УДК 539.122, 539.125, 539.128.2

А.И. Фикс[1], М.И. Левчук[2], А.И. Львов[3]

[1]*д-р физ.-мат. наук, проф. Томского политехнического университета (Россия)*

[2]*д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института физики Национальной академии наук Республики Беларусь*

[3]*канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, зав. отделом физики высоких энергий Физического института Российской академии наук*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО СЕЧЕНИЯ ФОТОПОГЛОЩЕНИЯ НА НЕЙТРОНЕ ИЗ ПРОТОННЫХ И ДЕЙТРОННЫХ ДАННЫХ В ОБЛАСТИ ЭНЕРГИЙ ОТ 700 ДО 1 500 МЭВ II. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА И АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ*

Развит метод решения интегрального уравнения Фредгольма для нахождения суммы полного сечения фотопоглощения на свободных нуклонах. На основе физически обоснованного предположения о том, что такие сечения могут быть аппроксимированы суммой нескольких брейт-вигнеровских резонансов с добавлением гладкого фона, профитированы имеющиеся экспериментальные данные. Получены соотношения для оценки неопределенностей в сечениях, извлекаемых из этих фитов. В рамках развитого метода проанализированы имеющиеся данные по полным сечениям фотопоглощения на протоне и дейтроне, полученные на установке GRAAL и в Daresbury, и получены соответствующие сечения на нейтроне.

Введение

Хорошо известно, что из-за отсутствия плотной стабильной нейтронной мишени информация о свойствах нейтрона и различных процессах с его участием извлекается в основном из данных на дейтроне с привлечением, если требуется, данных на свободных протонах. В работе [1] нами был исследован вопрос извлечения полного сечения фотопоглощения на нейтроне из соответствующих протонных и дейтронных сечений. Было показано, что общее соотношение между полными сечениями фотопоглощения на дейтроне и свободных нуклонах $\sigma_d(\omega), \sigma_p(\omega)$ и $\sigma_n(\omega)$ при энергии фотона ω имеет вид интегрального уравнения типа Фредгольма относительно суммы сечений $\sigma_p(\omega) + \sigma_n(\omega)$

$$\sigma_d(\omega) = F[\sigma_p(\omega) + \sigma_n(\omega)] + \Delta\sigma_{pn}(\omega). \quad (1)$$

Здесь F есть оператор, который размазывает нуклонные сечения в соответствии с Ферми-движением нуклонов в дейтроне, и имеет следующий вид

$$F\sigma_N(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(p_z) \frac{\omega^{\text{eff}}}{\omega} \sigma_N(\omega^{\text{eff}})\, dp_z, \quad (2)$$

где

$$\omega^{\text{eff}} = \omega \left(1 - \frac{p_z}{M}\right) \quad (3)$$

есть эффективная (сдвинутая из-за эффекта Доплера) энергия фотона для движущегося нуклона с массой M, когда его продольная компонента (вдоль направления фотонного пучка) равна p_z, а функция $W(p_z)$ является распределением этой компоненты импульса

***Работа поддержана в рамках Государственного задания ВУЗам «Наука» (3.1113.2017), грантом Ф14–035 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и программой «Физика элементарных частиц и фундаментальная ядерная физика» Российской академии наук.**

нуклонов в дейтроне

$$W(p_z) = \int |\psi(p)|^2 \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^3}, \tag{4}$$

нормированная как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(p_z) dp_z = 1. \tag{5}$$

Аналитическое выражение для $W(p_z)$ в случае хюльтеновской дейтронной волновой функции [2] приведено в работе [1].

Наконец, слагаемое $\Delta\sigma_{pn}(\omega)$ в соотношении (1) учитывает различные эффекты, которые нарушают аддитивность сечений фотопоглощения на отдельных нуклонах. Оно также было вычислено в работе [1].

Таким образом, наша задача состоит в решении интегрального уравнения (1) и нахождении суммы свободных сечений $\sigma(\omega) = \sigma_p(\omega) + \sigma_n(\omega)$, которая в работе [3] называется «неразмазанным дейтронным сечением».

Устранение «размазки»

Известно, что решение для функции $\sigma(\omega)$ не может быть однозначно найдено без дальнейших предположений о свойствах этой функции.

В частности, невозможно восстановить быстрые флуктуации в $\sigma(\omega)$ на энергетическом масштабе $\Delta\omega^{\text{eff}} = \omega \langle p_z^2 \rangle^{1/2} / M$. Например, для хюльтеновской волновой функции $\langle p_z^2 \rangle^{1/2} = 53{,}9$ МэВ/c, так что $\Delta\omega^{\text{eff}} = 0{,}57\,\omega$.

Далее мы делаем физически обоснованное предположение о том, что сечения $\sigma_p(\omega)$ и $\sigma_n(\omega)$ могут быть аппроксимированы суммой нескольких брейт-вигнеровских резонансов (имеющих фиксированные массы и ширины, но неизвестные амплитуды, вообще говоря, разные для протона и нейтрона) плюс гладкий фон. Таким образом, имеем

$$\sigma(\omega) = \sum_i Z_i \, f_i(\omega), \tag{6}$$

где функции $f_i(\omega)$ составляют базис разложения с неизвестными коэффициентами Z_i. Следуя работам [3; 4], мы используем функции $f_i(\omega)$ для брейт-вигнеровских резонансов в разложении (6) в виде

$$f_i(\omega) = \left(\frac{k_r}{k}\right)^2 \frac{W_r^2 \Gamma \Gamma_\gamma}{(W^2 - W_r^2)^2 + W_r^2 \Gamma^2}, \tag{7}$$

где

$$\Gamma = \Gamma_r \left(\frac{q}{q_r}\right)^{2l+1} \left(\frac{q_r^2 + X^2}{q^2 + X^2}\right)^l, \quad \Gamma_\gamma = \Gamma_r \left(\frac{k}{k_r}\right)^{2j_\gamma} \left(\frac{k_r^2 + X^2}{k^2 + X^2}\right)^{j_\gamma}. \tag{8}$$

Здесь $W = \sqrt{M^2 + 2M\omega}$ – полная энергия в системе центра масс; k and q – импульсы фотона и рожденного пиона в с.ц.м. при энергии W, а индекс r относится к резонансному значению энергии; j_γ и l – угловые моменты фотона и пиона [4,5]; параметр X брался равным 350 МэВ для всех включаемых в рассмотрение резонансов.

Так как в нашем анализе мы ограничиваемся областью энергий ω от 700 до 1 500 MeV, то оказывается, что хороший фит данных из Daresbury [3; 6] и GRAAL [7] можно получить, включая в (6) только два резонанса, а именно $D_{13}(1520)$ и $F_{15}(1680)$.

Для масс и ширин этих резонансов мы использовали центральные значения из компиляции PDG2014 [8], а именно $W_r = 1515$ МэВ и $\Gamma_r = 115$ МэВ для $D_{13}(1520)$ резонанса и $W_r = 1685$ МэВ и $\Gamma_r = 130$ МэВ для $F_{15}(1680)$ резонанса.

Что касается фонового вклада, то мы снова следуем работам [3; 6] и используем функции $f_i(\omega)$ в форме W^n с целым n. Оказывается, что для фита достаточно оставить только три слагаемых с $n = 0,1$ и 2.

Таким образом, мы фитируем дейтронные данные с помощью соотношений (1) и (6) с пятью параметрами Z_i и находим «неразмазанное» дейтронное сечение $\sigma(\omega) = \sigma_p(\omega) + \sigma_n(\omega)$. Ошибка в найденном сечении может быть определена через флуктуации в сечении $\sigma(\omega)$

$$\delta\sigma(\omega) = \sum_i \delta Z_i \, f_i(\omega). \tag{9}$$

Тогда

$$\delta\sigma^2(\omega) = \sum_{ij} \delta Z_i \, \delta Z_j \, f_i(\omega) f_j(\omega) \tag{10}$$

и, наконец,

$$< \delta\sigma^2(\omega) >= \sum_{ij} C_{ij} \, f_i(\omega) f_j(\omega), \tag{11}$$

где

$$C_{ij} =< \delta Z_i \, \delta Z_j > \tag{12}$$

есть стандартная ковариационная матрица ошибок, найденных при фите Z_i.

Полученное таким образом «неразмазанное» дейтронное сечение $\sigma(\omega)$ является гладкой функцией энергии, в которой флуктуации при переходе от точки к точке могут быть потеряны. Ошибки, которые даются соотношением (11), тоже представляют собой гладкую функцию энергии. В следующем разделе они будут показаны на рисунках в виде полосы вокруг центральной кривой.

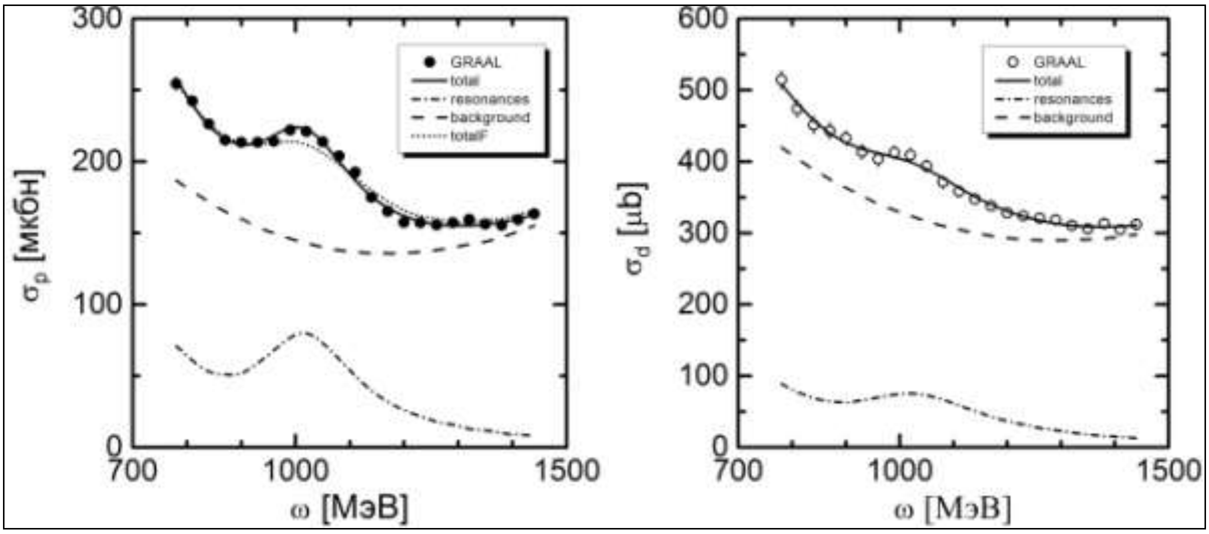
Если параметризовать (фитировать) данные на свободном протоне $\sigma_p(\omega)$ в том же самом виде (6) с полосой ошибок также даваемой соотношением (11), то тогда прямо получаем нейтронное сечение $\sigma_n(\omega)$ как разницу $\sigma(\omega) - \sigma_p(\omega)$. Полоса ошибок в $\sigma_n(\omega)$ есть сумма соответствующих полос в $\sigma(\omega)$ и $\sigma_p(\omega)$, сложенных в квадратуре.

Результаты

В качестве применения описанной процедуры рассмотрим данные по полному сечению фотопоглощения на протоне и дейтроне, полученные на установке GRAAL [7] и в Daresbury [3; 6]. Поскольку они не вполне согласуются друг с другом, то ниже мы обсудим раздельно результаты, полученные из анализа этих данных. Отметим, что имеется еще один эксперимент [9] по измерению полного сечения фотопоглощения на протоне, дейтроне и гелии, выполненный в Майнце. Полученные данные, однако, перекрывают область энергий от 200 до 800 МэВ. По этой причине они не будут учитываться в нашем анализе.

На левой части рисунка 1 показаны результаты фитов данных эксперимента GRAAL [7] для протона. Можно видеть, что фит по формуле (6) обеспечивает очень хорошее описание данных. Отдельно показаны также резонансные и фоновые вклады. Отчетливо виден хвост пика $D_{13}(1520)$ резонанса и пик при энергии фотона 1060 МэВ, обусловленный $F_{15}(1680)$ резонансом.

Для иллюстрации мы также приводим на этой части рисунка 1 результат размазки полного сечения с помощью оператора $\hat{F}$ (2). Соответствующая кривая обозначена как «totalF». Она демонстрирует хорошо известный результат, состоящий в том, что размазка уменьшает сечение в пиках и увеличивает его в минимумах.

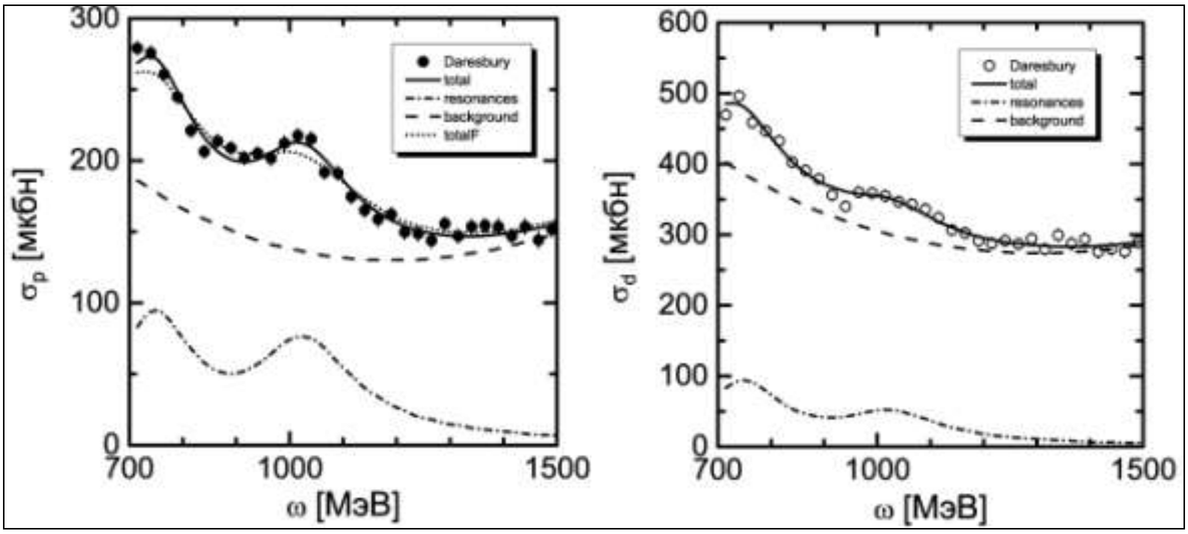


Фиты данных показаны на сплошных кривых. Штрихованная и штрих-пунктирная кривые – вклады от фона и резонансов соответственно. Результат размазки в случае протона показан на пунктирной кривой. Данные GRAAL эксперимента [7]

Рисунок 1. – Полное сечение фотопоглощения на протоне (слева) и дейтроне (справа)

Результаты фитов в случае дейтрона показаны на правой части рисунка 1. Видно, что, как и в случае протона, фит с использованием формулы (6) с пятью параметрами позволяет хорошо описать данные в рассматриваемой области энергий.

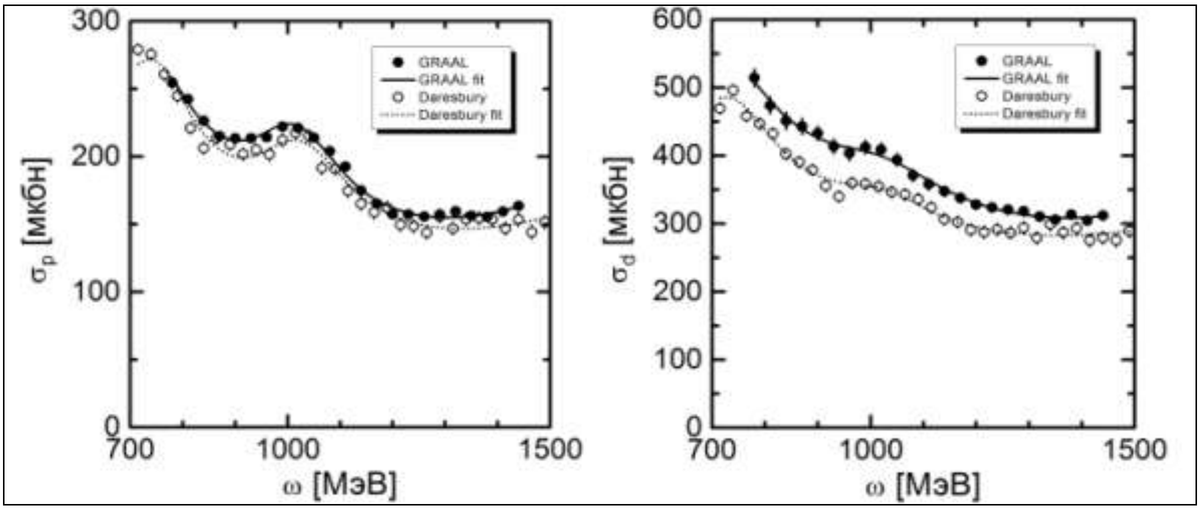
Аналогичные фиты данных Daresbury эксперимента [3; 6] показаны на рисунке 2. Также можно видеть хороший фит данных для протона и нейтрона.



Смысл кривых, как и на рисунке 1. Данные Daresbury эксперимента [3; 6]

Рисунок 2. – Полное сечение фотопоглощения на протоне (слева) и дейтроне (справа)

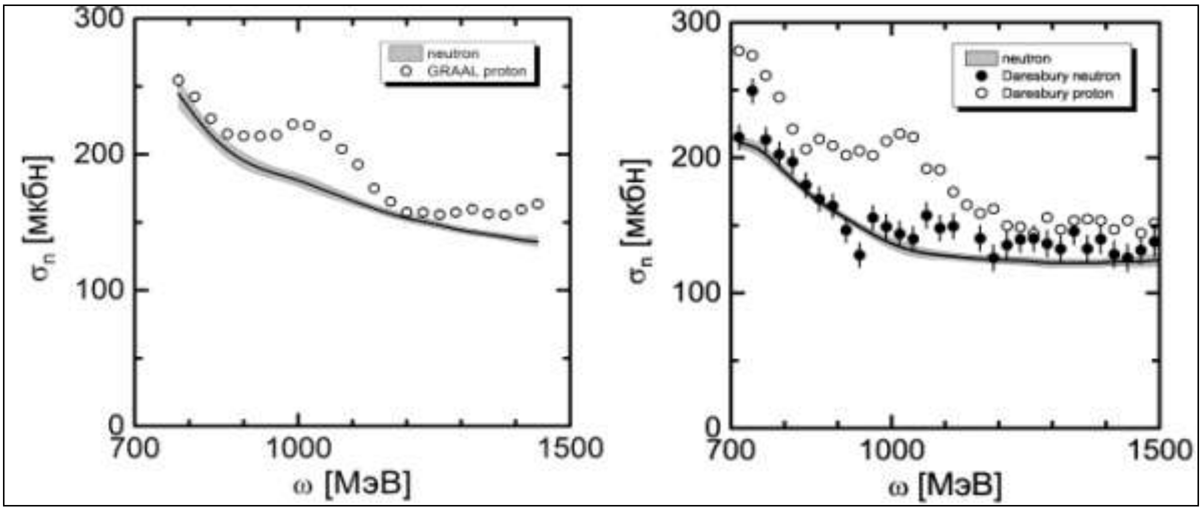
Сравнение данных GRAAL и Daresbury для протона и дейтрона приведено на рисунке 3. Для протона имеется вполне удовлетворительное двух измерений. В случае дейтрона данные GRAAL заметно превышают по величине сечения из Daresbury.



Показаны данные GRAAL [7] и Daresbury экспериментов [3; 6]. Гладкие фиты данных GRAAL и Daresbury представлены на сплошных и пунктирных кривых соответственно

Рисунок 3. – Полное сечение фотопоглощения на протоне (слева) и дейтроне (справа)

Нейтронные сечения, извлеченные из данных GRAAL и Daresbury, показаны на рисунке 4 в виде центральных линий и с ошибками виде полос вокруг этих кривых. Можно видеть, что нейтронные сечения, извлеченные из данных GRAAL, превышают сечения, извлеченных из данных Daresbury. Это является следствием отмеченного выше превышения дейтронных сечений из GRAAL над данными из Daresbury.



Извлеченные нейтронные сечения $\sigma_n(\omega)$ с их ошибками показаны в виде центральной кривой и заполненных областей вокруг них соответственно в случае GRAAL [7] (слева) и Daresbury экспериментов [3; 6] (справа). Показаны также оригинальные значения $\sigma_n(\omega)$ (•) из работы [3]. Для сравнения приведены протонные сечения $\sigma_p(\omega)$ (○)

Рисунок 4. – Полное сечение фотопоглощения на нейтроне

Следует отметить, что ширины заполненных областей меньше по сравненю с размером показанных ошибок экспериментальных данных. Данное обстоятельство связано с тем, что эти ширины, как было показано выше, фактически являются значениями ошибок, усредненными по интервалу энергий $\Delta\omega = \pm$ 60 МэВ, в который укладываются 5–6 экспериментальных точек из работ [3; 7].

Заключение

Таким образом, в данной работе развит метод решения интегрального уравнения Фредгольма, полученного в работе [1], для нахождения суммы полного сечения фотопоглощения на свободных нуклонах. Предполагалось, что эти сечения могут быть аппроксимированы суммой нескольких брейт-вигнеровских резонансов, имеющих фиксированные массы, но неизвестные амплитуды, вообще говоря, разные для протона и нейтрона и плюс гладкий фон. Были получены соотношения для оценки неопределенностей в сечениях, извлекаемых из фитов экспериментальных данных. В рамках развитого метода проанализированы имеющиеся данные по полным сечениям фотопоглощения на протоне и дейтроне, полученные на установке GRAAL и в Daresbury, и извлечены полные сечения фотопоглощения на нейтроне. Расхождение найденных сечений в случае экспериментов в GRAAL и Daresbury обусловлено несогласованием соответствующих сечений на дейтроне. Очень важным следующим шагом в развитии предложенного метода является анализ данных в области энергий первого резонанса ($E_\gamma \leq 500$ МэВ). Есть большие основания предполагать, что в данной области имеется большое расхождение между теоретическими предсказаниями для полного сечения фотопоглощения на дейтроне и имеющимися экспериментальными значениями. Эта область будет рассмотрена в следующей работе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фикс, А. И. Определение полного сечения фотопоглощения на нейтроне из протонных и дейтронных данных в области энергий от 700 до 1 500 МэВ I. Ферми-размазка и неаддитивные поправки / А. И. Фикс, М. И. Левчук, А. И. Львов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2014. – № 2. – С. 39–47.

2. Хюльтен, Л. Проблема взаимодействия двух нуклонов / Л. Хюльтен, М. Сугавара // Строение атомного ядра ; под ред. А. С. Давыдова. – М., 1959. – С. 7–165.

3. The total deuteron hadronic cross section in the energy range 0.265–4.215 GeV / T. A. Armstrong [et al.] // Nucl. Phys. – 1972. – Vol. B41, № 4. – P. 445–473.

4. Walker, R. L. Phenomenological analysis of single-pion photoproduction / R. L. Walker // Phys. Rev. – 1965. – Vol. 182, № 5. – P. 1729–1748.

5. Metcalf, W. J. A phenomenological analysis of pion photoproduction / W. J. Metcalf, R. L. Walker // Nucl. Phys. – 1974. – Vol. B76, № 2. – P. 253–1289.

6. Total hadronic cross section of γ rays in hydrogen in the energy range 0.265–4.215 GeV / T. A. Armstrong [et al.] // Phys. Rev. – 1972. – Vol. D5, № 7. – P. 1640–1652.

7. Total cross section for photoabsorption on light nuclei in the energy range 600–1 500 MeV / N. V. Rudnev [et al.] // Phys. Atom Nucl. – 2010. – Vol. 73, № 8. – P. 1469–1473.

8. The Review of Particle Physics / K. A. Olive [et al.] // Chin. Phys. – 2014. – Vol. C 38. – 1526 p.

9. Total photoabsorption cross sections for $^1\mathrm{H}$, $^2\mathrm{H}$, and $^3\mathrm{He}$ from 200 to 800 MeV / M. MacCormick [et al.] // Phys. Rev. – 1996. – Vol. C 53, № 1. – P. 41–49.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.10.2016

***Fix A.I., Levchuk M.I., L'vov A.I.* Extraction of the Total Photoabsorption Cross Section on the Neutron from the Proton and Deuteron Data at Energies Between 700 and 1500 Mev II. Solution of the Fredholm Equation and an Analysis of Experimental Data**

A method to solve the Fredholm integral equation for finding the sum of total photoabsorption cross section on free nucleons which was proposed in our previous paper is developed. Using physically founded assumption that such cross sections can be approximated by the sum a few Breit-Wigner resonances plus smooth background we fit available experimental data. Also, we obtain errors in cross sections extracted in these fits. In the framework of the developed method we analyze experimental data from GRAAL and Daresbury on total photoabsorption cross section for thee proton and deuteron and obtain corresponding cross sections on the neutron.

О НАУЧНОЙ И НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЧЛЕНА-КОРРЕСПОНДЕНТА НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ ДОКТОРА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК, ПРОФЕССОРА ЯКОВА ВАЛЕНТИНОВИЧА РАДЫНО (К 70-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

1 декабря 2016 г. исполнилось 70 лет заведующему кафедрой функционального анализа Белорусского государственного университета, члену-корреспонденту НАН Беларуси, доктору физико-математических наук, профессору Якову Валентиновичу Радыно, известному в научных кругах стран ближнего и дальнего зарубежья ученому в областях функционального анализа, дифференциально-операторных уравнений, уравнений с частными производными, математической физики; обобщенных функций; неархимедова, радического и адельного анализа; алгебры обобщенных функций; спектральной теории и др.

Я.В. Радыно родился в д. Брильки Воложинского района Минской области. По окончании в 1969 г. математического факультета Белорусского государственного университета был распределен в БГУ на должность стажера-исследователя. В сентябре 1972 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук «К теории линейных уравнений в топологических векторных пространствах» и был принят ассистентом на кафедру уравнений математической физики. В 1973–1974 гг. проходил научную стажировку в Лозаннском университете (Швейцария). В августе 1975 г. Яков Валентинович возглавил кафедру функционального анализа БГУ, которой заведует и по сей день. В феврале 1987 г. в Математическом институте имени В.А. Стеклова АН СССР Я.В. Радыно защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук «Экспоненциальные векторы и дифференциальные уравнения». В апреле 2004 г. он был избран членом-корреспондентом НАН Беларуси.

Я.В. Радыно ввел понятие вектора экспоненциального типа и на его основе построил функциональное исчисление, которое применяется при исследовании дифференциальных и дифференциально-операторных уравнений, построил (совместно с А.Б. Антоневичем) теорию нелинейных обобщенных функций (мнемофункций), разработал теорию обобщенных функций на группе аделей с применением в математической и квантовой физике.

С 1975 г. на кафедре функционального анализа БГУ под руководством Я.В. Радыно и А.Б. Антоневича работает широко известный семинар по функциональному анализу и его приложениям.

В 1978 г. за цикл работ «Линейные дифференциальные уравнения в локально-выпуклых пространствах» Я.В. Радыно была присуждена премия Ленинского комсомола Белоруссии, а цикл работ «Операторные методы в дифференциальных уравнениях» (совместно с В.И. Корзюком и Н.И. Юрчуком) удостоен Государственной премии Республики Беларусь в области науки (1996 г.).

С 1979 по 1991 гг. (до распада СССР) при кафедре функционального анализа БГУ работала отраслевая Научно-исследовательская лаборатория автоматизации, проектирования и контроля цифровых вычислительных устройств, занимавшаяся математическими задачами оборонного значения, научным руководителем которой являлся Я.В. Радыно. В 1997–1998 гг. профессор Я.В. Радыно руководил двумя творческими коллективами, один из которых (совместно с НИИ ядерных проблем БГУ) решил в рамках Чернобыльской программы задачу обнаружения слабого сигнала на фоне шума, другой (совместно с Высшим инженерным зенитным ракетным училищем, ныне – Военная академия Республики Беларусь) решил задачу увеличения живучести некоторых объектов. Под руководством Я.В. Радыно защищены 15 кандидатских диссертаций.

Яков Валентинович – признанный в Беларуси и за ее пределами специалист по функциональному анализу и его приложениям. Его приглашают университеты Австрии, Алжира, Болгарии, Канады, Польши, Словакии, Франции, Швейцарии, Швеции для чтения лекций и проведения научных семинаров.

Я.В. Радыно ведет большую педагогическую работу. Читает лекционный курс «Функциональный анализ и интегральные уравнения» для студентов механико-математического факультета БГУ, а также ряд других основных и специальных курсов. Он автор более 150 научных работ, свыше десятка книг, в том числе монографии «Линейные уравнения и борнология» (1982 г.), учебника с грифами Минвуза СССР и Министерства образования Республики Беларусь «Функциональный анализ и интегральные уравнения» (1984 и 2003 гг.; совместно с А.Б. Антоневичем), учебного пособия «Функциональный анализ и интегральные уравнения. Лабораторный практикум» (2003; совместно с А.Б. Антоневичем), сборника задач и упражнений по функциональному анализу (1978 г.; совместно с А.Б. Антоневичем и П.Н. Князевым), курса лекций о спектральной теореме (2002), соавтор и научный редактор «Русско-белорусского математического словаря» (1993), а также соавтор и научный консультант «Матэматычнай энцыклапедыі» (2001).

Много внимания Я.В. Радыно уделяет работе с талантливой молодежью. В течение 20 лет (1975–1995 гг.) он являлся председателем жюри Минской городской математической олимпиады школьников.

Я.В. Радыно – заместитель председателя Белорусского математического общества (БМО), руководитель научного семинара БМО «Математические исследования», председатель Специализированного Совета по присуждению ученых степеней.

За успехи в научно-педагогической работе Я.В. Радыно награжден почетными грамотами ЦК ВЛКСМ, ЦК ЛКСМБ, Минвуза СССР, Минвуза БССР, Министерства просвещения БССР, грамотами БГУ. Его труд отмечен также знаком «Отличник народного просвещения БССР».

Я.В. Радыно неоднократно приезжал для чтения лекций в Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина. На возглавляемой им кафедре функционального анализа несколько преподавателей нашего университета прошли обучение в магистратуре и аспирантуре, подготовили кандидатские диссертации и успешно их защитили. В 2012 г. Яков Валентинович был избран Почетным доктором Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина.

Сердечно поздравляем Якова Валентиновича Радыно с 70-летием и желаем ему крепкого здоровья, творческой энергии, счастья и благополучия.

Сендер А.Н., профессор, ректор БрГУ имени А.С. Пушкина
Будько А.Е., доцент, проректор по научной работе БрГУ имени А.С. Пушкина
Сендер Н.Н., доцент, заведующий кафедрой математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений БрГУ имени А.С. Пушкина

УДК 512.542

***Т.С. Кирильчук*[1]*, А.А. Трофимук*[2]**

[1]*магистрант каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*

[2]*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ НЕКОТОРЫХ ПОДГРУПП

Получены оценки производной длины и нильпотентной длины разрешимой группы G, у которой индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, равны p, p^2 или 125. В частности, установлено, что нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Кроме того, получены оценки производной и нильпотентной длины разрешимой группы, у которой $r_n(F)$ не превышает 2. В частности, установлено, что нильпотентная длина такой группы не превышает 4, а производная длина – не превышает 6. Также получены оценки производной и нильпотентной длины разрешимой группы, у которой $r_n(F)$ не превышает 3. Доказано, что нильпотентная длина такой группы не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6.

Введение

Все рассматриваемые группы в данной работе предполагаются конечными.

В работе [1] была установлена зависимость производной длины группы от силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга. Вполне естественным является дальнейшее рассмотрение строения разрешимых групп в зависимости от взаимодействия их подгрупп с подгруппой Фиттинга.

Строение разрешимых групп, индексы максимальных подгрупп которых равны простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел, получено в работах В.С. Монахова, М.В. Селькина и Е.Е. Грибовской [2]. Строение разрешимых групп, у которых индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел либо 8, либо 27, было изучено в работах [3–5].

Из работ [2; 6] видно, что происходит увеличение верхней границы оценки инвариантов (производной длины, нильпотентной длины), если рассматривать индексы максимальных подгрупп не свободными от кубов, а свободными от четвертых степеней. Из основных результатов работ [3–7] следует, что оценки инвариантов сохраняются, если рассматривать кубы малых простых чисел $p=2$ и $p=3$.

В теореме 1.1 показано, что оценки сохранятся также и для случая $p=5$, но при этом достаточно рассматривать индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга.

Доказана следующая

Теорема 1.1. Пусть G – разрешимая группа. Если индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, равны простым числам, квадратам простых чисел или 125, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, а нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Пример 1. Пусть E_{5^3} – элементарная абелевая группа порядка 125. При помощи компьютерной системы GAP построено полупрямое произведение $G = E_{5^3} H$, где $H = Z_4 \times ([Z_4 \times Z_4]S_3)$. Здесь S_3 – симметрическая группа степени 3, а Z_n – циклическая группа порядка n. Группа G имеет порядок 48000 и индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, равны простым числам, квадратам простых чисел или 125. Кроме того, нильпотентная длина группы G равна 4. Данный пример показывает, что оценка нильпотентной длины, полученная в теореме 1.1, является точной.

В.С. Монахов [8] ввел понятие нормального ранга p-группы P следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \lhd P} \log_p |X/\Phi(X)|.$$

Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X, а запись $X \lhd P$ означает, что X – нормальная подгруппа группы P.

В этой же работе были исследованы разрешимые группы с силовскими подгруппами P нормального ранга $r_n(P) \le 2$ и $r_n(P) \le 3$.

Для формулировки основного результата введем следующее обозначение:

$$r_n(F) = \max_{p \in \pi(F)} r_n(F_p).$$

Здесь F – подгруппа Фиттинга группы G, F_p – силовская p-подгруппа группы F для $p \in \pi(F)$.

Поэтому возникает вполне естественная задача: получить оценки производной и нильпотентной длины разрешимой группы, у которой $r_n(F)$ не превышает 2 или $r_n(F)$ не превышает 3.

Доказана следующая

Теорема 1.2. Пусть G – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

I) если $r_n(F) \le 3$, то нильпотентная длинна группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6.

II) если $r_n(F) \le 2$, то нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина группы G не превышает 6. В частности, если:

1) группа G A_4-свободна, то нильпотентная длина группы G не превышает 3, а производная длина группы G не превышает 4;

2) группа G имеет нечетный порядок, то G метанильпотентна, а производная длина группы G не превышает 3.

Пример 2. Пусть S – экстраспециальная группа порядка 27. Вычисления в системе GAP показали, что ее группой автоморфизмов является группа $E_{3^2} \rtimes GL(2,3)$. Полупрямое произведение $G = S \rtimes GL(2,3)$ является группой порядка $1296 = 2^4 \cdot 3^4$ с подгруппой Фиттинга $F = S$ порядка 27 и $r_n(F) = 2$. Производная длина G равна 6, а нильпотентная длина равна 4. Данный пример показывает, что оценки производной и нильпотентной длины, полученные в теореме 1.2. в общем случае, являются точными.

Пример 3. Пусть A – экстраспециальная группа порядка 125. В системе GAP построено полупрямое произведение $G = A \rtimes S_3$ порядка $750 = 5^3 \cdot 3 \cdot 2$ с подгруппой Фиттинга F, совпадающей с A и $r_n(F) = 2$. Здесь S_3 – симметрическая группа степени 3. Производная длина G равна 4, а нильпотентная длина равна 3. Данный пример показывает, что оценки производной и нильпотентной длины, полученные в теореме 1.2 в случае A_4-свободности группы, являются точными.

Пример 4. Зафиксируем простые числа $p=5$ и $q=3$. Тогда показатель числа 5 по модулю 3 равен 2, и существует группа Шмидта $G = P\bar{Q}$ такая, что P неабелева порядка 5^3, а Q – циклическая подгруппа порядка 3. Причем подгруппа Фиттинга F совпадает с P и $r_n(F)=2$. Так как P неабелева, то $Z(P)=P'=\Phi(P)$. Из свойств групп Шмидта следует, что $G'=P$. Таким образом, $((G')')'=(P')'=Z(P)'=1$ и $d(G)=3$. Очевидно, что $n(G)=2$. Данный пример показывает, что оценки производной и нильпотентной длины, полученные в теореме 1.2. для групп нечетного порядка, являются точными.

1. Основные определения и вспомогательные результаты

В настоящей работе применяют термины с соответствующими обозначениями, принятые в монографиях [9; 10]. Прописными готическими буквами обозначаются классы групп, т.е. всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой и все группы, изоморфные ей.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N\in\mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}= G\in\mathfrak{B} \mid G^{\mathfrak{H}}\in\mathfrak{F}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2=\mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G)\in\mathfrak{F}$ следует, что $G\in\mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначаются через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно.

Лемма 1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно [10, с. 36], произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 1.2. ([11], лемма 12). Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n,p)$. Тогда:

1) если $n=2$, то $H\in\mathfrak{N}^3\cap\mathfrak{A}^4$;

2) если $n=3$, то $H\in\mathfrak{N}^3\cap\mathfrak{A}^4$.

Кроме того, если $n\in 2;3$, $p>3$ и $O_p(H)=1$, то H – p'-группа.

Лемма 1.3. Если H – разрешимая неприводимая подгруппа группы $GL(3,5)$, то $H\cong Z_2\times D$, $H\cong Z_4\times D$, $H\cong D$ или $H\cong D_1$, где $D\in\{A_4, S_4, [Z_4\times Z_4]Z_3, [Z_{31}]Z_3, [[Z_4\times Z_4]Z_3]Z_2\}$ и $D_1\in\{Z_{31}, Z_{62}, Z_{124}, [A_4]Z_4, [[Z_4\times Z_4]Z_3]Z_4\}$. В частности, производная длина H не превышает 3, а если H A_4-свободна, то $H\cong D_1$, где $D_1\in\{Z_{31}, Z_{62}, Z_{124}, [Z_{31}]Z_3, Z_2\times[Z_{31}]Z_3, Z_4\times[Z_{31}]Z_3\}$ и производная длина H не превышает 2.

Здесь S_n – симметрическая группа степени n.

Доказательство. Утверждение легко получить, используя систему компьютерной алгебры GAP.

Лемма 1.4. ([11], лемма 7). Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G)\in\mathfrak{A}^k$, когда $G\in\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$.

Лемма 1.5. ([11], лемма 13). Если H – разрешимая A_4-свободная подгруппа группы $GL(2,p)$, то H метабелева.

Лемма 1.6. ([13], лемма 2.4). Пусть P – p-группа и $r_n(P) \le 2$. Тогда производная длина группы P не превышает 2. В частности, если $p = 2$, то P бициклическая.

Лемма 1.7. ([14], лемма VI.8.1]). Пусть H – неприводимая подгруппа нечетного порядка группы $GL(2, p)$. Тогда H циклическая.

2. Доказательство теоремы 1.1.

Вначале докажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Воспользуемся индукцией по порядку G. Предположим, что $\Phi(G) \ne 1$ и $M/\Phi(G)$ – максимальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Тогда M – максимальная подгруппа группы G и по условию теоремы M либо содержит подгруппу Фитинга $F(G)$, либо ее индекс $|G:M|$ есть простое число, квадрат простого или 125. В первом случае, так как $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$, то фактор-группа $M/\Phi(G)$ содержит подгруппу Фиттинга $F(G/\Phi(G))$ группы $G/\Phi(G)$, а так как $|G:M| = |G/\Phi(G): M/\Phi(G)|$, то во втором случае индекс максимальной подгруппы $M/\Phi(G)$ в группе $G/\Phi(G)$ есть простое число, квадрат простого или 125. Таким образом, фактор-группа $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условию теоремы и $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как по лемме 1.1. формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, то $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$.

По теореме III.4.5 [14] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп F_i группы G, где $1 \le i \le k$. Поэтому по теореме I.4.5 [14] для каждого F_i фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_i)$. По лемме I.9.6 [14] фактор-группа $G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(F_i)$, $1 \le i \le k$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то $\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = C_G(F) = F$ и $G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = G/F$.

Пусть F_i – элементарная абелева p_i-подгруппа. Ясно, что для каждого i существует максимальная подгруппа M_i в группе G такая, что $G = [F_i]M_i$. Так как M_i не содержит F_i, то M_i не содержит F. Поэтому порядок $|F_i|$ равен p_i, либо p_i^2, либо 125, где p_i – простое число. Поэтому возможны следующие варианты: Aut (F_i) изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$; Aut (F_i) изоморфна группе $GL(2, p_i)$; Aut (F_i) изоморфна группе $GL(3,5)$.

В первом случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и по лемме 1.2 фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$.

В третьем случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3,5)$ и из леммы 1.3 следует, что $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A}^3 \subset \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$. Так как $\mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$ – формация, то $G/F \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$.

Итак, мы доказали, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. По лемме 1.4 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^5$ и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина G не превышает 4.

Теорема доказана.

Следствие 1.1. Пусть G – разрешимая группа, у которой индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или 125. Тогда производная длина фактор группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, а нильпотентная длина группы G не превышает 4.

3. Доказательство теоремы 1.2.

I) Покажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \bigcap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^5$. Воспользуемся индукцией по порядку G. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Тогда $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$. Пусть F_p – силовская p-подгруппа в $F(G)$, тогда $F_p\Phi(G)/\Phi(G)$ – силовская p-подгруппа в $F(G/\Phi(G))$. Так как $F_p\Phi(G)/\Phi(G) \cong F_p / F_p \bigcap \Phi(G)$, то $r_n(F_p\Phi(G)/\Phi(G)) \leq r_n(F_p) \leq 3$ и $r_n(F(G/\Phi(G))) \leq r_n(F) \leq 3$. Поэтому $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условиям теоремы. Так как формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, то $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$.

По теоремам III.4.5, I.4.5 и лемме I.9.6 [14] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп N_i группы G, где $1 \leq i \leq k$ и справедливы следующие утверждения

$$\bigcap_{i=1}^{k} C_G(N_i) = C_G(F) = F \text{ и } G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(N_i) = G/F.$$

Так как N_i – элементарная абелева p_i-подгруппа порядка p_i^k, то $N_i \leq F_{p_i}$ и $k \leq 3$, поскольку $\Phi(N_i) = 1$ и $r_n(P) \leq 3$ для любой силовской подгруппы P из $F(G)$. Поэтому возможны следующие варианты:

1) Aut (N_i) изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$;

2) Aut (N_i) изоморфна подгруппе группы $GL(2, p_i)$;

3) Aut (N_i) изоморфна подгруппе группы $GL(3, p_i)$.

В первом случае фактор-группа $G/C_G(N_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^5$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(N_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и фактор-группа $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^4 \subset \mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^5$ по лемме 1.2.

В третьем случае фактор-группа $G/C_G(N_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3, p_i)$ и фактор-группа $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^5$ по лемме 1.2.

Так как $\mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^5$ – формация, то $G/F \in \mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^5$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина G не превышает 4. Так как $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^5$, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6 по лемме 1.4.

II) Пусть $r_n(F) \leq 2$. Покажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \bigcap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Повторяя большую часть доказательства п. I теоремы, получим, что если N_i – элементарная абелева p_i-подгруппа порядка p_i^k, то $N_i \leq F_{p_i}$ и $k \leq 2$, поскольку $\Phi(N_i)=1$ и $r_n(P) \leq 2$ для любой силовской подгруппы P из $F(G)$. Поэтому возможны следующие варианты:

1) Aut (N_i) изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$;
2) Aut (N_i) изоморфна подгруппе группы $GL(2, p_i)$.

В первом случае фактор-группа $G/C_G(N_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^4$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(N_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и фактор-группа $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^4$ по лемме 1.2. Так как $\mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^5$ – формация, то $G/F \in \mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^4$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$.

Итак, мы доказали, что $G/F \in \mathfrak{A}^4$. Из леммы 1.6 следует, что $F \in \mathfrak{A}^2$, поэтому производная длина G не превышает 6. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина G не превышает 4.

Пусть группа G является A_4-свободной, то, повторяя доказательство основной части теоремы и используя лемму 1.5, получим, что $G/F \in \mathfrak{A}^2$. Тогда $G \in \mathfrak{N}^3$ и нильпотентная длина группы G не превышает 3, а так как по лемме 1.6 $F \in \mathfrak{A}^2$, то производная длина группы G не превышает 4.

Пусть группа G имеет нечетный порядок, то, используя лемму 1.7, получим, что $G/F \in \mathfrak{A}$. Тогда $G \in \mathfrak{N}^2$ и нильпотентная длина группы G не превышает 2, а производная длина группы G не превышает 3 по лемме 1.6.

Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трофимук, А. А. Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы / А. А. Трофимук // Матем. заметки. – 2010. – Т. 87, № 2. – С. 287–293.
2. Монахов, В. С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В. С. Монахов, М. В. Селькин, Е. Е. Грибовская // Украин. матем. журн. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.
3. Грибовская, Е. Е. Конечные разрешимые группы с индексами максимальных подгрупп, равными p, p^2 или 8 / Е. Е. Грибовская // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2001. – № 4. – С. 11–14.
4. Грибовская, Е. Е. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп с индексами максимальных подгрупп p, p^2 или 8 / Е. Е. Грибовская // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2001. – Т. 21, № 3. – С. 98–103.
5. Трофимук, А. А. Конечные группы с ограничениями на индексы максимальных подгрупп / А. А. Трофимук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2009. – № 2(33). – С. 25–31.
6. Монахов, В. С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская // Матем. заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
7. Трофимук, А. А. О конечных разрешимых группах с небольшими индексами максимальных подгрупп / А. А. Трофимук, И. Н. Фенчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 99–105.

8. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.

9. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Высш. шк., 2006. – 207 с.

10. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

11. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – Т. 52, № 5. – 2011. – С. 1123–1137.

12. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.

13. Trofimuk, A. A. Solvable groups with restrictions on Sylow subgroups of the Fitting subgroup / A. A. Trofimuk // Asian-European Journal of Mathematics. – 2016. – Vol. 9, № 2. – 1650037 (6 p.).

14. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York : Springer, 1967.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 24.10.2016

***Kirilchuk T.S., Trofimuk A.A.* Finite Groups with Given Properties of Some Subgroups**

The estimates of the derived length and nilpotent length of a finite solvable group G in which indices of maximal subgroups that not contain the Fitting subgroup, is equal to p, p^2*, or 125, are obtained. In particular, the nilpotent length of G is at most 4 and the derived length of* $G/\Phi(G)$ *is at most 5. In addition, the estimates of the derived length and the nilpotent length of soluble group in which* $r_n(F)$ *does not exceed 2 are obtained. In particular, the nilpotent length of such groups does not exceed 4 and the derived length does not exceed 6. Also, the estimations of the derived length and the nilpotent length of a finite soluble group in which* $r_n(F)$ *does not exceed 3 are obtained. In particular, the nilpotent length of such groups does not exceed 4 and the derived length of* $G/\Phi(G)$ *does not exceed 6.*

УДК 517+518.948

В.М. Мадорский
канд. физ.-мат. наук,
доц. каф. прикладной математики и технологий программирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАНТАХ МЕТОДА ХОРД И СТЕФФЕНСЕНА

Рассматриваются ряд квазиньютоновских полулокалых методов решений нелинейных операторных уравнений с помощью нерегуляризованных и частично регуляризованных методов хорд и Стефенсона. Доказывается сверхлинейная сходимость рассматриваемых итерационных процессов с «плохого» начального приближения.

Рассматривается нелинейное уравнение:

$$f(x)=0,\ f\in(D\subset X\to X),\ X-B\text{-пространство.} \tag{1}$$

Для решения нелинейного уравнения (1) А.С. Сергеевым [1] был предложен операторный вариант метода хорд, локально сходящийся со сверхлинейной скоростью.

Итерационная процедура имела следующий вид:

$$x_{n+1}=x_n-\left[f(x_n,x_{n-1})\right]^{-1}f(x_n)=x_n-\Delta x_n,\ n=1,2,\ldots \tag{2}$$

Достоинство метода (2) состоит в том, что метод применим в том случае, если оператор f лишь непрерывен в области D и первые и вторые разделенные разности оператора f равномерно ограничены в D. К числу важных недостатков метода (2) является необходимость иметь в своем распоряжении достаточно хорошие начальные приближения x_0 и x_1, а также знание оценок ряда глобальных констант, нахождение которых часто представляет задачу, сравнимую по трудности с решением задачи (1).

Положим, что в интересующей нас области $D\subset X$ для каждого x_1,x_2,x_3 выполняется условие:

$$\left\|f(x_1,x_2)-f(x_2,x_3)\right\|\le L\|x_1-x_3\|. \tag{3}$$

Рассматривается итерационный процесс (2).

Относительно сходимости процесса (2) справедлива

Теорема 1. Пусть в области D выполняются условие (3) и элементы x_0, x_1 таковы, что

$$BL\left\|f(x_1)\right\|(1+B)=l<\frac{q}{3},\ \|x_1-x_0\|\le\left\|f(x_1)\right\|,\ q\in(0;1),\ \left\|\left[f(x_0,x_1)\right]^{-1}\right\|\le B \tag{4}$$

и справедливо соотношение $\|f(x_1)\|\left(1+B\dfrac{1-l}{1-2l}\right)\le\dfrac{q-Bl\|f(x_1)\|}{2Bl}$.

Тогда итерационный процесс (1.2) с квадратичной скоростью сходится к единственному в $\Omega_\delta=\left(x_1,\dfrac{q-BL\|f(x_1)\|}{2BL}\right)$ решению x^* уравнения (1).

Доказательство.

Выведем вначале некоторые соотношения:

$$\left\|E-\left[f(x_0,x_1)\right]^{-1}f(x_1,x_2)\right\|\le\left\|\left[f(x_0,x_1)\right]^{-1}\right\|\left\|f(x_0,x_1)-f(x_1,x_2)\right\|\le BL\|x_2-x_0\|\le$$

$$\le BL\left(\|x_2-x_1\|+\|x_1-x_0\|\right)\le BL\left\|f(x_1)\right\|(1+B)=l. \tag{5}$$

Пусть $l<1$. Так как $l<1$, то в силу теоремы Банаха существует оператор, обратный оператору $f(x_0,x_1)^{-1} f(x_1,x_2)$ и $\left\| \left[f(x_0,x_1)^{-1} f(x_1,x_2)\right]^{-1} \right\| \le (1-l)^{-1}$. Далее, имеем соотношение $\left\| f(x_1,x_2)^{-1}\right\| \le \frac{\left\| f(x_0,x_1)^{-1}\right\|}{1-l}$. Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов и условия теоремы, получаем оценку

$$\|f(x_2)\| = \|f(x_1-\Delta x_1)\| \le \|f(x_1) - f(x_1,x_0)\Delta x_1\| + L\|x_2-x_1\|\|x_2-x_0\| \le$$

$$\le \left\|f(x_1) - f(x_1,x_0)\left[f(x_1,x_0)\right]^{-1} f(x_1)\right\| + \tag{6}$$

$$+L\left\|\left[f(x_1,x_0)\right]^{-1} f(x_1)\right\|\left(\|x_2-x_1\|+\|x_2-x_0\|\right) \le LB\|f(x_1)\|^2(1+B).$$

Покажем, что при переходе от точки x_1 к точке x_2, соотношение (5) не меняется. Имеем

$$\left\| f(x_1,x_2)^{-1}\right\| L\|f(x_2)\|\left(1+\left\| f(x_1,x_2)^{-1}\right\|\right) \le BL\|f(x_1)\| l\frac{(1-l+B)}{(1-l)^2} <$$

$$< BLl\|f(x_1)\|\frac{(1+B)}{(1-1)} = \frac{l^2}{(1-l)^2}.$$

И если потребовать, чтобы выполнялось соотношение $\frac{l^2}{(1-l)^2} \le l$, а это неравенство будет выполнятся при $l<\frac{q}{3}$, то получим, что соотношение (5) при переходе от точки x_1 к точке x_2 не нарушается.

Из соотношения (6) следует квадратичная сходимость последовательности $\{x_n\}$, определённой процессом (2), к x^* – решению уравнения (1).

Докажем единственность полученного решения в сфере Ω_δ. Пусть в Ω_δ существует еще одно решение x^{**}. Имеем:

$$\|x^*-x^{**}\| = \left\|x^* - \left[f(x_1,x_0)\right]^{-1} f(x^*) - x^{**} + \left[f(x_1,x_0)\right]^{-1} f(x^{**})\right\| \le \left\|\left[f(x_1,x_0)\right]^{-1}\right\|$$

$$\left\|f(x_1,x_0)(x^*-x^{**}) - f(x^*) + f(x^{**})\right\| \le \left\|\left[f(x_1,x_0)\right]^{-1}\right\|$$

$$\left\|f(x_1,x_0) - f(x^*,x^{**})\right\|\|x^*-x^{**}\| = \left\|\left[f(x_1,x_0)\right]^{-1}\right\|$$

$$\left\|f(x_1,x_0) - f(x_0,x^*) + f(x_0,x^*) - f(x^*,x^{**})\right\|\|x^*-x^{**}\| \le \left\|\left[f(x_1,x_0)\right]^{-1}\right\|$$

$$L\left(\|x_1-x^*\|+\|x_1-x^{**}\|+\|f(x_1)\|\right)\|x^*-x^{**}\| \le BL(2r+\|f(x_1)\|)\|x^*-x^{**}\|$$

Если $BL(2r+\|f(x_1)\|)=q$ то решений будет не более одного. Нетрудно найти радиус области единственности. Он равен $r=\frac{q-BL\|f(x_1)\|}{2BL}$.