УДК 512.542

Д.В. Грицук[1], А.А. Трофимук[2], Т.В. Бондарук[3]
[1]*канд. физ.-мат. наук, зав. каф. прикладной математики и информатики*
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]*канд. физ.-мат. наук, докторант каф. алгебры и геометрии*
Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины
[3]*магистрант каф. алгебры, геометрии и математического моделирования*
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: [1]dmitry.gritsuk@gmail.com, [2]alexander.trofimuk@gmail.com

ИНВАРИАНТЫ -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ, У КОТОРОЙ СИЛОВСКИЕ ПОДГРУППЫ ИЗ ФАКТОРОВ ИМЕЮТ ЗАДАННЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Исследованы -разрешимые группы, у которых силовские подгруппы из факторов имеют заданные ограничения, получены оценки π-длины, нильпотентной π-длины и производной π-длины для таких групп. В частности, если π-разрешимая группа G обладает нормальным рядом, силовские подгруппы π-факторов которого являются цикличискими, то π-длина не превышает 1, а нильпотентная π-длина и производная π-длина не превышают 2. Если π-разрешимая группа G обладает нормальным рядом, силовские подгруппы π-факторов которого являются бициклическими и $2 \in \pi$, то π-длина не превышает 2, нильпотентная π-длина не превышает 4, а производная π-длина не превышает 10.

Рассматриваются только конечные частично разрешимые группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1; 2].

Строение частично разрешимых групп можно изучить за счет получения оценок таких инвариантов как π-длина, нильпотентная π-длина и производная π-длина, где π – некоторое подмножество множества простых чисел $\mathbb{P}$. Дополнение к π во множестве $\mathbb{P}$ обозначается через π'. Символом π обозначается также функция, определенная на множестве всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующим образом: $\pi(a)$ – множество простых чисел, делящих натуральное число a. Для группы G и ее подгруппы H считаем, что $\pi(G) = \pi(|G|)$ и $\pi(G{:}H) = \pi(|G{:}H|)$ Зафиксируем множество простых чисел π. Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то натуральное число m называется -числом. Группа G называется -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$ и π'-группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$. В этом случае $\pi(G) \cap \pi' = \emptyset$.

Напомним, что субнормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп
$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{m-1} \subset G_m = G, \qquad (1)$$
такая, что G_i нормальна в G_{i+1} для любого i. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами субнормального ряда (1).

Группа называется *π-разрешимой*, если она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо разрешимыми π-группами, либо π'-группами. Хорошо известно, что наименьшее число π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi(G)$.

В 1968 г. Картер, Фишер и Хоукс [3] для π-разрешимой группы ввели аналог нильпотентой длины, а именно, понятие нильпотентной π-длины. Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо π'-группами, либо нильпотентными π-группами. Наименьшее число нильпотентных π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется нильпотентной π-длиной π-разрешимой группы и обозначается через $l_\pi^n(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi = \pi(G)$, значение нильпотентной π-длины $l_\pi^n(G)$ совпадает со значением нильпотентной длины группы G.

В.С. Монаховым в 2006 г. [4] был предложен аналог производной длины для π-разрешимых групп. Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами. Наименьшее число абелевых π-факторов среди таких субнормальных рядов группы G называется производной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Если $\pi(G) = \pi$, то значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением производной длины группы G.

В ряде работ Д.В. Грицука, В.С. Монахова и О.А. Шпырко получены оценки производной и нильпотентной π-длины конечной π-разрешимой группы в зависимости от строения либо силовских p-подгрупп для $p \in \pi$, либо π-холловой подгруппы.

Так, например, доказано, что если в π-разрешимой группе G силовские p-подгруппы циклические для всех $p \in \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 2$; если в π-разрешимой группе G силовские p-подгруппы абелевы для всех $p \in \pi$, то $l_\pi^a(G) = d(G_\pi) \leq |\pi(G_\pi)|$ [5]. Установлено, что производная π-длина конечной π-разрешимой группы с бициклическими силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi$ не превышает 6 [6]. Доказано, что производная π-длина конечной π-разрешимой группы, силовские p- подгруппы которой либо бициклические либо имеют порядок p^3 для всех $p \in \pi$, не превышает 7 [5]. Напомним, что бициклической называют группу, факторизуемую двумя циклическими подгруппами.

В работе [7] установлено, что если в π-разрешимой группе G силовские p-подгруппы циклические для всех $p \in \pi$, то $l_\pi^n(G) \leq 2$; если в π-разрешимой группе G силовские p-подгруппы бициклические для всех $p \in \pi$, то $l_\pi^n(G) \leq 4$.

Нахождение инвариантов разрешимых групп с заданными свойствами силовских подгрупп нашло развитие в исследовании строения групп по свойствам силовских подгрупп в факторах их нормальных рядов.

Если у группы G имеется нормальный ряд с циклическими силовскими подгруппами в факторах, то несложно проверить, что G сверхразрешима. Поэтому группа G дисперсивна по Оре, ее коммутант нильпотентен, и нильпотентная длина группы G не выше 2. Поскольку любая p-группа имеет нормальный ряд с факторами простых порядков, то производную длину таких групп ограничить сверху нельзя. Однако, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ будет не выше 2.

Исследование разрешимых групп, обладающих нормальным рядом, факторы которого имеют бициклические силовские подгруппы, проведено в 2009 г. в работе [8]. В частности, получены оценки инвариантов (производной длины, нильпотентной длины и -длины) таких разрешимых групп. В 2013 г. [9] получено развитие теоремы Бэра о сверхразрешимости группы, у которой на участке нормального ряда разрешимой группы между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга факторы имеют простые порядки. В частности, получены оценки производной длины, нильпотентной длины и -длины разрешимой группы, у которой на участке нормального ряда между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга, силовские подгруппы факторов являются бициклическими.

Развитием данного направления иследования частично разрешимых групп является следующая теорема.

Теорема. *Пусть G – π-разрешимая группа. Если группа G обладает нормальным рядом, силовские подгруппы π-факторов которого являются:*

1) *циклическими, то* $l_\pi(G) \leq 1, l_\pi^n(G) \leq l_\pi^a(G) \leq 2$;
2) *метациклическими, то* $l_\pi(G) \leq 2, l_\pi^n(G) \leq 4, l_\pi^a(G) \leq 10$, *если* $2 \in \pi$;
3) *бициклическими, то* $l_\pi(G) \leq 2, l_\pi^n(G) \leq 4, l_\pi^a(G) \leq 10$, *если* $2 \in \pi$;
4) *либо бициклическими, либо свободными от четвертых степеней, то*

$$l_\pi(G) \leq 3, l_\pi^n(G) \leq 4, l_\pi^a(G) \leq 18, \text{ если } 2 \in \pi.$$

Вспомогательные результаты

Через $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются подгруппа Фиттинга и подгруппа Фраттини группы G соответственно; Z_m – циклическая группа порядка m; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в G p- и p'-подгруппы соответственно. Полупрямое произведение нормальной в G подгруппы A и подгруппы B будем записывать: $[A]B$.

В дальнейшем под $l_\pi^*(G)$ будем понимать либо всюду $l_\pi^a(G)$, либо всюду $l_\pi^n(G)$, либо всюду $l_\pi(G)$.

Лемма 1. [5] (лемма 1–2) *Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда:*

1) если H – подгруппа группы G, то $l_\pi^*(H) \leq l_\pi^*(G)$;

2) если N – нормальная подгруппа группы G, то

$$l_\pi^*(G/N) \leq l_\pi^*(G) \text{ и } l_\pi^*(G) \leq l_\pi^*(G/N) + l_\pi^*(N);$$

3) если N – нормальная π'-подгруппа группы G, то $l_\pi^*(G/N) = l_\pi^*(G)$;

4) если G и V – π-разрешимые группы, то $l_\pi^*(G \times V) = max\{l_\pi^*(G), l_\pi^*(V)\}$;

5) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G, то

$$l_\pi^*(G/(N_1 \cap N_2)) \leq max\{l_\pi^*(G/N_1), l_\pi^*(G/N_2)\};$$

6) $l_\pi^n(G/\Phi(G)) = l_\pi^n(G)$ и $l_\pi(G/\Phi(G)) = l_\pi(G)$.

Лемма 2. [5] (лемма 4) *Пусть G – π-разрешимая группа и t – натуральное число. Предположим, что $l_\pi^*(G/N) \leq t$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G, но $l_\pi^*(G) > t$. Тогда:*

1) $O_{\pi'}(G) = 1$;

2) $\Phi(G) = 1$, если рассматривать $l_\pi^n(G)$ и $l_\pi(G)$;

3) в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа;

4) $F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$ для некоторого простого $p \in \pi$;

5) $O_{p'}(G) = 1$ и $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$.

Доказательство. Для π-длины $l_\pi(G)$ и нильпотентной π-длины $l_\pi^n(G)$ утверждение доказано в [2] (лемма VI.6.9) и [10] (лемма 2) соответственно.

1. Предположим, что $O_{\pi'}(G) \neq 1$. Тогда по условию леммы $l_\pi^a\big(G/O_{\pi'}(G)\big) \leq t$. Теперь из леммы 1 (2) заключаем, что

$$l_\pi^a(G) = l_\pi^a\big(G/O_{\pi'}(G)\big) \leq t$$

противоречие. Поэтому предположение неверно, и $O_{\pi'}(G) = 1$.

2. Допустим, что в группе G. существуют две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2. Тогда $N_1 \cap N_2 = 1$ и по условию

$$l_\pi^a(G/N_1) \leq t \text{ и } l_\pi^a(G/N_2) \leq t.$$

Теперь из леммы 1 (5) заключаем, что

$$l_\pi^a(G) \leq \max\{l_\pi^a(G/N_1), l_\pi^a(G/N_2)\} \leq t$$

противоречие. Поэтому допущение неверно, и в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа.

3. Так как группа G -разрешима и $O_{\pi'}(G) = 1$, то $O_\pi(G) \neq 1$. Подгруппа $O_\pi(G)$ разрешима и неединична, поэтому ее подгруппа Фиттинга $F\big(O_\pi(G)\big)$ отлична от единичной подгруппы и, очевидно,

$$F\big(O_\pi(G)\big) \subseteq F(G).$$

Из утверждения 1 следует, что $F(G)$ является -подгруппой, поэтому

$$F(G) \subseteq F\big(O_\pi(G)\big),\ F(G) = F\big(O_\pi(G)\big).$$

Так как подгруппа $F(G)$ нильпотентна, а согласно утверждению 2 в группе G минимальная нормальная подгруппа единственна, то

$$F(G) = F\big(O_\pi(G)\big) = O_p(G)$$

для некоторого простого $p \in \pi$.

4. Если $O_{p'}(G) \neq 1$, то в группе G будут существовать две различные минимальные нормальные подгруппы: -подгруппа из $O_p(G)$ и p'-подгруппа из $O_{p'}(G)$. Имеем противоречие с утверждением 2. Поэтому $O_{p'}(G) = 1$.

Так как подгруппа $O_p(G)$ нормальна в G, то $C_G\left(O_p(G)\right)$ нормальна в G. Предположим, что

$$C_G\left(O_p(G)\right) \nsubseteq O_p(G).$$

Тогда фактор-группа

$$C_G\left(O_p(G)\right)O_p(G)/O_p(G)$$

будет неединичной нормальной подгруппой фактор-группы $G/O_p(G)$. Поскольку $O_p\left(G/O_p(G)\right) = 1$, то минимальная нормальная в $G/O_p(G)$подгруппа $A/O_p(G)$ из

$$C_G\left(O_p(G)\right)O_p(G)/O_p(G)$$

будет p'-группой. Пусть $K - p'$-холлова подгруппа из A. Тогда фактор-группа $KO_p(G)/O_p(G)$ будет p'-холловой подгруппой в группе $A/O_p(G)$, поэтому

$$A = KO_p(G) = K \times O_p(G).$$

Так как K холлова, то K характеристическая подгруппа в A, а подгруппа A нормальна в G. Следовательно, подгруппа K нормальна в G, и

$$K \subseteq O_{p'}(G) = 1.$$

Имеем противоречие. Поэтому допущение неверно, и

$$C_G\left(O_p(G)\right) \subseteq O_p(G).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. [11] (лемма 1). *Пусть G – бициклическая p-группа и N – дополняемая нормальная подгруппа группы G, то справедливы следующие утверждения:*

1) если $p = 2$, то $|N/\Phi(N)| \leq 4$,

2) если $p > 2$, то либо $N = G$, либо N циклическая.

Лемма 4. [7] (лемма 10). *Если G – сверхразрешимая группа, то для любого множества π простых чисел $l_\pi(G) \leq 1$ и $l_\pi^n(G) \leq 2$.*

Лемма 5. [11] (лемма 3). *Если H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(2,p)$, то сверхразрешимый корадикал подгруппы H является расширением циклической 2-группы порядка, делящего $(p-1)$, с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 4. Кроме того, производная длина подгруппы H не превышает 4.*

Лемма 6. [5] (лемма 3). *Если $G - \pi$ -разрешимая группа, то*

$$d(G_\pi) \leq l_\pi^a(G) \leq l_\pi(G)d(G_\pi).$$

Лемма 7. [11] (лемма 4). *Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(3,p)$. Тогда: для сверхразрешимого корадикала H^U подгруппы H возможны два случая:*

1) H^U абелева порядка, делящего $(p-1)^2$;

2) H^U – 3-замкнутая $\{2,3\}$-подгруппа; её силовская 3-подгруппа является расширением циклической группы порядка, делящего $p-1$ с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 9, а силовская 2-подгруппа является расширением циклической группы порядка, делящего $p-1$ с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 4. Кроме того, производная длина подгруппы H не превышает 5.

Основные результаты

Теорема. *Пусть G – π-разрешимая группа. Если группа G обладает нормальным рядом, силовские подгруппы π-факторов которого являются:*

1) *циклическими, то* $l_\pi(G) \le 1, l_\pi^n(G) \le l_\pi^a(G) \le 2$;
2) *метациклическими, то* $l_\pi(G) \le 2, l_\pi^n(G) \le 4, l_\pi^a(G) \le 10$, *если* $2 \in \pi$;
3) *бициклическими, то* $l_\pi(G) \le 2, l_\pi^n(G) \le 4, l_\pi^a(G) \le 10$, *если* $2 \in \pi$;
4) *либо бициклическими, либо свободными от четвертых степеней, то*
$$l_\pi(G) \le 3, l_\pi^n(G) \le 4, l_\pi^a(G) \le 18, \text{ если } 2 \in \pi.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда силовские подгруппы π-факторов являются бициклическими, либо свободными от четвертых степеней.

Пусть ряд (1) группы G из условия теоремы. Покажем, что для произвольной нормальной подгруппы N условие теоремы переносится на фактор-группу G/N. Очевидно, что ряд
$$G/N = G_n/N \supseteq G_{n-1}N/N \supseteq \cdots \supseteq G_1N/N \supseteq G_0N/N = 1$$
будет нормальным рядом группы G/N с факторами
$$(G_{i+1}N/N)/(G_iN/N) \simeq G_{i+1}N/G_iN = G_{i+1}(G_iN)/G_iN \simeq$$
$$\simeq G_{i+1}/(G_{i+1} \cap G_iN) = G_{i+1}/(G_i(G_{i+1} \cap N)) \simeq (G_{i+1}/G_i)/(G_i(G_{i+1} \cap N)/G_i),$$
изоморфными фактор-группам групп G_{i+1}/G_i. Если фактор-группа G_{i+1}/G_i является π-группой, то и фактор-группа
$$(G_{i+1}N/N)/(G_iN/N)$$
является π-группой. Так как по свойствам силовских подгрупп справедливо равенство
$$(G/N)_p = G_pN/N,$$
то силовские подгруппы π-факторов
$$(G_{i+1}N/N)/(G_iN/N)$$
будут являться циклическими (метациклическими, абелевыми, бициклическими, свободными от четвертых степеней).

Таким образом, условия теоремы переносятся на фактор-группы. Получим оценки π-длины и нильпотентной π-длины. По леммам 1 и 2,
$$O_{\pi'}(G) = \Phi(G) = 1,$$
и в группе G существует единственная минимальная нормальная p-подгруппа F, являющаяся подгруппой Фиттинга группы G, для некоторого $p \in \pi$, совпадающая со своим централизатором и дополняемая в группе G. Ясно, что G_1 является π-группой и $F \le (G_1)_p$ для некоторого $p \in \pi$. Так как по условию $(G_1)_p$ либо бициклическая, либо свободна от четвертых степеней, то по лемме 3 $|F| = p$ или p^2 или p^3.

Если $|F| = p$, то фактор-группа G/F изоморфна подгруппе циклической группы $AutF$, порядок которой равен $p-1$. Теперь группа G сверхразрешима, $l_\pi(G) \le 1$ и $l_\pi^n(G) \le 2$.

Пусть $2 \in \pi$. Тогда G – разрешимая группа. Если $|F| = p^2$, то фактор-группа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2,p)$. Если G/F – сверхразрешимая группа, то по лемме 4 $l_\pi(G/F) \le 1$ и $l_\pi^n(G/F) \le 2$, отсюда $l_\pi(G) \le 2$ и $l_\pi^n(G) \le 3$. Если G/F – несверхразрешимая группа, то по лемме 5 сверхразрешимый корадикал H/F факторгруппы G/F является 2-группой. Учитывая, что $2 \in \pi$ заключаем, что $l_\pi(G) \le 2$ и $l_\pi^n(G) \le 4$.

Если $|F| = p^3$, то факторгруппа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(3,p)$. Если G/F – сверхразрешимая группа, то по лемме 4 $l_\pi(G/F) \le 1$ и $l_\pi^n(G/F) \le 2$, отсюда $l_\pi(G) \le 2$ и $l_\pi^n(G) \le 3$. Если G/F – несверхразрешимая группа, то по лемме 4 сверхразрешимый корадикал H/F факторгруппы G/F является абелевой или 3-замкнутой $\{2,3\}$-группой. Если H/F абелева, то $l_\pi(G) \le 3$ и $l_\pi^n(G/F) \le 4$. Пусть

H/F – 3-замкнутая $\{2,3\}$-группа. Если $3 \in \pi$, то $l_\pi(G) \le 2$ и $l_\pi^n(G) \le 4$. Если $3 \notin \pi$, то $l_\pi(G) \le 3$ и $l_\pi^n(G/F) \le 4$.

Оценки π-длины и нильпотентной π-длины в случаях, когда силовские подгруппы π-факторов являются циклическими, метациклическими, либо бициклическими, легко получить, используя вышеизложенное доказательство.

Из леммы 6 следует, что

$$l_\pi^a(G) \le l_\pi(G)d(G_\pi),$$

где $d(G_\pi)$ – производная длина π-холловой подгруппы G_π группы G. Из лемм 3 и 7 и проведенных выше рассуждений следует, что

– если силовские подгруппы π-факторов являются циклическими, то

$$l_\pi^a(G) \le l_\pi(G)d(G_\pi) \le 1 \cdot 2 = 2;$$

– если силовские подгруппы π-факторов являются метациклическими (бициклическими), то

$$l_\pi^a(G) \le l_\pi(G)d(G_\pi) \le 2 \cdot 5 = 10;$$

– если силовские подгруппы π-факторов являются бициклическими либо свободны от четвертых степеней, то

$$l_\pi^a(G) \le l_\pi(G)d(G_\pi) \le 3 \cdot 6 = 18.$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17М-063).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.

2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 792 s.

3. Carter, R. Extreme Classes of finite soluble groups / R. Carter, B. Fischer, T. Hawkes // J. Algebra. – 1968. – Vol. 9, № 3. – P. 285–313.

4. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – P. 573–581.

5. Грицук, Д. В. О производной π-длине π-разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.

6. Грицук, Д. В. О конечных π-разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1(15). – С. 61–66.

7. Монахов, В. С. О нильпотентной π-длине конечной π-разрешимой группы / В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Дискрет. математика. – 2001. – Т. 13, № 3. – С. 145–152.

8. Monakhov, V. S. On a finite group having a normal series whose factors have bicyclic Sylow subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Communications in algebra. – 2011. – № 39. – P. 3178–3186.

9. Трофимук, А. А. Конечные группы с бициклическими силовскими подгруппами в фиттинговых факторах / А. А. Трофимук // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – № 3 (19). – С. 304–307.

10. Монахов, В. С. О нильпотентной π-длине конечных π-разрешимых групп / В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Дискр. математика. – 2001. – Т. 13, вып. 3. – С. 145–152.

11. Монахов, В. С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская // Мат. заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 21.09.2018

Gritsuk D.V., _Trofimuk A.A._, _Bondaruk T.V._ The Invariants of A π-Soluble Group in which Sylow Subgroups of Factors Have Given Restrictions

We study π-soluble groups in which Sylow subgroups of factors have given restrictions. We obtain the estimates of the π-length, the nilpotent π-length, and the derived π-length for such groups. In particular, if a π-soluble group G has a normal series in which Sylow subgroups of π-factors are cyclic, then the π-length does not exceed 1, and the nilpotent π-length and the derived π-length do not exceed 2. If a π-soluble group G has a normal series in which Sylow subgroups of π-factors are bicyclic and $2 \in \pi$, then the π -length does not exceed 2, the nilpotent π-length does not exceed 4, and the derived π-length does not exceed 10.