1 y$, и, следовательно, при $n = 0$ формула (5) верна. Предположим, что (4) верна при $n = p$, т. е.

$$x_{p+1}=\alpha_{p+1}y+\alpha_p(E-\alpha_{p+1}A)y+\ldots+\alpha_1(E-\alpha_{p+1}A)(E-\alpha_pA)\ldots(E-\alpha_2A)y.$$

Докажем, что (5) верна при $n=p+1$. Из (3) получим

$$\begin{aligned}
x_{p+2}&=x_{p+1}-\alpha_{p+2}(Ax_{p+1}-y)=\alpha_{p+2}y+(E-\alpha_{p+2}A)x_{p+1}=\\
&=\alpha_{p+2}y+(E-\alpha_{p+2}A)[\alpha_{p+1}y+\alpha_p(E-\alpha_{p+1}A)y+\alpha_{p-1}(E-\alpha_{p+1}A)(E-\\
&-\alpha_pA)y+\alpha_{p-2}(E-\alpha_{p+1}A)(E-\alpha_pA)(E-\alpha_{p-1}A)y+\ldots+\alpha_2(E-\\
&-\alpha_{p+1}A)(E-\alpha_pA)\ldots(E-\alpha_3A)y+\alpha_1(E-\alpha_{p+1}A)(E-\alpha_pA)\ldots(E-\\
&-\alpha_3A)(E-\alpha_2A)y]=\alpha_{p+2}y+\alpha_{p+1}(E-\alpha_{p+2}A)y+\alpha_p(E-\alpha_{p+2}A)(E-\\
&-\alpha_{p+1}A)y+\alpha_{p-1}(E-\alpha_{p+2}A)(E-\alpha_{p+1}A)(E-\alpha_pA)y+\alpha_{p-2}(E-\alpha_{p+2}A)(E-\\
&-\alpha_{p+1}A)(E-\alpha_pA)(E-\alpha_{p-1}A)y+\ldots+\alpha_1(E-\alpha_{p+2}A)\ldots(E-\alpha_3A)(E-\alpha_2A)y=\\
&=\sum_{k=0}^{p+1}\alpha_{p-k+2}\prod_{i=0}^{k-1}(E-\alpha_{p-i+2}A)y.
\end{aligned}$$

Следовательно, по индукции формула (5) верна.

Далее, для упрощения считаем $\|A\|=1$. *Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим*

$$\begin{aligned}
x-x_n&=A^{-1}y-[\alpha_n+\alpha_{n-1}(E-\alpha_nA)+\ldots+\alpha_1(E-\alpha_nA)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_2A)]y=\\
&=\int_0^1\frac{1}{\lambda}\{1-\lambda[\alpha_n+\alpha_{n-1}(1-\alpha_n\lambda)+\ldots+\alpha_1(1-\alpha_n\lambda)\ldots(1-\alpha_2\lambda)]\}\,dE_\lambda y.
\end{aligned}$$

Докажем по индукции, что

$$1-\lambda[\alpha_n+\alpha_{n-1}(1-\alpha_n\lambda)+\ldots+\alpha_1(1-\alpha_n\lambda)\ldots(1-\alpha_2\lambda)]=(1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\ldots(1-\alpha_n\lambda). \quad (6)$$

При $n=1$ получим $1-\lambda\alpha_1=1-\alpha_1\lambda$, значит, при $n=1$ формула (6) верна. Предположим, что данная формула верна при $n=p$:

$$\begin{aligned}
&1-\lambda[\alpha_p+\alpha_{p-1}(1-\alpha_p\lambda)+\alpha_{p-2}(1-\alpha_p\lambda)(1-\alpha_{p-1}\lambda)+\ldots+\alpha_1(1-\alpha_p\lambda)\times\ldots\times\\
&\times(1-\alpha_3\lambda)(1-\alpha_2\lambda)]=(1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\times\ldots\times(1-\alpha_p\lambda).
\end{aligned}$$

Докажем, что рассматриваемая формула верна при $n=p+1$:

$$\begin{aligned}
&1-\lambda[\alpha_{p+1}+\alpha_p(1-\alpha_{p+1}\lambda)+\alpha_{p-1}(1-\alpha_{p+1}\lambda)(1-\alpha_p\lambda)+\alpha_{p-2}(1-\alpha_{p+1}\lambda)(1-\\
&-\alpha_p\lambda)(1-\alpha_{p-1}\lambda)+\ldots+\alpha_1(1-\alpha_{p+1}\lambda)(1-\alpha_p\lambda)\ldots(1-\alpha_3\lambda)(1-\alpha_2\lambda)]=\\
&=1-\alpha_{p+1}\lambda+\lambda(1-\alpha_{p+1}\lambda)[-\alpha_p-\alpha_{p-1}(1-\alpha_p\lambda)-\alpha_{p-2}(1-\\
&-\alpha_p\lambda)(1-\alpha_{p-1}\lambda)-\ldots-\alpha_1(1-\alpha_p\lambda)\times\ldots\times(1-\alpha_3\lambda)(1-\alpha_2\lambda)]=\\
&=1-\lambda\alpha_{p+1}+\lambda(1-\alpha_{p+1}\lambda)[-\frac{1}{\lambda}\{1-(1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\times\ldots\times(1-\alpha_p\lambda)\}]=\\
&=1-\lambda\alpha_{p+1}-(1-\alpha_{p+1}\lambda)+(1-\alpha_{p+1}\lambda)(1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\times\ldots\times\\
&\times(1-\alpha_p\lambda)=(1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\times\ldots\times(1-\alpha_p\lambda)(1-\alpha_{p+1}\lambda).
\end{aligned}$$

Следовательно, формула (6) верна.

Таким образом, имеем

$$x-x_n=\int_0^1\lambda^{-1}(1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\ldots(1-\alpha_n\lambda)dE_\lambda y=\int_0^1\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m dE_\lambda y\ .$$

Здесь k,l,m – натуральные показатели, где $l+m+k=n$.

Потребуем, чтобы при $\lambda\in(0,1)$ и положительных α,β,γ выполнялись условия

$$\left.\begin{aligned}&|(1-\alpha\lambda)|<1,\ (\text{т.е. } 0<\alpha<2),\\&|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)|<1,\\&|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)|<1.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Докажем сходимость процесса (3) при точной правой части y. Справедлива

Теорема 1. *Итерационный процесс* (3) *при условии* (7) *сходится в норме гильбертова пространства.*

Доказательство.

Поскольку

$$x-x_n=\int_0^\varepsilon\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m dE_\lambda y+\int_\varepsilon^1\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m dE_\lambda y\ ,$$

то, считая $k=l=m=n/3$, при условиях (7) получим

$$\left\|\int_\varepsilon^1\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m dE_\lambda y\right\|\le q^{n/3}\left\|\int_\varepsilon^1 dE_\lambda x\right\|\to 0,\ n\to\infty.$$

Здесь $q=\max\limits_{\lambda\in[\varepsilon,1]}|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)|<1$. В силу свойств спектральной функции [7]

$$\left\|\int_0^\varepsilon\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m dE_\lambda y\right\|\le\left\|\int_0^\varepsilon\lambda^{-1}dE_\lambda y\right\|=\left\|\int_0^\varepsilon dE_\lambda x\right\|=\|E_\varepsilon x\|\to 0,\ \varepsilon\to 0\ .$$

Таким образом, $\|x-x_n\|\to 0,\ n\to\infty$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. *Условие* $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)|<1$ *равносильно совокупности условий* $\alpha\beta<\alpha+\beta$ и $(\alpha+\beta)^2<8\alpha\beta$ [7]. *Отсюда* $\alpha+\beta<8$.

Докажем сходимость процесса (4) при приближенной правой части уравнения (2). Справедлива

Теорема 2. *При условии* (7) *итерационный процесс* (4) *сходится, если выбирать число итераций n из условия* $n\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$.

Доказательство.

Рассмотрим $x-x_{n,\delta}=(x-x_n)+(x_n-x_{n,\delta})$. Оценим $\|x_n-x_{n,\delta}\|$, где

$$x_n-x_{n,\delta}=[\alpha_n+\alpha_{n-1}(E-\alpha_n A)+\ldots+\alpha_1(E-\alpha_n A)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_2 A)](y-$$

$$-y_\delta)=\int_0^1\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m\right]dE_\lambda(y-y_\delta).$$

Оценим на [0,1] максимум подынтегральной функции

$$g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m\right]>0.$$

Сначала докажем по индукции, что

$$\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\ldots(1-\alpha_n\lambda)\right]\le\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n. \qquad (7)$$

Обозначим левую часть равенства (8) через $z_n(\lambda)$. При $n=1$ имеем $z_1(\lambda)=\dfrac{1-(1-\alpha_1\lambda)}{\lambda}=\alpha_1\le\alpha_1$, значит, при $n=1$ (8) верна.

Пусть (8) выполняется при $n=p$, т. е. что $z_p(\lambda)\le\alpha_1+\ldots+\alpha_p$. Докажем, что (8) справедлива при $n=p+1$:

$$z_{p+1}(\lambda)=\frac{1-(1-\alpha_1\lambda)\times\ldots\times(1-\alpha_p\lambda)(1-\alpha_{p+1}\lambda)}{\lambda}=\frac{1-(1-\alpha_1\lambda)\times\ldots\times(1-\alpha_p\lambda)}{\lambda}+$$
$$+\frac{(1-\alpha_1\lambda)\times\ldots\times(1-\alpha_p\lambda)\alpha_{p+1}\lambda}{\lambda}=\frac{1-(1-\alpha_1\lambda)\times\ldots\times(1-\alpha_p\lambda)}{\lambda}+$$
$$+\alpha_{p+1}(1-\alpha_1\lambda)\times\ldots\times(1-\alpha_p\lambda)\le\alpha_1+\ldots+\alpha_p+\alpha_{p+1}.$$

Следовательно, формула (8) верна.

Поэтому $g_n(\lambda)\le k\alpha+l\beta+m\gamma$. Отсюда $\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|\le(k\alpha+l\beta+m\gamma)\delta$.

Если $k=l=m=n/3$, то $\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|\le\dfrac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\delta$.

Поскольку $\left\|x-x_{n,\delta}\right\|\le\left\|x-x_n\right\|+\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|\le\ \le\left\|x-x_n\right\|+(k\alpha+l\beta+m\gamma)\delta$ и $\left\|x-x_n\right\|\to0,\ n\to\infty,$ то для сходимости метода итераций (4) достаточно потребовать, чтобы $(k\alpha+l\beta+m\gamma)\delta\to0,\ n\to\infty,\ \delta\to0.$

Таким образом, достаточно, чтобы $n\delta\to0,\ n\to\infty,\ \delta\to0.$ Теорема 2 доказана.

Получим оценку скорости сходимости. Предположим, что точное решение x истокообразно представимо, т. е. что $x=A^sz,\ s>0$. Тогда $y=A^{s+1}z$ и $x-x_n=\displaystyle\int_0^1(1-\alpha\lambda)^k(1-\beta\lambda)^l(1-\gamma\lambda)^m\lambda^s\,dE_\lambda z$.

Оценим максимум подынтегральной функции

$$f(\lambda)=(1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\ldots(1-\alpha_n\lambda)\lambda^s=\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i\lambda)\lambda^{\frac{\alpha_i s}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}=\prod_{i=1}^{n}\varphi_i(\lambda).$$

Обозначим $c_i=\dfrac{\alpha_i s}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}$.

Нетрудно показать [6; 8], что $\left|\varphi_i(\lambda)\right|\le\le\max\left\{\left|(1-\alpha_iM)M^{c_i}\right|,\left(\dfrac{c_i}{e\alpha_i}\right)^{c_i}\right\}$,

где $M=\|A\|$. Поскольку $\|A\|=1$, то получим

$$\left|f(\lambda)\right| = \prod_{i=1}^{n}\left|\varphi_i(\lambda)\right| \le \max\left\{\prod_{i=1}^{n}\left|(1-\alpha_i)\right|, \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{c_i}{e\alpha_i}\right)^{c_i}\right\} =$$

$$= \max\left\{\left|(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_n)\right|, \left[s\Big/\left(e\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\right]^{s}\right\} =$$

$$\max\left\{\left|(1-\alpha)^{k}(1-\beta)^{l}(1-\gamma)^{m}\right|, s^{s}\left[(k\alpha+l\beta+m\gamma)e\right]^{-s}\right\}.$$

При $k = l = m = n/3$ $\left(n = 3p,\ p \in N\right)$ получим

$$\left|f(\lambda)\right| \le \max\left\{\left|(1-\alpha)^{n/3}(1-\beta)^{n/3}(1-\gamma)^{n/3}\right|, s^{s}\left[\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-s}\right\}.$$

Для достаточно больших n $\left|(1-\alpha)^{n/3}(1-\beta)^{n/3}(1-\gamma)^{n/3}\right| \le s^{s}\left[\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-s}$, значит, для таких n справедлива оценка $\left|f(\lambda)\right| \le s^{s}\left[(k\alpha+l\beta+m\gamma)e\right]^{-s} = s^{s}\left[\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-s}$. Поэтому $\left\|x-x_n\right\| \le s^{s}\left[(k\alpha+l\beta+m\gamma)e\right]^{-s}\left\|z\right\|$. Отсюда $\left\|x-x_{n,\delta}\right\| \le s^{s}\left[(k\alpha+l\beta+m\gamma)e\right]^{-s}\left\|z\right\| + (k\alpha+l\beta+m\gamma)\delta$.

Итак, доказана

Теорема 3. *Если* $x = A^{s}z$, $s > 0$, *то для метода* (4) *справедлива оценка погрешности*

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\| \le s^{s}\left[(k\alpha+l\beta+m\gamma)e\right]^{-s}\left\|z\right\| + (k\alpha+l\beta+m\gamma)\delta. \tag{9}$$

Замечание 2. *Для упрощения считали* $\left\|A\right\| = 1$. *На самом деле все результаты легко переносятся на случай, когда* $\left\|A\right\| < \infty$.

При $k = l = m = n/3$ оценка (8) примет вид

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\| \le s^{s}\left[\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-s}\left\|z\right\| + \frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\delta.$$

Ее оптимальная по n оценка имеет вид

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (1+s)e^{-s/(s+1)}\delta^{s/(s+1)}\left\|z\right\|^{1/(s+1)} \tag{10}$$

и получается при $n_{\text{опт}} = s\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^{-1} e^{-s/(s+1)}\delta^{-1/(s+1)}\left\|z\right\|^{1/(s+1)}$.

Таким образом, оптимальная оценка (10) для метода (4) при неточности в правой части уравнения (2) оказывается такой же, как и оптимальная оценка для *метода простой итерации Ландвебера* [2]. Следовательно, метод (4) не дает преимущества в мажорантных оценках по сравнению с методом простых итераций [2]. Но он дает выигрыш в следующем. В методе простых итераций с постоянным шагом [2] требуется условие $0<\alpha\le 1{,}25$, а в методе (4) $0<\alpha<2,\ \alpha+\beta<8$, а γ выбирается из условия $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)|<1$. И, выбирая α, β, γ соответствующим образом, можно сделать $n_{\text{опт}}$ в методе (3) меньшим, чем для [2]. Поэтому, используя метод (4), для достижения оптимальной точности потребуется сделать число итераций по крайней мере в 2,5 раза меньше, чем *методом Ландвебера* [2].

Рассмотрим погрешность метода (4) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по методу (4), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом вычислительных погрешностей η_n, т. е.

$$z_{n+1}=z_n-\alpha_{n+1}\left(Az_n-y_\delta\right)+\alpha_{n+1}\eta_n,\ \ z_0=0. \tag{11}$$

Обозначим $\varepsilon_n=z_n-x_{n,\delta}$ и вычтем (3) из (10), в результате получим

$$\varepsilon_{n+1}=\left(E-\alpha_{n+1}A\right)\varepsilon_n+\alpha_{n+1}\eta_n,\ \ \varepsilon_0=\varepsilon_1=0,\ \ \eta_0=0. \tag{12}$$

По индукции докажем, что

$$\varepsilon_n=\sum_{k=0}^{n-2}\alpha_{n-k}\prod_{i=0}^{k-1}\left(E-\alpha_{n-i}A\right)\eta_{n-k-1}. \tag{13}$$

Из (12) при $n=1$ и из (13) при $n=2$ получим $\varepsilon_2=\alpha_2\eta_1$, т. е. при $n=2$ (13) верна. Пусть (13) справедлива при $n=p$: $\varepsilon_p=\sum_{k=0}^{p-2}\alpha_{p-k}\prod_{i=0}^{k-1}(E-\alpha_{p-i}A)\eta_{p-k-1}$. Докажем, что (13) справедлива при $n=p+1$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{p+1}&=(E-\alpha_{p+1}A)\varepsilon_p+\alpha_{p+1}\eta_p=(E-\alpha_{p+1}A)\left[\sum_{k=0}^{p-2}\alpha_{p-k}\prod_{i=0}^{k-1}(E-\alpha_{p-i}A)\eta_{p-k-1}\right]+\\
&+\alpha_{p+1}\eta_p=(E-\alpha_{p+1}A)[\alpha_p\eta_{p-1}+\alpha_{p-1}(E-\alpha_pA)\eta_{p-2}+\alpha_{p-2}(E-\alpha_pA)(E-\\
&-\alpha_{p-1}A)\eta_{p-3}+\ldots+\alpha_2(E-\alpha_pA)(E-\alpha_{p-1}A)\ldots(E-\alpha_3A)\eta_1]+\alpha_{p+1}\eta_p=\\
&=\alpha_p(E-\alpha_{p+1}A)\eta_{p-1}+\alpha_{p-1}(E-\alpha_{p+1}A)(E-\alpha_pA)\eta_{p-2}+\alpha_{p-2}(E-\\
&-\alpha_{p+1}A)(E-\alpha_pA)(E-\alpha_{p-1}A)\eta_{p-3}+\ldots+\alpha_2(E-\alpha_{p+1}A)(E-\alpha_pA)(E-\\
&-\alpha_{p-1}A)\ldots(E-\alpha_3A)\eta_1+\alpha_{p+1}\eta_p=\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_{p+1-k}\prod_{i=0}^{k-1}(E-\alpha_{p+1-i}A)\eta_{p-k}.
\end{aligned}$$

Следовательно, формула (13) верна.

Так как $\|E-\alpha A\|\le 1,\ \|(E-\alpha A)(E-\beta A)\|\le 1,\ \ \|(E-\alpha A)(E-\beta A)(E-\gamma A)\|\le 1$, то $\|\varepsilon_n\|\le\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\eta$, где $\eta=\sup_i|\eta_i|$.

Таким образом, с учетом вычислительной погрешности справедлива следующая оценка погрешности метода итераций с переменным шагом (4):

$$\|x-z_n\|\le\|x-x_{n,\delta}\|+\|x_{n,\delta}-z_n\|\le s^s\left[\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-s}\|z\|+\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)(\delta+\eta).$$

3. Сходимость метода в полунорме гильбертова пространства при точной и приближенной правой части уравнения

Изучим сходимость итерационного метода (4) в случае единственного решения в *полунорме* (энергетической норме) гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$ [5; 6; 8; 12]. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем, что $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \tag{14}$$

В разделе 2 показано, что $x_n = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^k (E - \beta A)^l (E - \gamma A)^m\right] y$, где $k, l, m -$ натуральные показатели и $k + l + m = n$. Тогда запишем первое слагаемое из равенства (14) в виде

$$\begin{aligned} x - x_n &= A^{-1} y - A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^k (E - \beta A)^l (E - \gamma A)^m\right] y = \\ &= (E - \alpha A)^k (E - \beta A)^l (E - \gamma A)^m x. \end{aligned}$$

Как было показано в разделе 2, $x - x_n$ бесконечно мало в норме пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки необходима дополнительная информация на гладкость точного решения x – его истокообразная представимость. При использовании полунормы нам это дополнительное предположение не потребуется. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора A имеем

$$\begin{aligned} \|x - x_n\|_A^2 &= (A(x - x_n), x - x_n) = \\ &= \left(A(E - \alpha A)^k (E - \beta A)^l (E - \gamma A)^m x, (E - \alpha A)^k (E - \beta A)^l (E - \gamma A)^m x\right) = \\ &= \left(A(E - \alpha A)^{2k} (E - \beta A)^{2l} (E - \gamma A)^{2m} x, x\right) = \\ &= \int_0^1 \lambda(1 - \alpha\lambda)^{2k} (1 - \beta\lambda)^{2l} (1 - \gamma\lambda)^{2m} \, d(E_\lambda x, x), \end{aligned}$$

где E_λ – соответствующая оператору A спектральная функция.

Для оценки интересующей нас нормы найдем при $\lambda \in [0,1]$ максимум подынтегральной функции $\psi(\lambda) = \lambda(1 - \alpha\lambda)^{2k} (1 - \beta\lambda)^{2l} (1 - \gamma\lambda)^{2m}$.

Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0,1]$, положительных α, β, γ выполнялось условие (7).

В разделе 2 показано, что для достаточно больших n справедливо $\lambda(1 - \alpha\lambda)^k (1 - \beta\lambda)^l (1 - \gamma\lambda)^m \le [(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-1}$, поэтому

$$\lambda(1 - \alpha\lambda)^{2k} (1 - \beta\lambda)^{2l} (1 - \gamma\lambda)^{2m} \le [2(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-1}.$$

В дальнейшем для простоты, считаем, что $k = l = m = \dfrac{n}{3}$ $(n = 3p,\ p \in N)$. Поэтому для таких n справедлива оценка $\max\limits_{\lambda \in [0,1]} |\psi(\lambda)| \le \left[\dfrac{2n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)e\right]^{-1}$.

Следовательно, при условии (7) получим следующую оценку $\|x-x_n\|_A \le \left[\frac{2n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-1/2}\|x\|$.

Оценим второе слагаемое в (14). Как показано в разделе 2, имеет место равенство

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{n/3}(E-\beta A)^{n/3}(E-\gamma A)^{n/3}\right](y-y_\delta)=$$
$$=\int_0^1 \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right]dE_\lambda(y-y_\delta).$$

Тогда

$$\|x_n-x_{n,\delta}\|_A^2 = \left(A(x_n-x_{n,\delta}),\ x_n-x_{n,\delta}\right)=$$
$$=\Big(\left[E-(E-\alpha A)^{n/3}(E-\beta A)^{n/3}(E-\gamma A)^{n/3}\right](y-y_\delta),$$
$$A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{n/3}(E-\beta A)^{n/3}(E-\gamma A)^{n/3}\right](y-y_\delta)\Big)=$$
$$=\left(A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{n/3}(E-\beta A)^{n/3}(E-\gamma A)^{n/3}\right]^2(y-y_\delta),\ y-y_\delta\right)=$$
$$=\int_0^1 \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right]^2 d\left(E_\lambda(y-y_\delta), y-y_\delta\right).$$

Обозначим через $\xi_n(\lambda)$ подынтегральную функцию и оценим ее сверху при условии (7). В разделе 2 показано, что $|g_n(\lambda)|=$ $=\left|\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right]\right|\le\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma).$ Тогда

$$\xi_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right]^2=$$
$$=\left|\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right]\right|\ \left|1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right|\le$$
$$\le\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\left(1+\left|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)\right|^{n/3}\right)\le\frac{2n}{3}(\alpha+\beta+\gamma),$$

т. к. при условии (7) справедливо $\left|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)\right|^{n/3}<1$.

Итак, для любых $n\ge1$ $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A^{\,2}\le\frac{2n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\delta^2$, поэтому

$$\|x_n-x_{n,\delta}\|_A\le\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}n^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta,\ n\ge1.$$

Поскольку

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A\le\|x-x_n\|_A+\|x_n-x_{n,\delta}\|_A\le\|x-x_n\|_A+\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}n^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta,\quad n\ge1$$

и при $n \to \infty$ $\|x - x_n\|_A \to 0$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \to 0$, $n \to \infty$, достаточно, чтобы $\sqrt{n}\,\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$.

Таким образом, если в процедуре (4) выбрать число итераций $n = n(\delta)$, зависящих от δ так, чтобы $\sqrt{n}\,\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$, то получим регуляризующий метод, обеспечивающий сходимость к точному решению уравнения (2) в полунорме гильбертова пространства. Итак, доказана

Теорема 4. *Итерационная процедура* (4) *при условии* (7) *сходится в полунорме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать так, чтобы* $\sqrt{n}\,\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3)

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \left[\frac{2n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-1/2}\|x\| + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} n^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta,\ n \ge 1. \quad (15)$$

Оптимизируем полученную оценку (15) по *n*, т. е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций *n*, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по *n* от правой части равенства (15), получим $3^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{-1/2}e^{-1/2}\|x\| = 3^{-1/2}2(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta n$, отсюда

$$n_{\text{опт}} = 3(\alpha+\beta+\gamma)^{-1} e^{-1/2}(2\delta)^{-1}\|x\|. \quad (16)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (15), найдем ее оптимальное значение:

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le 2e^{-1/4}\delta^{1/2}\,\|x\|^{1/2}. \quad (17)$$

Из (17) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметров α,β,γ. Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α,β,γ, и поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать α,β,γ возможно большими, удовлетворяющими условию (7), и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in Z$. Таким образом, доказана

Теорема 5. *При условии* (7) *оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса* (4) *в полунорме гильбертова пространства имеет вид* (17) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (16).

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в полунорме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства *H*. Эти условия дает

Теорем 6. *Если выполнены условия:*

1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$,

2) $E_\varepsilon x = 0$, *где* $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$, ε – *фиксированное положительное число* $(0 < \varepsilon < 1)$,

то из сходимости $x_{n,\delta}$ *к решению x в полунорме норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

Доказательство.

Из 1) и 2) имеем $\int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) = 0$.

Отсюда получим

$$\|x-x_{n,\delta}\|^2=\int_0^1 d\left(E_\lambda\left(x-x_{n,\delta}\right),x-x_{n,\delta}\right)=\int_0^1\frac{1}{\lambda}d\left(E_\lambda\left(x-x_{n,\delta}\right),A\left(x-x_{n,\delta}\right)\right)=$$

$$=\int_0^\varepsilon\frac{1}{\lambda}d\left(E_\lambda\left(x-x_{n,\delta}\right),A\left(x-x_{n,\delta}\right)\right)+\int_\varepsilon^1\frac{1}{\lambda}d\left(E_\lambda\left(x-x_{n,\delta}\right),A\left(x-x_{n,\delta}\right)\right)=$$

$$=\int_\varepsilon^1\frac{1}{\lambda}d\left(E_\lambda\left(x-x_{n,\delta}\right),A\left(x-x_{n,\delta}\right)\right)\le\frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^1 d\left(E_\lambda\left(x-x_{n,\delta}\right),A\left(x-x_{n,\delta}\right)\right)\le$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 d\left(E_\lambda\left(x-x_{n,\delta}\right),A\left(x-x_{n,\delta}\right)\right)=\frac{1}{\varepsilon}\|x-x_{n,\delta}\|_A^2.$$

Поэтому из $\|x-x_{n,\delta}\|_A\to 0$, $n\to\infty$ следует $\|x-x_{n,\delta}\|\to 0$, $n\to\infty$. Теорема 6 доказана.

Замечание 3. *Так как* $x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{n/3}(E-\beta A)^{n/3}(E-\gamma A)^{n/3}\right]y_\delta$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_\varepsilon y_\delta=0$. *Таким образом, если решение x и приближенная правая часть* y_δ *таковы, что* $E_\varepsilon x=0$ *и* $E_\varepsilon y_\delta=0$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к x в полунорме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства и, следовательно, для сходимости приближений* (4) *в норме пространства H не требуется предположения истокопредставимости точного решения.*

4. Сходимость метода с апостериорным выбором числа итераций

Априорный выбор числа итераций $n_{\text{опт}}$ получен в предположении, что точное решение x истокопредставимо, т. е. $x=A^s z,\ s>0.$ Однако не всегда имеются сведения об элементе z и степени истокопредставимости s. Тем не менее метод (4) становится вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке [2; 5; 6; 8].

Определим момент m останова итерационного процесса (4) условием

$$\left.\begin{aligned}&\|Ax_{n,\delta}-y_\delta\|>\varepsilon,\quad (n<m),\\&\|Ax_{m,\delta}-y_\delta\|\le\varepsilon,\end{aligned}\right\}\quad \varepsilon=b\delta,\quad b>1. \tag{18}$$

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|Ax_{0,\delta}-y_\delta\|>\varepsilon.$ Покажем возможность применения правила останова (18) к итерационному методу (3).

Рассмотрим при n = 3p, p = 1, 2,… семейство функций

$$g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right].$$

Из раздела 2 при условиях (7) получим

$$\sup_{0\le\lambda\le1}|g_n(\lambda)|\le\frac{n(\alpha+\beta+\gamma)}{3}, \tag{19}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le1}|1-\lambda g_n(\lambda)| = \sup_{0\le\lambda\le1}\left|(1-\alpha\lambda)^{\frac{n}{3}}(1-\beta\lambda)^{\frac{n}{3}}(1-\gamma\lambda)^{\frac{n}{3}}\right| \le 1, \tag{20}$$

$$1-\lambda\, g_n(\lambda) = (1-\alpha\lambda)^{\frac{n}{3}}(1-\beta\lambda)^{\frac{n}{3}}(1-\gamma\lambda)^{\frac{n}{3}} \to 0, \quad n\to\infty,\ \forall\lambda\in(0,1], \tag{21}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le1}\lambda^s|1-\lambda g_n(\lambda)| \le s^s\left[\frac{n(\alpha+\beta+\gamma)e}{3}\right]^{-s},\ n>0,\ 0\le s<\infty. \tag{22}$$

Аналогично [5; 6; 8] доказываются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $\|A\|\le 1$. *Тогда для любого* $w\in H$ $(E-Ag_n(A))w\to 0,\quad n\to\infty.$

Лемма 2. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $\|A\|\le 1$. *Тогда для любого* $v\in\overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^s\left\|A^s(E-Ag_n(A))v\right\|\to 0$ *при* $n\to\infty$, $0\le s<\infty$.

Лемма 3. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $\|A\|\le 1$. *Если для некоторой подпоследовательности* $n_k<\bar{n}=const$ *и* $v_0\in\overline{R(A)}$ *при* $k\to\infty$ *имеем* $\omega_k=A(E-Ag_{n_k}(A))v_0\to 0$, *то* $v_k=(E-Ag_{n_k}(A))v_0\to 0$.

Используем эти леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 7. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $\|A\|\le 1$ *и пусть момент останова* $m=m(\delta)$ $(m=3p,\quad p=1,2,3,\ldots)$ *в методе* (3) *выбран по правилу* (17), *тогда* $x_{m,\delta}\to x$ *при* $\delta\to 0$.

Доказательство.

Поскольку нуль не является собственным значением оператора A, то $M(A)=\overline{R(A)}=H$.

Так как

$$E-A[\alpha_n+\alpha_{n-1}(E-\alpha_nA)+\ldots+\alpha_1(E-\alpha_nA)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_2A)]=$$
$$=(E-\alpha_1A)(E-\alpha_2A)\ldots(E-\alpha_nA),$$

то

$$A[\alpha_n+\alpha_{n-1}(E-\alpha_nA)+\ldots+\alpha_1(E-\alpha_nA)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_2A)]=$$
$$=E-(E-\alpha_1A)(E-\alpha_2A)\ldots(E-\alpha_nA).$$

Имеем

$$x_{n,\delta}=[\alpha_n+\alpha_{n-1}(E-\alpha_nA)+\ldots+\alpha_1(E-\alpha_nA)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_2A)]y_\delta,$$

следовательно,

$$x_{n,\delta}-x=A^{-1}[E-(E-\alpha_1A)(E-\alpha_2A)\ldots(E-\alpha_nA)](y_\delta-y)-$$
$$-(E-\alpha_1A)(E-\alpha_2A)\ldots(E-\alpha_nA)x=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{\frac{n}{3}}(E-\beta A)^{\frac{n}{3}}(E-\gamma A)^{\frac{n}{3}}\right](y_\delta-$$

$$-y)-(E-\alpha A)^{\frac{n}{3}}(E-\beta A)^{\frac{n}{3}}(E-\gamma A)^{\frac{n}{3}}x = g_n(A)(y_\delta - y)-(E-Ag_n(A))x$$

(здесь и ниже $n = 3p$, $p = 1,2,3,\ldots$). Значит,

$$Ax_{n,\delta} - y = -A(E - Ag_n(A))x + Ag_n(A)(y_\delta - y). \tag{23}$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A(E - Ag_n(A))x - (E - Ag_n(A))(y_\delta - y). \tag{24}$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \to 0,\ n \to \infty, \tag{25}$$

$$\sigma_n = n\|A(E - Ag_n(A))x\| \to 0,\ n \to \infty. \tag{26}$$

Кроме того, из (19) и (20)

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \le \frac{n(\alpha+\beta+\gamma)}{3}\delta, \tag{27}$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \le 1. \tag{28}$$

Применим правило останова (18). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le b\delta$ и из (24) и (28) получим при $n = m$

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \le \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \le b\delta + \delta = (b+1)\delta.$$

Следовательно,

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \le (b+1)\delta. \tag{29}$$

Для любого $n < m$ получим

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \ge \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \ge b\delta - \delta = (b-1)\delta,$$

т. е. для любого $n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \ge (b-1)\delta. \tag{30}$$

Из (26) и (30) при $n = m-3$ получим $\dfrac{\sigma_{m-3}}{m-3} = \|A(E - Ag_{m-3}(A))x\| \ge (b-1)\delta$ или (что то же) $(m-3)\delta \le \dfrac{\sigma_{m-3}}{b-1} \to 0,\ \ \delta \to 0$ (так как из (26) $\sigma_m \to 0,\ m \to \infty$), следовательно, $m\delta \to 0,\ \delta \to 0$. Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to 0$, то

$$\|x_{m,\delta} - x\| \le \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \le \|(E - Ag_m(A))x\| +$$
$$+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}m\delta \to 0,\ m \to \infty,\ \delta \to 0.$$

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x,\ \delta_n \to 0$.

Действительно, из (28) $\left\|A\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\| \le (b+1)\delta_n \to 0$, $\delta_n \to 0$.

Следовательно, при $\delta_n \to 0$ $A\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0$, $\delta_n \to 0$, и по лемме 3 $\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0$, $\delta_n \to 0$. Отсюда имеем $\left\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\right\| \le \left\|\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\|$ $+\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} m(\delta_n)\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0$. Теорема 7 доказана. Имеет место

Теорема 8. *Пусть выполняются условия теоремы* 7 *и пусть* $x = A^s z,\ s > 0$, *тогда справедливы оценки* $m \le 3 + \dfrac{3(s+1)}{(\alpha+\beta+\gamma)e}\left[\dfrac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}$,

$$\left\|x_{m,\delta} - x\right\| \le \left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\left\{3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha+\beta+\gamma)e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \quad (31)$$

Доказательство.

При $n = m-3$ имеем $\left\|A\left(E - Ag_{m-3}(A)\right)x\right\| = \left\|A^{s+1}\left(E - Ag_{m-3}(A)\right)z\right\| \le$ $\le (s+1)^{s+1}\left[(m-3)\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)e}{3}\right]^{-(s+1)}\|z\|$. Используя (30), получим b–$1)\delta \le$ $\le (s+1)^{s+1}\left[(m-3)\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)e}{3}\right]^{-(s+1)}\|z\|$, откуда $m \le 3 + \dfrac{3(s+1)}{(\alpha+\beta+\gamma)e}\left[\dfrac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}$.

При помощи неравенства моментов оценим выражение

$$\left\|\left(E - Ag_m(A)\right)x\right\| = \left\|A^s\left(E - Ag_m(A)\right)z\right\| \le \left\|A^{s+1}\left(E - Ag_m(A)\right)z\right\|^{s/(s+1)} \times$$
$$\times\left\|\left(E - Ag_m(A)\right)z\right\|^{1/(s+1)} \le \left\|A\left(E - Ag_m(A)\right)x\right\|^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} \le \left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}.$$

Тогда

$$\left\|x_{m,\delta} - x\right\| \le \left\|\left(E - Ag_m(A)\right)x\right\| + \left\|g_m(A)(y_\delta - y)\right\| \le$$
$$\le \left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} + \frac{m(\alpha+\beta+\gamma)}{3}\delta \le$$
$$\le \left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\left\{3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha+\beta+\gamma)e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta.$$

Теорема 8 доказана.

Замечание 4. *Порядок оценки* (30) *есть* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, *и, как следует из* [2; 6], *он оптимален в классе решений* $x = A^s z$, $s > 0$.

Замечание 5. *В формулировке теоремы* 8 *предполагается, что точное решение истокопредставимо, но знание истокопредставимости не потребуется на практике, так как при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку решения.*

4. Численная модельная задача

Рассмотрим в пространстве $L_2(0,1)$ задачу в виде уравнения

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds = y(t), \qquad 0 \leq t \leq 1 \tag{32}$$

с симметричным положительным ядром $K(t,\ s) = \dfrac{1}{1+100(t-s)^2}$. В качестве точного решения сформулированной задачи выберем функцию

$$x(s) = \begin{cases} 2s, \quad 0 \leq s < 0{,}25, \\ -s + 0{,}75, \quad 0{,}25 \leq s < 0{,}5, \\ s - 0{,}25, \quad 0{,}5 \leq s < 0{,}75, \\ -2s + 2, \quad 0{,}75 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

С использованием квадратурной формулы правых прямоугольников при $m = 32$, $h = 1/m$ была вычислена в точках $t_i = ih,\ i = \overline{1,m}$ правая часть $y(t)$ интегрального уравнения (31). Сформулированная задача относится к классу обратных задач теории потенциала. Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ, и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения $\tilde{y}_i$, $i = \overline{1,m}$, полученные следующим образом $\tilde{y}_i = [y(t_i)\cdot 10^k + 0{,}5] / 10^k$, квадратные скобки означают целую часть числа и $k = 3; 4$. При $k = 3$ величина погрешности $\delta = 10^{-3}$. При $k = 4$ величина погрешности $\delta = 10^{-4}$. Действительно, $\int_0^1 [y(t) - \tilde{y}(t)]^2 dt \approx \sum_{i=1}^m [y(t_i) - \tilde{y}_i]^2 h \leq mh(10^{-k})^2 = 10^{-2k}$. Заменим интеграл в уравнении (31) квадратурной суммой, например, по формуле правых прямоугольников с узлами $s_j = jh,\ \ j = \overline{1,m},\ h = 1/m$, т. е. $\int_0^1 K(t,s)x(s)ds \approx \sum_{j=1}^m K(t,s_j)hx_j$. Тогда получим равенство $\sum_{j=1}^m K(t,s_j)hx_j + \rho_m(t) = y(t)$, где $\rho_m(t)$ – остаток квадратурной замены.

Записав последнее равенство в точках $t_i,\ i = \overline{1,m},$ получим уравнения $\sum_{j=1}^m K(t_i,s_j)hx_j + \rho_m(t_i) = y(t_i)$, $i = \overline{1,m}.$ Точные значения $y(t_i)$ мы не знаем, а знаем лишь приближения $\tilde{y}_i$, и, отбросив теперь остаточный член, получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно приближенного решения

$$\sum_{j=1}^m K(t_i,s_j)hx_j = \tilde{y}_i \quad , \ i = \overline{1,m}. \tag{33}$$

Выберем для определенности $m = 32$ и будем решать систему (33) методом итераций (4), который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha_{n+1}\left[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) h x_j^{(n)}\right], \; x_i^{(0)} = 0,$$

$$\alpha_{3n+1} = \alpha, \; \alpha_{3n+2} = \beta, \; \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad i = \overline{1, m}.$$

Затем система (33) решалась методом простой итерации [2], который в данном случае запишется $x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha\left[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) h x_j^{(n)}\right]$, $x_i^{(0)} = 0$, $i = \overline{1, m}$. При счете выбирались: $\alpha = 0{,}8$, $\beta = 4{,}4$, $\gamma = 2{,}1$. Задача была решена при $\delta = 10^{-3}$ и $\delta = 10^{-4}$.

При решении задачи итерационными методами (4) и [2] на каждом шаге итерации вычислялись: $\left\|Ax^{(n)} - \tilde{y}\right\|_m = \left\{\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) h x_j^{(n)} - \tilde{y}_i\right]^2 h\right\}^{1/2}$ – дискретная норма невязки, $\left\|x^{(n)}\right\|_m = \left\{\sum_{i=1}^{m}\left[x_i^{(n)}\right]^2 h\right\}^{1/2}$ – норма приближенного решения и дискретная норма разности между точным и приближенным решениями $\left\|x - x^{(n)}\right\|_m = \left\{\sum_{i=1}^{m}\left[x(t_i) - x_i^{(n)}\right]^2 h\right\}^{1/2}$.

Таблица – Результаты счета итераций разными методами

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближенные решения			
			Метод [2] $\delta = 10^{-3}$	Метод (4) $\delta = 10^{-3}$	Метод [2] $\delta = 10^{-4}$	Метод (4) $\delta = 10^{-4}$
0,00000	0,03038	0,00000	0,04025	0,04669	0,02731	0,02795
0,03125	0,03801	0,06250	0,07789	0,08404	0,06017	0,06099
0,06250	0,04695	0,12500	0,12639	0,13130	0,11313	0,11391
0,09375	0,05669	0,18750	0,19125	0,19389	0,18107	0,18168
0,12500	0,06669	0,25000	0,25682	0,25691	0,24990	0,25001
0,15625	0,07639	0,31250	0,30803	0,30600	0,31914	0,31879
0,18750	0,08519	0,37500	0,37318	0,36851	0,38502	0,38444
0,21875	0,09244	0,43750	0,41555	0,40922	0,43699	0,43621
0,25000	0,09753	0,50000	0,46200	0,45415	0,46778	0,46717
0,28125	0,10021	0,46875	0,45018	0,44334	0,46967	0,46910
0,31250	0,10071	0,43750	0,44362	0,43792	0,44699	0,44646
0,34375	0,09961	0,40625	0,41646	0,41287	0,41290	0,41256
0,37500	0,09755	0,37500	0,38401	0,38280	0,37434	0,37428
0,40625	0,09508	0,34375	0,33873	0,34033	0,34103	0,34144
0,43750	0,09274	0,31250	0,31626	0,31964	0,30473	0,30520
0,46875	0,09103	0,28125	0,28839	0,29362	0,27946	0,27998
0,50000	0,09040	0,25000	0,27274	0,27859	0,27103	0,27159
$\left\|Ax^{(n)} - \tilde{y}\right\|_m$			0,00102	0,00145	0,00011	0,00015
$\left\|x^{(n)}\right\|_m$			0,33540	0,33322	0,33792	0,33777
$\left\|x - x^{(n)}\right\|_m$			0,01794	0,02211	0,01267	0,01272
Количество итераций			26	11	42	17

В обоих случаях для решения задачи сведений об истокопредставимости точного решения не потребовалось, т. к. здесь воспользовались правилом останова по невязке (18), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1{,}5\delta$. Итак, при $\delta = 10^{-3}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ для достижения оптимальной точности при счете методом итераций (3) потребовалось 11 итераций, при счете методом Ландвебера [2] – 26 итераций. При $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$, соответственно, потребовалось 17 и 42 итераций.

Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности метод итераций (4) требует примерно в 2,5 раза меньше итераций, чем метод простой итерации [2], что соответствует результатам раздела 3. Здесь также не потребовалось сведений об истокопредставимости точного решения. Результаты счета приведены в таблице.

Графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (4) при $\delta = 10^{-4}$, приведены на рисунке.

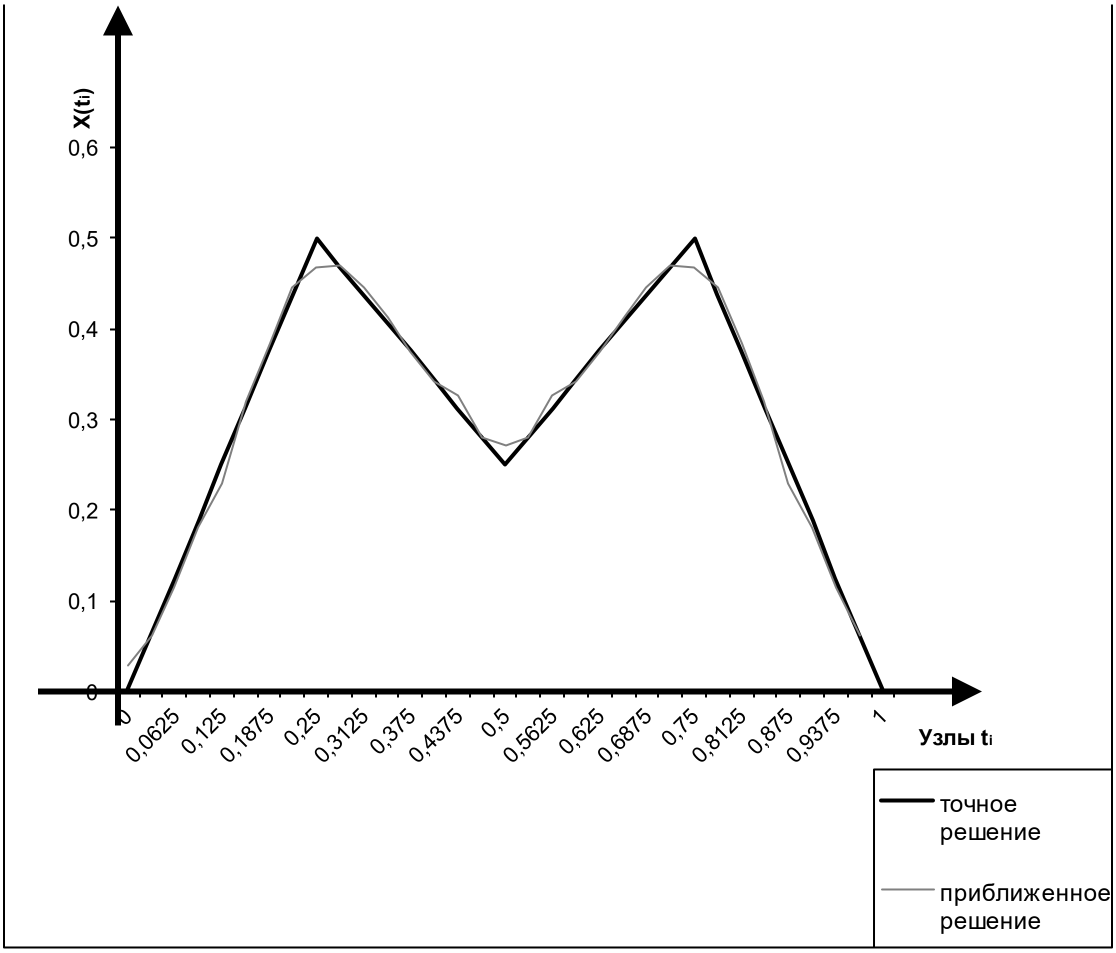

Рисунок – Графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (4) при $\delta = 10^{-4}$

Заключение

В настоящей статье изучены некоторые свойства предложенной явной схемы итераций решения некорректных задач:

1) доказана сходимость приближений с априорным и апостериорным выбором параметра регуляризации (останов по невязке) в исходной норме гильбертова про-

странства в случае ограниченного самосопряженного оператора, получены оценки погрешностей и оценки для моментов останова;

2) доказана сходимость метода в полунорме гильбертова пространства, и решена численная некорректная модельная задача.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.

2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.

3. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.

4. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.

5 Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2008. – 196 с.

6. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.

7. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2014. – Nr 2 (116). – P. 89–95.

8. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.

9. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr 3. – P. 373–389.

10. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – Nr 2 (119). – P. 33–41.

11. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.

12. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr 416. – P. 1–12.

REFERENCES

1 Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.

2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.

3. Yemielin, I. V. K tieorii niekorriektnykh zadach / I. V. Yemielin, M. A. Krasnosiel'skij // Dokl. AN SSSR. – 1979. – T. 244, № 4. – S. 805–808.

4. Samarskij, A. A. Chisliennyje mietody rieshenija obratnykh zadach matiematichieskoj fiziki / A. A. Samarskij, P. N. Vabishchievich. – M. : Editorial URSS, 2004. – 480 s.

5. Савчук, В. Ф. Rieguliarizacija opieratornykh uravnienij v gilbiertovom prostranstvie / V. F. Savchuк, O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2008. – 196 s.

6. Matysik, O. V. Javnyje i niejavnyje iteracionnyje procedury rieshenija niekorriektno postavliennykh zadach / O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2014. – 213 s.

7. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2014. – Nr 2 (116). – P. 89–95.

8. Matysik, O. V. Iteracionnaja rieguliarizacija niekorriektnykh zadach / O. V. Matysik. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 s.

9. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr 3. – P. 373–389.

10. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – Nr 2 (119). – P. 33–41.

11. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.

12. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr 416. – P. 1–12.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 22.03.2024