

УДК 519.21

**И.Н. Боднарчук**канд. физ.-мат. наук, ведущий инженер-математик  
научно-исследовательской лаборатории

«Дифференциальные уравнения и их применение в механике»

Киевского национального университета имени Тараса Шевченко

e-mail: [ibodnarchuk@univ.kiev.ua](mailto:ibodnarchuk@univ.kiev.ua)**АСИМПТОТИКА МЯГКОГО РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ  
СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ МЕРОЙ**

Исследованы задачи Коши для волнового уравнения с общей стохастической мерой в двух случаях: уравнение задано (1) на прямой и (2) на плоскости. Доказано, что мягкие решения задач стремятся к нулю при неограниченном возрастании абсолютной величины пространственной переменной.

**Введение**

Пусть  $X$  – произвольное множество,  $B(X)$  –  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $X$ ;  $L_0(\Omega, F, P)$  – множество вещественнозначных случайных величин, определенных на полном вероятностном пространстве  $L_0(\Omega, F, P)$ . Сходимость в  $L_0(\Omega, F, P)$  – это сходимость по вероятности. Пусть также  $\mu$  – стохастическая мера на  $B(X)$ , т.е.  $\sigma$  – аддитивное отображение  $\mu: B(X) \rightarrow L_0(\Omega, F, P)$ . В [1] такая  $\mu$  называется общей стохастической мерой. Мы не накладываем на меру  $\mu$  никаких дополнительных условий, кроме  $\sigma$ -аддитивности.

Рассматриваем следующую задачу Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + f(t, x, u(t, x)) + \sigma(t, x) \dot{\mu}(t), \\ u(0, x) = u_0(x); \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = v_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

где  $(t, x) \in [0, T] \times R^d$ ,  $d = 1, 2$ ,  $T > 0$ ,  $a > 0$  и  $\mu$  – стохастическая мера, определенная на борелевской  $\sigma$ -алгебре  $B([0, T])$ .

Мы исследуем мягкое решение задачи (1), т.е. такую измеримую случайную функцию  $u(t, x) = u(t, x, \omega): [0, T] \times R^d \times \Omega \rightarrow R$ , что

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \int_{R^d} S_d(t, x - y) v_0(y) dy + \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{R^d} S_d(t, x - y) u_0(y) dy \right) + \\ & + \int_0^t ds \int_{R^d} S_d(t - s, x - y) f(s, y, u(s, y)) dy + \int_{(0, t]} d\mu(s) \int_{R^d} S_d(t - s, x - y) \sigma(s, y) dy, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $S_d(t, x)$  – фундаментальное решение однородного волнового уравнения:

$$S_1(t, x) = \frac{1}{2a} I_{\{|x| < at\}}, \quad S_2(t, x) = \frac{1}{2a\pi \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} I_{\{|x| < at\}},$$

где  $I_A$  – индикатор множества  $A$ ,  $|\cdot|$  – евклидова норма.

Интегралы от случайных функций по  $dy$  и  $ds$  берутся для каждого фиксированного  $\omega \in \Omega$ . Определение и свойства интегралов по стохастическим мерам представлены в [1; 2].

Мягкие решения уравнений со стохастическими мерами исследованы, например, в работах [3–6]. В [3] доказано существование и единственность мягкого решения (2) для  $d = 1$ , а также получена непрерывность по Гельдеру его траекторий по временной и пространственной переменным, установлена непрерывная зависимость решения от данных задачи. Аналогичная задача для  $d = 2$  исследована в [4].

Асимптотическое поведение мягких решений уравнений теплопроводности со стохастическими мерами рассмотрено в [7–9]. В публикациях [10–11] изучена асимптотика решений волновых уравнений с белым шумом.

Цель данной работы – показать, что при определенных условиях мягкое решение задачи Коши (1) стремится к нулю при неограниченном возрастании абсолютной величины пространственной переменной.

**Дополнительные сведения**

Рассмотрим пространство Бесова  $B_{22}^\alpha([b, c])$ ,  $\alpha \in (1/2, 1)$ , т.е. пространство функций  $g : [b, c] \rightarrow R$ , для которых конечной является норма

$$\|g\|_{B_{22}^\alpha([b, c])} = \|g\|_{L_2([b, c])} + \left( \int_0^{c-b} (w_2(g, r))^2 r^{-2\alpha-1} dr \right)^{1/2},$$

где

$$w_2(g, r) = \sup_{0 \leq h \leq r} \left( \int_b^{c-h} |g(s+h) - g(s)|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Для произвольных  $n \geq 1, 1 \leq k \leq 2^n$  положим  $\Delta_{kn}^{(t)} = ((k-1)2^{-n}t, k2^{-n}t]$ . Пусть функция  $g(z, s) : Z \times [0, t] \rightarrow R$  такова, что для некоторого  $\alpha \in (1/2, 1)$  и для любого  $z \in Z : g(z, \cdot) \in B_{22}^\alpha([0, t])$ . Здесь  $Z$  – произвольное множество. Обозначим

$$g_n(z, s) = g(z, 0)I_{\{0\}}(s) + \sum_{1 \leq k \leq 2^n} g(z, (k-1)2^{-n}t)I_{\Delta_{kn}^{(t)}}(s).$$

Тогда, согласно [5] (лемма 3), случайная функция

$$\eta(z) = \int_{(0, t]} g(z, s) d\mu(s), \quad z \in Z,$$

имеет такую модификацию

$$\tilde{\eta}(z) = \int_{(0, t]} g_0(z, s) d\mu(s) + \sum_{n \geq 1} \left( \int_{(0, t]} g_n(z, s) d\mu(s) - \int_{(0, t]} g_{n-1}(z, s) d\mu(s) \right), \quad (3)$$

что для всех  $\omega \in \Omega, z \in Z$  справедлива оценка

$$|\tilde{\eta}(z)| \leq |g(z, 0)\mu((0, t])| +$$

$$+ \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{n(2\alpha-1)} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |g(z, k2^{-n}t) - g(z, (k-1)2^{-n}t)|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n(2\alpha-1)} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(t)})|^2 \right\}^{1/2}.$$

Определение модификации случайной функции представлено, например, в [12, с. 21]. Тогда, согласно [13] (теорема 1.2):

$$|\tilde{\eta}(z)| \leq |g(z, 0)\mu((0, t])| + C \|g(z, \cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([0, t])} \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n(2\alpha-1)} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(t)})|^2 \right\}^{1/2}. \quad (4)$$

Отметим, что константа  $C$  зависит от  $\alpha, t$  и не зависит от  $z, \omega$ .

### Волновое уравнение на прямой

При  $d = 1$  уравнение (2) принимает вид

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x+at) - u_0(x-at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_0(y) dy + \frac{1}{2a} \int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s, y, u(s, y)) dy + \frac{1}{2a} \int_{(0, t]} d\mu(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s, y) dy. \quad (5)$$

Будем рассматривать следующие предположения.

A1.1. Функции  $u_0(y) = u_0(y, \omega) : R \times \Omega \rightarrow R$  и  $v_0(y) = v_0(y, \omega) : R \times \Omega \rightarrow R$  измеримы и ограничены:  $|u_0(y)| \leq C(\omega)$ ,  $|v_0(y)| \leq C(\omega)$ .

A1.2. Функция  $u_0(y)$  непрерывна по Гельдеру:

$$|u_0(y_1) - u_0(y_2)| \leq C(\omega) |y_1 - y_2|^{\beta(u_0)}, \quad 0 < \beta(u_0) \leq 1.$$

A1.3.  $f(s, y, v) : [0, T] \times R \times R \rightarrow R$  измерима и ограничена:  $|f(s, y, v)| \leq C$ .

A1.4.  $f(s, y, v)$  липшицева по  $v \in R$ :

$$|f(s, y, v_1) - f(s, y, v_2)| \leq C |v_1 - v_2|.$$

A1.5.  $\sigma(s, y) : [0, T] \times R \rightarrow R$  измерима и ограничена:  $|\sigma(s, y)| \leq C$ .

A1.6.  $\sigma(s, y)$  непрерывна по Гельдеру:

$$|\sigma(s_1, y_1) - \sigma(s_2, y_2)| \leq C(|s_1 - s_2|^{\beta(\sigma)} + |y_1 - y_2|^{\beta(\sigma)}), \quad 1/2 < \beta(\sigma) \leq 1.$$

A1.7.  $|u_0(y)| \rightarrow 0$ ,  $|v_0(y)| \rightarrow 0$ ,  $\sup_{s \in [0, T], v \in R} |f(s, y, v)| \rightarrow 0$ ,  $\sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s, y)| \rightarrow 0$

при  $|y| \rightarrow \infty$ .

Здесь и далее будем обозначать через  $C$  и  $C(\omega)$  константы, которые могут быть разными в разных формулах, и точное значение которых не существенно.

**Теорема 1.** Пусть выполнены предположения A1.1.–A1.7. Тогда существует такая модификация решения уравнения (5), что для любых фиксированных  $t \in [0, T]$ ,  $\omega \in \Omega$  имеет место сходимость

$$|u(t, x)| \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** Согласно [3] (теорема 2.1), если выполнены предположения A1.1–A1.6, то для всех  $t \in [0, T]$ ,  $x \in R$  уравнение (5) имеет единственное решение  $u(t, x)$ . Для этого решения имеем

$$|u(t, x)| \leq \frac{1}{2} |u_0(x + at) - u_0(x - at)| + \frac{1}{2a} \left| \int_{x-at}^{x+at} v_0(y) dy \right| + \frac{1}{2a} \left| \int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s, y, u(s, y)) dy \right| + \frac{1}{2a} \left| \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s, y) dy \right| \leq \frac{1}{2} |I_1(t, x)| + \frac{1}{2a} |I_2(t, x)| + \frac{1}{2a} |I_3(t, x)| + \frac{1}{2a} |I_4(t, x)|.$$

Рассмотрим стохастический интеграл  $|I_4(t, x)| = \int_{(0,t]} q(t, x, s) d\mu(s)$ . Пусть  $t \in [0, T], x \in R$  фиксированы. Тогда случайная функция  $\varphi(z) = I_4(t, x), z = (t, x)$  имеет модификацию (3), для которой справедливо неравенство (4). Рассмотрим составные его правой части. Для произвольного  $s \leq t$  оценим  $|q(t, x, s)|$ .

Согласно предположению A1.7, имеем, что для любого  $\varepsilon_0 > 0$  существует такое число  $\delta_0 > 0$ , что  $\forall |y| > \delta_0$ :

$$|u_0(y)| < \varepsilon_0, \quad |v_0(y)| < \varepsilon_0, \quad \sup_{s \in [0, T], v \in R} |f(s, y, v)| < \varepsilon_0, \quad \sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s, y)| < \varepsilon_0. \quad (6)$$

Тогда  $\forall s \leq t, \forall |x| > \delta_0 + aT$  по теореме о среднем существует такая точка  $y_0 \in [x - a(t - s), x + a(t - s)]$ , что

$$|q(t, x, s)| = \left| \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s, y) dy \right| = 2a(t-s) |\sigma(s, y_0)| \leq 2aT \sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s, y_0)| < 2aT\varepsilon_0 = C\varepsilon_0, \quad (7)$$

где мы применили теорему о трех последовательностях и A1.7.

Таким образом,

$$|q(t, x, 0)| < C\varepsilon_0, \quad \|q(t, x, 0)\|_{L_2(B_{22}^a([0, t]))} = \left( \int_0^t |q(t, x, s)|^2 ds \right)^{1/2} < C\varepsilon_0.$$

Далее оценим норму  $\|q(t, x, \cdot)\|_{B_{22}^a([0, t])}$ . Для этого рассмотрим величину  $|q(t, x, s + h) - q(t, x, s)|$ . Согласно A1.5 – A1.6, имеем

$$\begin{aligned} |q(t, x, s + h) - q(t, x, s)| &= \left| \int_{x-a(t-s-h)}^{x+a(t-s-h)} \sigma(s + h, y) dy - \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s, y) dy \right| = \\ &= \left| \int_{x-a(t-s-h)}^{x+a(t-s-h)} (\sigma(s + h, y) - \sigma(s, y)) dy - \int_{x-a(t-s)}^{x-a(t-s-h)} \sigma(s, y) dy - \int_{x+a(t-s-h)}^{x+a(t-s)} \sigma(s, y) dy \right| \leq \\ &\leq Ch^{\beta(\sigma)} 2a(t-s-h) + 2C2ah \leq Ch^{\beta(\sigma)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$w_2(q(t, x, \cdot), r) = \sup_{0 \leq h \leq r} \left( \int_0^t |q(t, x, s + h) - q(t, x, s)|^2 ds \right)^{1/2} \leq Cr^{\beta(\sigma)} \sqrt{t} \leq Cr^{\beta(\sigma)}. \quad (8)$$

С другой стороны, за (7) для  $s + h \leq t$ :

$$|q(t, x, s+h) - q(t, x, s)| \leq |q(t, x, s+h)| + |q(t, x, s)| < C\varepsilon_0,$$

и поэтому

$$w_2(q(t, x, \cdot), r) < C\varepsilon_0 \sqrt{t} \leq C\varepsilon_0. \quad (9)$$

Перемножим неравенства (8) и (9), возведенные в степени  $\theta$  и  $1-\theta$  соответственно, где  $\theta \in (0,1)$  – произвольное. Имеем

$$w_2(q(t, x, \cdot), r) < Cr^{\theta\beta(\sigma)} \varepsilon_0^{1-\theta}.$$

Тогда существует такое  $\alpha < \theta\beta(\sigma)$ , что

$$\|q(t, x, \cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([0, t])} < C\varepsilon_0 + C\varepsilon_0^{1-\theta} \left( \int_0^t r^{2\theta\beta(\sigma)-2\alpha-1} dr \right)^{1/2} \leq C(\varepsilon_0 \vee \varepsilon_0^{1-\theta}),$$

где  $a \vee b$  – максимум чисел  $a$  и  $b$ .

Таким образом,

$$|I_4(t, x)| < C(\varepsilon_0 \vee \varepsilon_0^{1-\theta}) \left( |\mu((0, t])| + \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n(2\alpha-1)} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(t)})|^2 \right\}^{1/2} \right) \leq C(\omega)(\varepsilon_0 \vee \varepsilon_0^{1-\theta}),$$

где в последнем неравенстве мы использовали [6] (лемма 3.1).

Кроме того, для любого  $|x| > \delta_0 + aT$ , согласно (6) и A1.1,

$$|I_1(t, x)| = |u_0(x+at) - u_0(x-at)| < 2\varepsilon_0,$$

и аналогично доказательству неравенства (7) устанавливаем оценку

$$|I_2(t, x)| = 2at |v_0(y_1)| < C\varepsilon_0,$$

для произвольного  $|x| > \delta_0 + aT$  и некоторого  $y_1 \in [x-at, x+at]$ .

Также аналогично получаем, что для любого  $|x| > \delta_0 + aT$

$$|I_3(t, x)| \leq \sup_{s \in [0, T], v \in R} |f(s, y, v)| \int_0^t 2a(t-s) ds < \varepsilon_0 at^2 \leq C\varepsilon_0.$$

Для произвольного  $\varepsilon > 0$  положим в (6)  $\varepsilon_0 = \varepsilon C^{-1}(\omega)$  при  $\varepsilon \geq 1$  и  $\varepsilon_0 = \varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}} C^{-1}(\omega)$  при  $\varepsilon < 1$ . Таким образом, существует такое множество  $\Omega_0 \subset \Omega$ ,  $P(\Omega_0) = 1$ , что для любых фиксированных  $t \in [0, T]$ ,  $\omega \in \Omega_0$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_0 + aT \quad \forall |x| > \delta: |u(t, x)| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

### Волновое уравнение на плоскости

Рассмотрим теперь случай  $d = 2$ . Положим для  $x \in R^2$  и  $r > 0$ :  $B(x, r) = \{y \in R^2 : |x - y| < r\}$  – шар в  $R^2$ ,  $\bar{B}(x, r)$  – его замыкание.

Уравнение (2) принимает следующий вид

$$\begin{aligned}
 u(t, x) = & \frac{1}{2a\pi} \int_{B(x, at)} \frac{v_0(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - y|^2}} dy + \frac{1}{2a\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{B(x, at)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - y|^2}} dy \right) + \\
 & + \frac{1}{2a\pi} \int_0^t ds \int_{B(x, a(t-s))} \frac{f(s, y, u(s, y))}{\sqrt{a^2 (t-s)^2 - |x - y|^2}} dy + \\
 & + \frac{1}{2a\pi} \int_{(0, t]} d\mu(s) \int_{B(x, a(t-s))} \frac{\sigma(s, y)}{\sqrt{a^2 (t-s)^2 - |x - y|^2}} dy. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Будем рассматривать следующие предположения.

A2.1. Функции  $u_0(y) = u_0(y, \omega) : R^2 \times \Omega \rightarrow R$  и  $v_0(y) = v_0(y, \omega) : R^2 \times \Omega \rightarrow R$  измеримы и ограничены:  $|u_0(y)| \leq C(\omega)$ ,  $|v_0(y)| \leq C(\omega)$ .

A2.2.  $v_0(y), u_0(y), \frac{\partial u_0(y)}{\partial y_i}, i = 1, 2$ , непрерывны по Гельдеру:

$$|v_0(y') - v_0(y'')| \leq C(\omega) |y' - y''|^{\beta(v_0)}, \quad 0 < \beta(v_0) \leq 1;$$

$$|u_0(y') - u_0(y'')| \leq C(\omega) |y' - y''|^{\beta(u_0)}, \quad 0 < \beta(u_0) \leq 1;$$

$$\left| \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y') - \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y'') \right| \leq C(\omega) |y' - y''|^{\beta(u_0)}.$$

A2.3.  $f(s, y, v) : [0, T] \times R^2 \times R \rightarrow R$  измерима и ограничена:  $|f(s, y, v)| \leq C$ .

A2.4.  $f(s, y, v)$  липшицева по  $y \in R^2, v \in R$ :

$$|f(s, y', v') - f(s, y'', v'')| \leq C(|y' - y''| + |v' - v''|).$$

A2.5.  $\sigma(s, y) : [0, T] \times R^2 \rightarrow R$  измерима и ограничена:  $|\sigma(s, y)| \leq C$ .

A2.6.  $\sigma(s, y)$  непрерывна по Гельдеру:

$$|\sigma(s', y') - \sigma(s'', y'')| \leq C(|s' - s''|^{\beta(\sigma)} + |y' - y''|^{\beta(\sigma)}), \quad 1/2 < \beta(\sigma) \leq 1.$$

A2.7.  $|u_0(y)| \rightarrow 0, \left| \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y) \right| \rightarrow 0, |v_0(y)| \rightarrow 0, \sup_{s \in [0, T], v \in R} |f(s, y, v)| \rightarrow 0,$

$\sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s, y)| \rightarrow 0$  при  $|y| \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены предположения A2.1.–A2.7. Тогда существует такая модификация решения уравнения (10), что для любых фиксированных  $t \in [0, T], \omega \in \Omega$  имеет место сходимость

$$|u(t, x)| \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** Согласно [4] (теорема 2.1), если выполнены предположения A1.1–A1.6, то для всех  $t \in [0, T], x \in R^2$  уравнение (10) имеет единственное решение  $u(t, x)$ . Для этого решения

$$\begin{aligned}
 |u(t, x)| = & \frac{1}{2a\pi} \left| \int_{B(x, at)} \frac{v_0(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - y|^2}} dy \right| + \frac{1}{2a\pi} \left| \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{B(x, at)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - y|^2}} dy \right) \right| + \\
 & + \frac{1}{2a\pi} \left| \int_0^t ds \int_{B(x, a(t-s))} \frac{f(s, y, u(s, y))}{\sqrt{a^2 (t-s)^2 - |x - y|^2}} dy \right| +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2a\pi} \left| \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{B(x,a(t-s))} \frac{\sigma(s,y)}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}} dy \right| = \\
& = \frac{1}{2a\pi} |J_1(t,x)| + \frac{1}{2a\pi} |J_2(t,x)| + \frac{1}{2a\pi} |J_3(t,x)| + \frac{1}{2a\pi} |J_4(t,x)|. \quad (11)
\end{aligned}$$

Аналогічна доказательству теоремы 1, рассмотрим стохастический интеграл  $J_4(t,x) = \int_{(0,t]} \hat{q}(t,x,s) d\mu(s)$ . Пусть  $t \in [0, T]$ ,  $x \in R^2$  фиксированы. Тогда случайная функция  $\psi(z) = J_4(t,x)$ ,  $z = (t,x)$  имеет модификацию (3), для которой справедливо неравенство (4). Для произвольного  $s \leq t$  оценим  $|\hat{q}(t,x,s)|$ .

Согласно с A2.7, имеем, что  $\forall \varepsilon_* > 0 \exists \delta_* > 0 \forall |y| > \delta_*$ :

$$|u_0(y)| < \varepsilon_*, \quad \left| \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y) \right| < \varepsilon_*, \quad |v_0(y)| < \varepsilon_*, \quad \sup_{s \in [0, T], v \in R} |f(s,y,v)| < \varepsilon_*, \quad \sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s,y)| < \varepsilon_*. \quad (12)$$

Тогда, выполнив в интеграле  $\hat{q}(t,x,s)$  замену переменных

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 - r(t-s) \cos \varphi \\
y_2 &= x_2 - r(t-s) \sin \varphi, \quad r \in (0, 2\pi), \varphi \in (0, a),
\end{aligned}$$

получаем

$$\hat{q}(t,x,s) = (t-s) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\sigma(s, x_1 - r(t-s) \cos \varphi, x_2 - r(t-s) \sin \varphi)}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr.$$

Теперь выполняем замену  $v = \sqrt{a^2 - r^2}$ :

$$\begin{aligned}
|\hat{q}(t,x,s)| &= (t-s) \left| \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sigma(s, x_1 - \sqrt{a^2 - v^2}(t-s) \cos \varphi, x_2 - \sqrt{a^2 - v^2}(t-s) \sin \varphi) dv \right| = \\
&= 2a\pi(t-s) |\sigma(s, y_*)| \leq 2a\pi T \sup_{s \in [0, T]} |\sigma(s, y_*)| < 2a\pi T \varepsilon_* \leq C\varepsilon_*, \quad (13)
\end{aligned}$$

где  $y_* \in \bar{B}(x, a(t-s))$ ,  $|x| > \delta_* + aT$ . Мы применили теорему о среднем, теорему о трех последовательностях и неравенство (12).

Следовательно,

$$|\hat{q}(t,x,0)| < C\varepsilon_*, \quad \|\hat{q}(t,x,0)\|_{L_2([0,t])} = \left( \int_0^t |\hat{q}(t,x,s)|^2 ds \right)^{1/2} < C\varepsilon_*.$$

Оценим норму  $\|\hat{q}(t,x,\cdot)\|_{B_{22}^c([0,t])}$ . В силу A2.5 – A2.6 имеем

$$\begin{aligned}
& |\hat{q}(t,x,s+h) - \hat{q}(t,x,s)| = \\
& = \left| (t-s-h) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sigma(s, x_1 - \sqrt{a^2 - v^2}(t-s-h) \cos \varphi, x_2 - \sqrt{a^2 - v^2}(t-s-h) \sin \varphi) dv - \right. \\
& \left. - (t-s) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sigma(s, x_1 - \sqrt{a^2 - v^2}(t-s) \cos \varphi, x_2 - \sqrt{a^2 - v^2}(t-s) \sin \varphi) dv \right| \leq
\end{aligned}$$

$$\leq C2a\pi h + Ch^{\beta(\sigma)}(t-s)\frac{a^2\pi^2}{2} \leq Ch^{\beta(\sigma)}.$$

Далее, аналогично доказательству теоремы 1 получаем

$$\|\hat{q}(t, x, \cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([0, t])} < C\varepsilon_* + C\varepsilon_*^{1-\rho} \left( \int_0^t r^{2\rho\beta(\sigma)-2\alpha-1} dr \right)^{1/2} \leq C(\varepsilon_* \vee \varepsilon_*^{1-\rho}),$$

где  $\rho \in (0, 1)$  – произвольное, и найдется соответствующее  $\alpha < \rho\beta(\sigma)$ .

Таким образом,

$$|J_4(t, x)| < C(\varepsilon_* \vee \varepsilon_*^{1-\rho}) \left( |\mu((0, t])| + \left\{ \sum_{n \geq 1} 2^{-n(2\alpha-1)} \sum_{1 \leq k \leq 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(t)})|^2 \right\}^{1/2} \right) \leq C(\omega)(\varepsilon_* \vee \varepsilon_*^{1-\rho}),$$

где в последнем неравенстве мы также использовали [6] (лемма 3.1).

Теперь рассмотрим остальные слагаемые (11). Аналогично (13) получаем

$$|J_1(t, x)| = t \left| \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a v_0(x_1 - \sqrt{a^2 - v^2} t \cos \varphi, x_2 - \sqrt{a^2 - v^2} t \sin \varphi) dv \right| = 2a\pi |v_0(y_{**})| < C\varepsilon_*,$$

где  $y_{**}$  – элемент множества  $\bar{B}(x, a(t-s))$ , а  $|x| > \delta_* + aT$ .

Рассмотрим  $J_2(t, x)$ . В [4] при доказательстве теоремы 2.1 было получено следующее. Поскольку

$$\int_{B(x, at)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-y|^2}} dy = t \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a u_0(x_1 - \sqrt{a^2 - v^2} t \cos \varphi, x_2 - \sqrt{a^2 - v^2} t \sin \varphi) dv,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{B(x, at)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-y|^2}} dy \right) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a u_0(x_1 - \sqrt{a^2 - v^2} t \cos \varphi, x_2 - \sqrt{a^2 - v^2} t \sin \varphi) dv + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\partial u_0}{\partial t}(x_1 - \sqrt{a^2 - v^2} t \cos \varphi, x_2 - \sqrt{a^2 - v^2} t \sin \varphi) dv. \end{aligned}$$

Поэтому, аналогично предыдущему,  $\forall |x| > \delta_* + aT$ :

$$|J_2(t, x)| < C\varepsilon_*, \text{ а также } |J_3(t, x)| < C\varepsilon_*.$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  положим в (6)  $\varepsilon_* = \varepsilon C^{-1}(\omega)$  при  $\varepsilon \geq 1$ , и  $\varepsilon_* = \varepsilon^{\frac{1}{1-\rho}} C^{-1}(\omega)$  при  $\varepsilon < 1$ . Тогда существует множество  $\Omega_* \subset \Omega, P(\Omega_*) = 1$  такое, что для любых фиксированных  $t \in [0, T], \omega \in \Omega_*$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_* + aT \quad \forall |x| > \delta: |u(t, x)| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

### Заклученне

Рассмотрено мягкое решение задачи Коши для волнового уравнения, управляемого общей стохастической мерой. Доказано, что при определенных условиях решение стремится к нулю, если абсолютная величина пространственной переменной стремится к бесконечности.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kwapień, S. Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple / S. Kwapień, W. A. Wołczyński. – Boston : Birkhäuser, 1992. – 360 p.
2. Радченко, В. Н. Интегралы по общим случайным мерам / В. Н. Радченко // Тр. Ин-та математики НАН Украины. – 1999. – Т. 27. – 196 с.
3. Bodnarchuk, I. M. Wave equation with a stochastic measure / I. M. Bodnarchuk // Theory Probab. Math. Statist. – 2017. – Vol. 94. – P. 1–16.
4. Боднарчук, И. Н. Волновое уравнение на плоскости, управляемое общей стохастической мерой / И. Н. Боднарчук, В. Н. Радченко // Теория вероятности. Мат. статистика. – 2018. – Вып. 1 (98). – С. 70–86.
5. Radchenko, V. M. Evolution equations driven by general stochastic measures in Hilbert space / V. M. Radchenko // Theory Probab. Appl. – 2015. – Vol. 59. – P. 328–339.
6. Radchenko, V. Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure / V. Radchenko // Studia Math. – 2009. – Vol. 194, № 3. – P. 231–251.
7. Боднарчук, И. Н. Асимптотическое поведение решения уравнения теплопроводности со стохастической мерой / И. Н. Боднарчук, В. Н. Радченко // Науч. вестн. Черновиц. ун-та. Математика. – 2012. – Т. 2, № 1. – С. 7–11.
8. Боднарчук, И. Асимптотическое поведение мягкого решения стохастического уравнения теплопроводности / И. Боднарчук // Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика. – 2016. – Вып. 2 (36). – С. 40–42.
9. Радченко, В. Н. Асимптотическое поведение решения уравнения теплопроводности со стохастической мерой при  $|t| \rightarrow \infty$  / В. Н. Радченко // Науч. вестн. Ужгород. ун-та. – 2012. – Вып. 23, № 1. – С. 119–124.
10. Yang, M. Asymptotic behavior of solutions for random wave equations with nonlinear damping and white noise / M. Yang, J. Duan, P. Kloeden // Nonlinear Anal. RWA. – 2011. – Vol. 12, № 1. – P. 464–478.
11. Chen, L. Moment bounds and asymptotics for the stochastic wave equation / L. Chen, R. C. Dalang // Stoch. Process. Appl. – 2015. – Vol. 125. – P. 1605–1628.
12. Theory of Stochastic Processes: With Applications to Financial Mathematics and Risk Theory / D. Gusak [et al.] // Problem Books in Mathematics. – New York : Springer Science & Business Media, 2010. – 376 p.
13. Kamont, A. A discrete characterization of Besov spaces / A. Kamont // Approx. Theory Appl. – 1997. – Vol. 13, № 2. – P. 63–77.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.08.2018

#### ***Bodnarchuk I.M. Asymptotics of the Mild Solution for the Wave Equation with a Stochastic Measure***

*The Cauchy problem for the wave equation with a general stochastic measure is investigated in two cases: the equation is given (1) on the line and (2) on the plane. We prove that the mild solutions tend to zero as the spatial variable tends to infinity.*