МАТЭМАТЫКА

УДК 517.9

Екатерина Васильевна Пантелеева
канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. фундаментальной математики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Katsiaryna Pantsialeyeva
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: panteleevaEV@tut.by

УСЛОВИЯ ОБРАТИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА, ЗАДАННЫХ МАТРИЦАМИ ВЕРХНЕТРЕУГОЛЬНОГО ВИДА, В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ $l_2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^3)$

Получены условия обратимости оператора взвешенного сдвига в пространстве вектор-функций $l_2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^3)$, заданного матрицей верхнетреугольного вида, и построен проектор Рисса при спектральных значениях $\frac{1}{2} < |\lambda| < 2$.

Ключевые слова: *операторы взвешенного сдвига, резольвента, проектор Рисса.*

Conditions for Invertibility of Weighted Shift Operators Specified by Matrices of Upper Triangular View in the Space of Vector of Functions $l_2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^3)$

In this article, conditions for the invertibility of the weighted shift operator in the space of vector functions $l_2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^3)$ defined by an upper triangular matrix are obtained and the Riesz projector is constructed for spectral values $\frac{1}{2} < |\lambda| < 2$.

Key words: *weighted shift operators, resolvent, Riesz projector.*

Введение

Выбор объекта исследования обусловлен рядом исследований обратимости операторов $B - \lambda I$ при спектральных значениях λ. Этот вопрос представляет интерес в связи с исследованием функциональных уравнений вида $(T - \lambda I)u = f$.

Целью исследования является получение условий обратимости операторов взвешенного сдвига в пространстве вектор-функций $l_2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^3)$ и построение в явном виде резольвенты и проектора Рисса.

Основная часть

Рассмотрим пространство:

$$l_2(Z,\mathbb{C}^3) = \{u = u(k): k \in Z, u(k) \in \mathbb{C}^3, \sum_{-\infty}^{+\infty} \|u(k)\|^2 < +\infty\}.$$

Оператор взвешенного сдвига T имеет вид:

$$(Tu)(k) = A(k)u(k+1),$$

где матрица $A(k) \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

Определим матрицу A следующим образом: для $k \neq 0$ $A(k) = diag\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right\}$, а для $k = 0$

$$A(0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Пусть обратная матрица $A^{-1}(0)$ при $k=0$ имеет вид:

$$A^{-1}(0)=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение. Оператор B называется гиперболическим, если $\sigma(B)\cap\mathbb{S}^1=\emptyset$, где $\mathbb{S}^1=\{\lambda:|\lambda|=1\}$ – единичная окружность [1].

В случае гиперболического оператора спектр не пересекается с единичной окружностью $\mathbb{S}^1$, поэтому определен проектор Рисса

$$P=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}R(\lambda,B)\,d\lambda.$$

Определение. Резольвентой $R(\lambda,B)$ оператора B называется функция $R(\lambda,B)=(B-\lambda I)^{-1}$, определенная на резольвентном множестве $\rho(A)$ [2].

Это аналитическая функция комплексной переменной λ, значениями которой являются ограниченные линейные операторы.

Предложение 1. Если обратимый оператор B является гиперболическим, то резольвента в окрестности единичной окружности разлагается в операторный ряд Лорана

$$(B-\lambda I)^{-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k B^{-k-1}(I-P)-\sum_{-\infty}^{-1}\lambda^k B^{-k-1}P.$$

На основании предложения 1 при спектральных значениях $|\lambda|>2$ резольвента разлагается в ряд с положительными степенями оператора T:

$$R_\lambda=-\frac{1}{\lambda}I-\frac{1}{\lambda^2}T-\frac{1}{\lambda^3}T^2-\cdots$$

Для $|\lambda|<\frac{1}{2}$ резольвента может быть определена в виде ряда с отрицательными степенями оператора T:

$$R_\lambda=T^{-1}(I+\lambda T^{-1}+\lambda^2T^{-2}+\lambda^3T^{-3}).$$

Найдём условия, при которых резольвента определена для спектральных значений $\frac{1}{2}<|\lambda|<2$. При этом ядро оператора $ker(T-\lambda)=\{0\}$, а это равносильно тому, что однородное уравнение $(T-\lambda I)u=0$ имеет только нулевое решение. Для этого решим однородное уравнение $(T-\lambda I)u=0$, а это равносильно $(Tu)(k)=\lambda u(k)$. С помощью данного уравнения выведем формулы для $u(k)$:

$$u(k)=\begin{cases}\lambda^k\prod_{i=0}^{k-1}A^{-1}(i)u(0), & \text{для } k>0;\\ \dfrac{\prod_{i=k}^{-1}A(i)}{\lambda^k}u(0), & \text{для } k<0.\end{cases}$$

Пусть вектор $u(0)=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}$, тогда в случае $k<0$ $u(k)$ имеет вид:

$$u(k)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2^{|k|}\lambda^{|k|}}\\ \frac{1}{2^{|k|}\lambda^{|k|}}\\ \frac{2^{|k|}}{\lambda^{|k|}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix} \tag{1}$$

И при $k \to \infty$ $\xi_3 \neq 0$ последовательность $\frac{2^{|k|}{}_{\xi_3}}{\lambda^{|k|}} \to \infty$ и не принадлежит $l_2(Z, \mathbb{C}^{\mathbf{3}})$.

При $k > 0$:

$$u(k) = \lambda^k \begin{pmatrix} 2^{k-1}(b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 + b_{13}\xi_3) \\ 2^{k-1}(b_{22}\xi_2 + b_{23}\xi_3) \\ \frac{1}{2^{k-1}} b_{33}\xi_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

При $\xi_1 \neq 0$ $\xi_2 \neq 0$ вектор $u(k)$ не принадлежит пространству $l_2(Z, \mathbb{C}^{\mathbf{3}})$ при $|\lambda| > \frac{1}{2}$.

Лемма 1. При $\frac{1}{2} < |\lambda| < 2$ уравнение $(T - I)u = 0$ в пространстве $l_2(Z, \mathbb{C}^{\mathbf{3}})$ имеет только нулевое решение тогда и только тогда, когда $b_{11}b_{22} \neq 0$.

Теорема 1. Оператор $T - \lambda I$ оператором Фредгольма тогда и только тогда, когда $|\lambda| \neq \frac{1}{2}$ и $|\lambda| \neq 2$. Тогда: $ind(T - \lambda I) = 0$.

Из леммы 1 и теоремы 1 получим:

Утверждение 1. Если $b_{11}b_{22} \neq 0$, то оператор $T - \lambda I$ обратимый для $\frac{1}{2} < |\lambda| < 2$.

Это означает, что оператор $T - \lambda I$ гиперболический и резольвента имеет следующий вид:

$$R_\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k T^{-k-1}(I - P) - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k T^{-k+1} P,$$

где P – проектор Рисса.

Построим проектор Рисса в рассматриваемом случае. Пусть произвольный проектор в точке $k = 0$ в пространстве $l_2(Z, \mathbb{C}^{\mathbf{3}})$ имеет следующий вид:

$$P(0) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}.$$

Для проектора $P(0)$ должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} P(0)V_0^+ = 0 \\ P(0)v = v \text{ для любого } v \in V^-. \end{cases}$$

$V^- = \{\xi \in \mathbb{C}^3 | \xi_3 = 0\}$ получено из (1), $V^+ = \left\{\xi \in \mathbb{C}^3 \middle| \xi = \left(q_1\xi_{3,} q_2\xi_{3,} \xi_3\right)\right\}$ получено из (2), где $q_1 = \frac{a_{23} - a_{23}a_{12} + a_{13}a_{22}}{a_{22}a_{33}}$ и $q_2 = \frac{a_{23}}{a_{33}}$.

С учетом всех условий получим проектор $P(0)$ для нашего случая:

$$P(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -q_1 \\ 0 & 1 & -q_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя условия перестановочности проектора и оператора P, а также то, что проектор $P(0)$ является оператором умножения на матричную последовательность $\{P(k)\}$, получаем вид проектора:

$$1) \text{ при } k < 0 \ P(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2^{2k}q_1 \\ 0 & 1 & -2^{2k}q_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2)\ \text{при}\ k > 0\ P(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{2k-2}s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $s = 2a_{12}a_{23} - a_{23}$.

Заключение

Полученные в статье результаты являются новыми. Принципиально новыми в работе являются условия обратимости операторов взвешенного сдвига, заданных последовательностью матриц специального вида в пространстве вектор-функций $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^3)$ и построенный в явном виде проектор Рисса.

Полученные результаты могут быть применены при исследовании свойств динамических систем и использованы в образовательном процессе на спецкурсах по математическим дисциплинам, а также при написании курсовых, дипломных, магистерских работ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Антоневич, А. Б. Когерентная локальная гиперболичность линейного расширения / А. Б. Антоневич // Функционал. анализ и его прил. – 2005. – Т. 39, вып. 1. – С. 52–69.

2. Antonevich, A. Right-Side Hyperbolic Operators / A. Antonevich, E. V. Panteleeva // State university of Novi Pazar. – 2014. – Vol. 6, № 12. – P. 1–9.

REFERENCES

1. Antonievich, A. B. Kogierientnaja lokal'naja giperbolichnost' liniejnogo rasshirienija / A. B. Antonievich // Funkctional. analiz i jego pril. – 2005. – T. 39, vyp. 1. – S. 52–69.

2. Antonevich, A. Right-Side Hyperbolic Operators / A. Antonevich, E. V. Panteleeva // State university of Novi Pazar. – 2014. – Vol. 6, № 12. – P. 1–9.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 18.04.2024