УДК 513.82

Е.М. Ракович[1], А.А. Юдов[2]

[1]*магистрантка каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*

[2]*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ЧЕТЫРЁХМЕРНОГО ПСЕВДОЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА НУЛЕВОЙ СИГНАТУРЫ

В работе классифицируется связанные подгруппы Ли группы Ли движений четырёхмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры – простравнства $^2R_4$. Найдены инвариантные плоскости и прямые для таких подгруппы Ли и их образы стационарности.

В работе изучается геометрия однородных пространств. Анализ таких пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались В.И. Ведерников, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, Л.К. Тутаев, А.С. Феденко и др., а за рубежом – эстонский геометр Ю. Лумисте и японские геометры К. Номидзу и Ш. Кобаяси. Ю. Лумисте показал применимость редуктивных однородных пространств к проблеме расширения связностей на расслоениях с редуктивными однородными слоями. К. Номидзу и Ш. Кобаяси проводили широкое исследование редуктивных однородных пространств, в частности, исследовали свойства инвариантной связности в редуктивных однородных пространствах.

1. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается группа $G_0 = T_4 \cdot O(4,2)$ движений пространства $^2R_4$. Ставится задача классификации всех связных подгрупп Ли группы G_0 с точностью до внутренних автоморфизмов этой группы, т.е. до сопряжённости. Для решения этой задачи будем применять тот же метод, который разработали И.В. Белько и А.С. Феденко для классификации связных подгрупп Ли группы движении пространства Минковского [1; 2]. Ниже кратко излагаются основы этого метода применительно к группе движений пространства $^2R_4$.

Как известно, задача классификации связных подгрупп группы Ли с точностью до внутренних автоморфизмов эквивалентна задаче классификации подалгебр алгебры Ли этой группы с точностью до присоединённого представления этой группы. Подалгебры, переводящиеся друг в друга элементами присоединённой группы, тоже будем называть сопряжёнными.

В настоящей работе решается задача классификации подалгебр Ли алгебры $\overline{G}_0$ с точностью до присоединённого представления *Ad* группы G_0. Присоединённая группа действует в $\overline{G}_0$ по формуле:

$$Ad(B)(C) = B^{-1} C B, \quad B \in G_0, C \in \overline{G}_0. \qquad (1)$$

Следуя И.В. Белько [2], введем следующие определения:

Определение 1. Пусть $\overline{\mathrm{T}} \oplus K$ – полупрямая сумма идеала $\overline{\mathrm{T}}$ и подалгебры *K*, $\overline{H}$ – подалгебра алгебры $\overline{\mathrm{T}} \oplus K, H_1 = \overline{H} \cap \overline{\mathrm{T}}, H_2 = pr_2\overline{H}$. Подалгебра $\overline{H}$ называется полупрямой, если $\overline{H} = H_1 \oplus H_2$, т.е. $pr_1\overline{H} = H_1, \overline{H} \cap K = H_2$.

Определение 2. Подалгебра $\overline{\mathrm{I}}$ алгебры $\overline{\mathrm{T}} \oplus K$ называется расширением полупрямой подалгебры $\overline{H} = H_1 \oplus H_2$, если $\overline{\mathrm{I}} \cap \overline{\mathrm{T}} = H_1, pr_2\overline{\mathrm{I}} = H_2$.

Имеют место следующие леммы, первые две из которых доказаны в [2].

Лемма 1. Пусть $\overline{\mathrm{T}} \oplus K$ – полупрямая сумма идеала $\overline{\mathrm{T}}$ и подалгебры *K*, $\overline{H}$ – подалгебра алгебры $\overline{\mathrm{T}} \oplus K$. Тогда:

1) $\overline{H} \cap \overline{\mathrm{T}} = H_1$ – подалгебра алгебры $\overline{\mathrm{T}}$,

2) $pr_2\overline{H} = H_2$ – подалгебра алгебры *K*,

3) если идеал $\overline{\mathrm{T}}$ абелев, то $H_1 \oplus H_2$ – подалгебра алгебры $\overline{\mathrm{T}} \oplus K$.

Лемма 2. Пусть $\overline{\mathrm{T}} \oplus K$ – полупрямая сумма идеала $\overline{\mathrm{T}}$ и подалгебры *K*, $\overline{P}$ – подалгебра алгебры $\overline{\mathrm{T}}$, $\overline{H}$ – подалгебра алгебры *K*. Подпространство $\overline{P} \oplus \overline{H}$ тогда и только тогда является подалгеброй алгебры $\overline{\mathrm{T}} \oplus K$, когда подпространство $\overline{P}$ инвариантно относительно adX для любого $X \in \overline{H}$.

Лемма 3. Пусть $\overline{H} = H_1 \oplus H_2$ – полупрямая подалгебра алгебры $\overline{\mathrm{T}}_4 \oplus \vartheta(4,2)$, $\overline{\mathrm{I}}$ – произвольное расширение подалгебры $\overline{H}$, *Ad h* – элемент присоединённой группы *Ad*(*O*(4,2)). Тогда *Ad h*($\overline{H}$) – полупрямая подалгебра, *Ad h*($\overline{\mathrm{I}}$) – расширение полупрямой подалгебры *Ad h*($\overline{H}$).

Доказательство.

Пусть $h \in O(4,2)$. Из определения действия присоединённой группы $AdG_0(\ )$ получаем, что выполняются равенства:

$$pr_1 \circ Adh = Adh \circ pr_1, \ pr_2 \circ Adh = Adh \circ pr_2, \tag{2}$$

где pr_i – проекция на i-е слагаемое в сумме $\overline{\mathrm{T}}_4 \oplus \vartheta(4,2)$. Так как $\overline{H}$ – полупрямая подалгебра, то $pr_1\overline{H} = \overline{H} \cap \overline{\mathrm{T}}_4, pr_2\overline{H} = \overline{H} \cap \vartheta(4,2)$. Рассмотрим

$$Adh(\overline{H}) = Adh(H_1 \oplus H_2).$$

Из (2) следует, что $pr_1(Adh(\overline{H})) = Adh \circ pr_1(\overline{H}) = Adh(H_1)$. С другой стороны, поскольку $\overline{\mathrm{T}}_4$ инвариантно относительно Adh, то $Adh(\overline{H}) \cap \overline{\mathrm{T}}_4 = Adh(H_1)$. Таким образом, $pr_1(Adh(\overline{H})) = Adh(\overline{H}) \cap \overline{\mathrm{T}}_4 = Adh(H_1)$.

Аналогично доказывается равенство

$$pr_2(Adh(\overline{H})) = Adh(\overline{H}) \cap \vartheta(4,2) = Adh(H_2).$$

Таким образом, алгебра $Adh(\overline{H}) = Adh(H_1) \oplus Adh(H_2)$ – полупрямая.

Подалгебра $\overline{\mathrm{I}}$ – расширение полупрямой подалгебры $\overline{H}$, значит, $\overline{\mathrm{I}} \cap \overline{\mathrm{T}}_4 = H_1, pr_2\overline{\mathrm{I}} = H_2$. Рассмотрим соотношения:

$$Adh(\bar{I}) \cap \overline{T}_4 = Adh(\bar{I}) \cap Adh(\overline{T}_4) = Adh(\bar{I} \cap \overline{T}_4) = Adh(H_1),$$
$$pr_2 \circ Adh(\bar{I}) = Adh \circ pr_2(\bar{I}) = Adh(H_2).$$

Значит, $Adh(\bar{I})$ – расширение полупрямой подалгебры $Adh(\overline{H})$.

Лемма доказана.

Имеет место следующая основная теорема:

Теорема. Всякая подалгебра алгебры $\overline{T}_4 \oplus \vartheta(4,2)$ с помощью $Adh, h \in O(4,2)$ сопряжена некоторому расширению подалгебры $H_1 \oplus H_2$, где H_2 – один из представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры $\vartheta(4,2)$, H_1 – подпространство пространства $\overline{T}_4$, инвариантное относительно adH_2.

Доказательство.

Пусть $\bar{I}$ – произвольная подалгебра алгебры $\overline{T}_4 \oplus \vartheta(4,2)$, $\bar{I}_1 = \bar{I} \cap \overline{T}_4$, $\bar{I}_2 = pr_2\bar{I}$.

В силу леммы 1, $\bar{I}_2$ – подалгебра алгебры $\vartheta(4,2)$. Значит, существует элемент $h \in O(4,2)$, такой, что $Adh(\bar{I}_2) = H_2$, где H_2 – один из представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры $\vartheta(4,2)$. В силу определения 2, $\bar{I}$ является расширением полупрямой подалгебры $\bar{I}_1 \oplus \bar{I}_2$. В силу леммы 3, $Adh(\bar{I})$ является расширением полупрямой подалгебры $\bar{I}_1 \oplus \bar{I}_2$. В силу леммы 3, $Adh(\bar{I})$ является расширением полупрямой подалгебры $Adh(\bar{I}_1) \oplus Adh(\bar{I}_2) = Adh(\bar{I}_1) \oplus H_2$. В силу леммы 2, подпространство $Adh(\bar{I}_1)$ инвариантно относительно adX для любого $X \in H_2$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что классификация подалгебр алгебры $\overline{G}_0$ должна проводиться с использованием классификации подалгебр алгебры $\vartheta(4,2)$. В данной работе используется классификация с точностью до сопряжённости подалгебр алгебры Ли $\vartheta(4,2)$, приведённая Р.Н. Хабибуллиной и А. П. Широковым [3].

Доказанная теорема сводит задачу классификации подалгебр алгебры $\overline{T}_4 \oplus \vartheta(4,2)$ к трём следующим задачам:

1) нахождение всех полупрямых подалгебр вида $H_1 \oplus H_2$, где H_2 прибегает множество представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры $\vartheta(4,2)$,

2) нахождение всех расширений полученных полупрямых подалгебр,

3) классификация полученных расширений с точностью до сопряжённости.

Покажем, как для подалгебры $H_2 \in \vartheta(4,2)$ находятся подпространства пространства $\overline{T}_4$, инвариантные относительно $ad\ H_2$.

Пусть $A \in \overline{T}_4$, $B \in \vartheta(4,2)$. Тогда

$$ad\,B\,(A) = AB - BA = AB \qquad (3)$$

Таким образом, для нахождения инвариантных одномерных подпространств, необходимо решить следующее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix},$$

где $\lambda \in R$ – произвольное число, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ – произвольный элемент из H_2. Аналогично для нахождения инвариантных двумерных подпространств необходимо решить систему:

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \nu\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix},$$

где $\lambda, \mu, \nu, \delta$ – произвольные числа, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ – произвольный элемент из H_2.

Для нахождения инвариантных трёхмерных подпространств воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого опускаем. Пусть H_2 – алгебра Ли связной группы Ли H_2.

Тогда из $AdH_2(K) \subset K$ следует $adH_2(K) \subset K$ и обратно, где K – подпространство алгебры Ли G_0. Из формулы (1.8) и (1) заключаем, что присоединённая группа $AdO(4,2)$ сохраняет метрику в пространстве $\overline{\mathrm{T}}_4$ (изоморфном V_4). Таким образом, если $Adh(\overline{P}) \subset \overline{P}$, то $Adh(\overline{P}_0) \subset \overline{P}_0$, где $h \in O(4,2)$, $\overline{P}_0$ – ортогональное дополнение пространства $\overline{P}$. Значит, из $adK(\overline{P}) \subset \overline{P}$ следует, что $adK(\overline{P}_0) \subset \overline{P}_0$. Таким образом, инвариантные трёхмерные пространства находим как ортогональные дополнения к инвариантным одномерным подпространствам.

Чтобы найти расширения полупрямой подалгебры $H_1 \oplus H_2$, необходимо из множества $\overline{\mathrm{I}}^{-}$ всех векторных подпространств алгебры $\overline{\mathrm{T}}_4 \oplus \vartheta(4,2)$, удовлетворяющих условию $\overline{\mathrm{I}} \cap \overline{\mathrm{T}} = H_1$, $pr_2 \overline{\mathrm{I}} = H_2$, выбрать подалгбры, для чего надо потребовать замкнутость операции коммутирования.

Замечание. Для нахождения полупрямых подалгебр, соответствующих подалгебре $H_2 \subset \vartheta(4,2)$ подпространства H_1 пространства $\overline{\mathrm{T}}_4$, инвариантные относительно adH_2 нужно искать с точностью до преобразований $Adh, h \in O(4,2)$ таких, что $Adh(H_2) = H_2$.

В данной работе находятся расширения для однопрометрических подалгебр Ли.

Для приведения найденных инвариантных подпространств к минимальному числу, согласно замечанию, будем использовать следующие элементы группы $O(4,2)$:

$$h_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$h_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ch\phi & 0 & sh\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & sh\phi & 0 & ch\phi \end{pmatrix}, h_5 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 1-\lambda^2/2 & 0 & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & -\lambda^2/2 & 0 & 1+\lambda^2/2 \end{pmatrix},$$

$$h_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\lambda^2/2 & -\lambda & -\lambda^2/2 \\ 0 & -\lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda^2/2 & -\lambda & 1-\lambda^2/2 \end{pmatrix}, h_7 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda/2 & -\lambda/2 & 0 \\ \lambda/2 & 1 & 0 & -\lambda/2 \\ -\lambda/2 & 0 & 1 & \lambda/2 \\ 0 & -\lambda/2 & -\lambda/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$h_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, h_9 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, h_{10} = \begin{pmatrix} ch\phi & 0 & sh\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sh\phi & 0 & ch\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$h_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$h_{13} = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2/2 & -\sin\phi & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & 0 & 0 \\ 1+\lambda^2/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, h_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Полупрямые подалгебры алгебры $\overline{G}_0 = \overline{T}_4 \oplus \vartheta(4,2)$

2.1 Приведём некоторые сведения о k-плоскостях пространства ${}^2R_4$. В зависимости от метрики, которая индуцируется на k-плоскостях, все k-плоскости пространства ${}^2R_4$ разделяются на действительные (евклидовы), «мнимые» (мнимоевклидовы), полуевклидовы и изотропные.

Пусть дана плоскость $\beta = (O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k)$, где $O \in {}^2R_4$, $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k$ – попарно ортогональные векторы из V_4, определяющие k-плоскость β. Произвольный вектор $\vec{a} = \lambda^\alpha \vec{a}_2, \alpha = 1, ..., k$ имеет длину $|\vec{a}|$, определяемую по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\lambda^1)^2 \vec{a}_1^{\,2} + (\lambda^2)^2 \vec{a}_2^{\,2} + ... + (\lambda^k)^2 \vec{a}_k^{\,2}}.$$

Если $\vec{a}_1^{\,2} > 0, \vec{a}_2^{\,2} > 0, ..., \vec{a}_k^{\,2} > 0,$ то k-плоскость β называется евклидовой; если $\vec{a}_1^{\,2} > 0, \vec{a}_2^{\,2} > 0, ..., \vec{a}_k^{\,2} > 0,$ – мнимоевклидовой. Если $\vec{a}_1^2 > 0,\ \ldots,\ \vec{a}_e^2 > 0,$ $\vec{a}_{e+1}^2 < 0,\ \ldots,\ \vec{a}_{e+p}^2 < 0,\ \vec{a}_{e+p+1}^2 = 0,\ \ldots,\ \vec{a}_k^2 = 0,$ то k-плоскость β называется полуевклидовой k -плоскостью индекса l дефекта k-(l +p). Если все $\vec{a}_i^2 = 0 \quad i = 1,2,...,k$, то k-плоскость β называется изотропной k-плоскостью.

Евклидову k-плоскость будем обозначать R_k, мнимоевклидову k-плоскость будем обозначать ${}^kR_k$, полуевклидову k-плоскость индекса l дефекта r будем обозначать ${}^eR_k^r$, изотропную k-плоскость будем обозначать R_k^k.

В пространстве ${}^2R_4$ существуют все возможные виды 1-плоскостей (т.е. прямых): $R_1 = \langle 0, \vec{e}_1 \rangle$, ${}^1R_1 = \langle 0, \vec{e}_3 \rangle$, $R_1^1 = \langle 0, \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \rangle$ – и все возможные виды 2-плоскостей:

$$R_2 = \langle 0, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle,\ {}^1R_2 = \langle 0, \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle,\ {}^2R_2 = \langle 0; \vec{e}_3, \vec{e}_4 \rangle,$$
$$R_2^1 = \langle 0, \vec{e}_1, \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \rangle,\ {}^1R_2^1 = \langle 0, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4 \rangle,\ R_2^2 = \langle 0, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4 \rangle.$$

В пространстве ${}^2R_4$ существует только три типа 3-плоскостей: ${}^1R_3 = \langle 0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, ${}^2R_3 = \langle 0, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \rangle$, ${}^1R_3^1 = \langle 0, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4 \rangle$. 3-плоскостей $R_3^1,\ {}^2R_3^1, R_3,\ {}^3R_3,\ {}^1R_3^2, R_3^2, R_3^3$ в пространстве ${}^2R_4$ не существует. Это следует из того, что существует только три типа прямых, а 3-плоскости являются ортогональными дополнениями соответствующих прямых. Если при движениях пространства ${}^2R_4$ прямые переходят друг в друга, то и их ортогональные дополнения также переходят друг в друга. Значит, они несут на себе метрику одного типа.

Введем теперь определение образа стационарности.

Определение. Образом стационарности (о.с.) данной подгруппы Ли H группы Ли G (а также соответствующей подгруппе H алгебры Ли N) называется такая фигура F в пространстве ${}^2R_4$, что подгруппа H состоит из тех и только тех движений пространства ${}^2R_4$, при которых фигура F инвариантна.

Всякая фигура F пространства ${}^2R_4$ определяет некоторую подгруппу H, образом стационарности которой служит данная фигура. Под фигурой понимается любое множество точек пространства $P({}^2R_4)$. Если две фигуры отличаются только положением в пространстве ${}^2R_4$ (т.е. переводятся друг в друга некоторым движением пространства ${}^2R_4$), то определяемые ими подгруппы сопряжены. Любые две K-плоскости пространства ${}^2R_4$, несущие метрику одного типа, переводятся друг в друга некоторым движением пространства ${}^2R_4$.

Важнейшими фигурами пространства ${}^2R_4$ являются k-плоскости и образованные с их помощью флаги.

Определение. Последовательность плоскостей $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, ..., \alpha_{k_r}$ пространства ${}^2R_4$, $\dim\alpha_{k_i} = k_i, k_1 < k_2 < ... < k_r$ называется флагом пространства ${}^2R_4$ и обозначается $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, ..., \alpha_{k_r}$, если $\alpha_{k_1} \subset \alpha_{k_2} \subset ... \subset \alpha_{k_r}$.

Каждой K-плоскости α_k пространства ${}^2R_4$ отвечает K-мерное подпространство $\overline{\alpha}_k$ векторного пространства V_4 .

Определение. Последовательность $\bar{\alpha}_{k_1}, \alpha_{k_2}, \bar{\alpha}_{k_3}, \alpha_{k_4}, \alpha_{k_5}, ..., \alpha_{k_r}$, $k_1 < k_2 < ... < k_r$, состоящая из плоскостей пространства ${}^2R_4$ и подпространств векторного пространства V_4, называется обобщенным флагом и обозначается $\overline{\alpha}_{k_1}, \alpha_{k_2}, \overline{\alpha}_{k_3}, ..., \alpha_{k_r}$, если существует последовательность $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \alpha_{k_3}, ..., \alpha_{k_r}$, такая, что подпространство $\overline{\alpha}_{k_1}$ отвечает k_1 -плоскости α_{k_1}; пространство $\overline{\alpha}_{k_3}$ – k_3 -плоскости α_{k_3} и т.д., причем последовательность $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \alpha_{k_3}, ..., \alpha_{k_r}$ является флагом.

Плоскости и подпространства могут быть расположены в произвольном порядке и числе.

2.2 Перечислим теперь подалгебры алгебры $O(4,2)$ 4 , указывая образы стационарности (о.с.) и обозначая каждую подалгебру буквой. Это обозначение будет применяться во всей работе.

$J_1 = \{i_{10}\}$, о.с. – три точки, определяющие R_2,

$J_2 = \{i_5\}$, о.с. – три точки, определяющие ${}^2R_2$,

$J_3 = \{i_6\}$, о.с. – три точки, определяющие ${}^1R_2$,

$J_4 = \{i_8 - i_{10}\}$, о.с. – три точки, определяющие R_2^1,

$J_5 = \{i_5 - i_7\}$, о.с. – три точки, определяющие ${}^1R_2^1$,

$J_6 = \{i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}$, о.с. – три точки, определяющие R_2^2 ,

$J_7 = \{i_5 + i_{10}\}$, о.с. – пара ($R_2, {}^2R_2$), причем $(R_2)^\perp \neq {}^2R_2$.

Здесь символом $\alpha^\perp$ обозначается плоскость ортогональная к плоскости α и $\dim\alpha + \dim\alpha^\perp = \dim {}^2R_4$.

$J_8 = \{i_6 - i_9\}$, о.с. – пара $({}^1R_2,\ {}^1R_2^/)$, где ${}^1R_2 \neq ({}^1R_2^/)^\perp$ и ${}^1R_2 \cap {}^1R_2^/ = R$

$J_9 = \{i_5 + \lambda i_{10}\}$, $\lambda \neq 0, \pm 1$, $J_{10} = \{i_6 + \lambda i_9\}$, $\lambda \neq 0, \pm 1$,

$J_{11} = \{i_5 - i_7 + i_8 - i_{10} + 2i_6 - 2i_9\}$, $J_{12} = \{i_6 - i_9 + \lambda(i_5 - i_7)\}$, $\lambda \neq 0$,

$J_{13} = \{i_5 + i_7 + i_8 - 3i_{10}\}$, $J_{14} = \{3i_5 - i_7 - i_8 - i_{10}\}$,

$J_{15} = \{i_5, i_{10}\}$, о.с. – флаг $\{R_0, R_2\}$,

$J_{16} = i_6, i_9$, о.с. – флаг $R_0, {}^2R_2$,

$J_{17} = \langle i_9, i_8 - i_{10} \rangle$, о.с. – флаг $\langle R_0, R_1, R_2^1 \rangle$,

$J_{18} = \langle i_9, i_5 - i_7 \rangle$, о.с. – флаг $\langle R_0, {}^1R_2^1 \rangle$,

$J_{19} = \langle i_5 - i_7, i_8 - i_{10} \rangle$, о.с. – флаг $\langle R_0, \tilde{R}_2^1 \rangle$. Волна означает, что в плоскости R_2^1 изотропная прямая точечно неподвижна.

$J_{20} = \langle i_6, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10} \rangle$, о.с. – пара (R_1^1, R_2^1), причем $R_1^1 \cap R_2^1 = R_0$ и 3-плоскость, содержащая R_2^1 и R_1^1, есть ${}^1R_3^1$.

$J_{21} = \langle i_6 - i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10} \rangle$, о.с. – три изотропных прямых, лежащих в одной изотропной плоскости и пересекающихся в одной точке.

$J_{22} = \langle i_6 - i_9, i_5 - i_7 + i_{10} \rangle$, $J_{23} = \langle i_6 + \lambda i_9, i_5 - i_7 + i_8 - i_{10} \rangle$, $\lambda \neq 0, \pm 1$.

$J_{24} = \langle i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}, i_8 - i_{10} \pm i_6 \pm i_9 \rangle$, $J_{25} = \langle i_5 - i_{10}, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10} \rangle$,

$J_{26} = \langle i_6 - i_9 + \lambda (i_5 - i_{10}), i_5 - i_7 - i_8 + i_{10} \rangle$, $J_{27} = \langle i_5 - i_{10}, i_6 - i_9 \rangle$,

$J_{28} = \langle i_8, i_9, i_{10} \rangle$, о.с. – две точки, определяющие R_1,

$J_{29} = \langle i_5, i_7, i_9 \rangle$, о.с. – две точки, определяющие ${}^1R_1$,

$J_{30} = \langle i_6, i_5 - i_7, i_8 - i_{10} \rangle$, о.с. – две точки, определяющие R_1^1,

$J_{31} = \langle i_6, i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10} \rangle$, о.с. – две пересекающиеся изотропные прямые, определяющие изотропную плоскость.

$J_{32} = \langle i_5 + i_{10}, i_6 - i_9, i_7 + i_8 \rangle$, о.с. – три изотропные плоскости, каждая пара из которых имеет только одну общую точку, общую для трех плоскостей.

$J_{33} = \langle i_5 - i_7, i_6 - i_9, i_8 - i_{10} \rangle$, $J_{34} = \langle i_5 - i_7, i_8 - i_{10}, i_6 + \lambda i_9 \rangle$, $\lambda \neq 0, \pm 1$

$J_{35} = \langle i_5 - i_{10}, i_6 - i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10} \rangle$,

$J_{36} = \langle i_9, i_5 - i_7, i_8 - i_{10} \rangle$, о. с. – $\langle R_0, {}^1R_2 \rangle$,

$J_{37} = \langle i_6, i_9, i_5 - i_7, i_8 - i_{10} \rangle$ – флаг $\langle R_0, R_1^1 \rangle$,

$J_{38} = \langle i_6, i_9, i_5 - i_{10}, i_7 - i_8 \rangle$, о.с. – две изотропные плоскости, имеющих только одну общую точку и симметричных относительно некоторой евклидовой плоскости.

$J_{39} = \langle i_5 - i_7, i_5 - i_{10}, i_6 + i_9, i_7 - i_8 \rangle$, $J_{40} = \langle i_5, i_{10}, i_6 + i_9, i_7 + i_8 \rangle$,

$J_{41} = \langle i_6, i_9, i_5 - i_7, i_5 - i_{10}, i_8 - i_{10} \rangle$ – флаг $\langle R_0, R_2^2 \rangle$,

$J_{42} = \langle i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10} \rangle$, о.с. – R_0.

2.3 Перечислим теперь полупрямые подалгебры. Для этого будем находить подпространства пространства $\overline{T}_4$, инвариантные относительно присоединенного представления подалгебр алгебры $O(4, 2)$. Элементы пространства $\overline{T}_4 = V_4$ будем записывать в виде: $a = (0, a^1, a^2, a^3, a^4)$. Инвариантность подпространства $K \subset \overline{T}_4$ относительно присоединенного представления некоторой алгебры $J_i, i = 1, ..., 42$ эквивалентна инвариантности этого пространства относительно присоединенного представления базиса этой алгебры. Заметим, что присоединенное представление $adi, i \in J$ в нашем случае определяется формулой

$$adi(a) = ai. \qquad \text{(I)}$$

Подпространства $\overline{K}$, инвариантные относительно adJ_i, достаточно искать с точностью до Adh, где $Adh(J_i)$, $h \subset O(4,2)$.

Для приведения подпространств, инвариантных относительно подалгебры adJ_i, будем пользоваться матрицами $h_1 - h_{16}$, записанными в (2.4). Чтобы каждый раз не проверять инвариантность базиса данной алгебры относительно Adh, выпишем формулы действия Adh_i на базисы данных алгебр.

Будем пользоваться формулой (2.1), полагая для краткости

$$Ad\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} = Adh, \quad \begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} = r.$$

Имеют место формулы:

$Adh_1(i_5 + i_{10}) = i_5 + i_{10}$, $Adh_2(i_5) = i_5$,

$Adh_3(i_6) = -i_6$, $Adh_3(i_6 - i_9) = i_9 - i_6$, $Adh_3(i_6 + \lambda i_9) = -i_6 - \lambda i_9$,

$Adh_3(i_9) = -i_9$, $Adh_3(i_5 - i_{10}) = i_5 - i_{10}$, $Adh_3(i_7 - i_8) = i_8 - i_7$,

$Adh_4(i_6) = i_6$, $Adh_4(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}) = (chJ + shJ)(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10})$,

$Adh_4(i_6 - i_9) = i_6 - i_9$, $Adh_5(i_8 - i_{10}) = i_8 - i_{10}$, $Adh_6(i_5 - i_7) = i_5 - i_7$,

$Adh_7(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}) = i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}$, $Adh_7(i_6 - i_9) = i_6 - i_9$,

$Adh_8(i_6) = -i_9$, $Adh_8(i_9) = -i_6$, $Adh_8(i_5 + i_{10}) = i_5 + i_{10}$,

$Adh_8(i_6 + i_8) = i_7 + i_8$, $Adh_9(i_6) = i_9$, $Adh_9(i_9) = i_6$

$Adh_9(i_6 - i_9) = i_6 - i_9$, $Adh_9(i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}) = i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}$,

$Adh_{10}(i_5 - i_7) = chJ(i_5 - i_7) + shJ(i_8 - i_{10})$,

$$Adh_{10}(i_8 - i_{10}) = shJ(i_5 - i_7) + chJ(i_8 - i_{10}),$$

$$Adh_{11}(i_5 + i_{10}) = i_5 + i_{10}, \quad Adh_{11}(i_7 + i_8) = i_9 - i_6, \quad Adh_{11}(i_6 - i_9) = i_7 + i_8$$

$$Adh_{12}(i_6) = -i_6, \quad Adh_{12}(i_9) = i_9, \quad Adh_{12}(i_8 - i_{10}) = -i_8 + i_{10},$$

$$Adh_{12}(i_5 - i_7) = i_5 - i_7, \quad Adh_{13}(i_6 - i_9) = i_6 - i_9,$$

$$Adh_{13}(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}) = i_5 - i_7 - i_8 + i_{10},$$

$$Adh_{14}(i_5 - i_7 + i_8 - i_{10} + 2i_6 - 2i_9) = -i_5 + i_7 - i_8 + i_{10} - 2i_6 + 2i_9,$$

$$Adh_5(i_6) = i_6, \quad Adh_{15}(i_9) = i_9, \quad Adh_{16}(i_6 + \lambda i_9) = i_6 + \lambda i_9,$$

$$Adh_{16}(i_6 - i_9) = i_6 - i_9, \quad Adh_{16}(i_5 - i_7) = chJ(i_5 - i_7) + shJ(i_8 - i_{10}),$$

$$Adh_{16}(i_8 - i_{10}) = shJ(i_5 - i_7) + chJ(i_8 - i_{10}),$$

$$Adh_{16}(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}) = -i_5 + i_7 + i_8 - i_{10},$$

$$Adh_{16}(i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}) = -i_5 + i_7 - i_8 + i_{10}.$$

Рассмотрим подалгебру $J_1 = \langle i_{10} \rangle$. Пусть подпространство пространства $\overline{T}_4$, натянутое на вектор $a = (0; a^1, a^2, a^3, a^4)$, инвариантно относительно adi_{10}. Это приводит к системе $a \cdot i_{10} = \lambda a$, или: $0 = \lambda a^1, \quad 0 = \lambda a^2, \quad -a^4 = \lambda a^3, \quad a^3 = \lambda a^4$.

Отсюда: $-a^4 = \lambda^2 a^4, \quad a^4 = 0, \quad a^3 = 0, \quad \lambda = 0$.

Вывод: относительно adi_{10} инвариантны все одномерные подпространства с базисами $a = (0, a^1, a^2, 0, 0)$, a^1, a^2-произвольные.

Чтобы двумерное подпространство, натянутое на векторы $a = (0, a^1, a^2, a^3, a^4)$ и $b = (0, b^1, b^2, b^3, b^4)$ было инвариантно относительно adi_{10}, необходимо, чтобы нашлись числа $\lambda, \mu, \nu, \delta,$ такие, что

$$a \cdot i_{10} = \lambda a + \mu b, \quad b \cdot i_{10} = \nu a + \delta b.$$

Это эквивалентно системе

$$\begin{gathered} -a^4 = \lambda a^3 + \mu b^3, \quad a^3 = \lambda a^4 + \mu b^4, \quad 0 = \lambda a^1 + \mu b^1, \quad 0 = \lambda a^2 + \mu b^2, \\ 0 = \nu a^1 + \delta b^1, \quad 0 = \nu a^2 + \delta b^2, \quad -b^4 = \nu a^3 + \delta b^3, \quad b^4 = \nu a^4 + \delta b^4. \end{gathered} \tag{3}$$

Рассмотрим следующие случаи.

а) $a^4 \neq 0, \quad b^4 \neq 0.$ Тогда можно положить: $a^4 = 1, \quad b^4 = 0, \quad b^3 = 1, \quad a^3 = 0.$ Из (3): $0 = \lambda, \quad -1 = \mu, \quad b^1 = 0, \quad b^2 = 0, \quad \delta = 0, \quad \nu^1 = 1, \quad a^1 = 0, \quad a^2 = 0.$

Таким образом, получили подпространство $\langle i_1, i_2 \rangle$.

б) $a^4 \neq 0, \quad b^3 = 0, \quad b^2 \neq 0.$ В этом случае можно положить: $a^4 = 1, \quad b^4 = 0, \quad b^2 = 1, \quad a^2 = 0.$ Из (3) следует $\lambda^2 = -1$. Система противоречива.

в) $a^4 \neq 0, \quad b^3 = b^2 = 0, \quad b^1 \neq 0.$ Можно положить: $a^4 = 1,$ $b^4 = 0, \quad b^1 = 1, \quad a^1 = 0.$

Система (3) противоречива.

г) $a^4 = b^4 = 0, \quad a^3 \neq 0, \quad b^2 \neq 0.$ Можно положить: $a^3 = 1,$ $b^3 = 0, \quad b^2 = 1 \quad a^2 = 0.$ Из (3): $a^3 = 0$ – противоречие.

д) $a^4 = b^4 = 0, \quad a^3 \neq 0, \quad b^2 \neq 0, \quad b^1 = 0.$ Можно положить: $a^3 = 1,$ $b^3 = 0, \quad b^1 = 1, \quad a^1 = 0.$ Из (3): $a^3 = 0$ – противоречие.

е) $a^4 = b^4 = a^3 = b^3 = 0.$ Получим подпространство $\langle i_3, i_4 \rangle$, которое удовлетворяет системе (3).

Таким образом, относительно adi_{10} инвариантны только подпространства: $\langle i_1, i_2 \rangle$, $\langle i_3, i_4 \rangle$.

Чтобы найти трехмерные подпространства пространства $\overline{T}_4$, инвариантные относительно adi_{10}, достаточно рассмотреть ортогональные дополнения к уже найденным одномерным инвариантным подпространствам. Они запишутся в виде: $\langle a^2 i_1 - a^1 i_2, i_3, i_4 \rangle$. Наконец, относительно adi_{10} будет инвариантно четырехмерное пространство $\langle i_1, i_2, i_3, i_4 \rangle = \overline{T}_4$.

При помощи Adh_1 подпространство $\langle a^1 i_1 + a^2 i_2 \rangle$ приводится к виду $\langle i_1 \rangle$. Этим же преобразованием подпространства $\langle a^2 i_1 - a^1 i_2, i_3, i_4 \rangle$ приводятся к $\langle i_2, i_3, i_4 \rangle$. При этом подалгебра $\langle i_{10} \rangle$ инвариантна относительно Adh_1 (2).

Таким образом, подпространства пространства $\overline{T}_4$, инвариантные относительно adi_{10}, приводятся к виду: $\langle i_1 \rangle$, $\langle i_1, i_2 \rangle$, $\langle i_3, i_4 \rangle$, $\langle i_2, i_3, i_4 \rangle$, $\langle i_1, i_2, i_3, i_4 \rangle$.

Рассмотрим подалгебру J_2. Поступая, как в предыдущем случае, получим, что подпространства, инвариантные относительно adJ_2, имеют вид:

$$\langle \lambda i_3 + \mu i_4 \rangle, \ \langle i_1, i_2 \rangle, \ \langle i_3, i_4 \rangle, \ \langle i_1, i_2, \mu i_3 - \lambda i_4 \rangle, \ \langle i_1, i_2, i_3, i_4 \rangle.$$

При помощи Adh_2 подпространства $\langle \lambda i_3 + \mu i_4 \rangle$ приводятся к $\langle i_3 \rangle$, а подпространства $\langle i_1, i_2, \mu i_3 - \lambda i_4 \rangle$ – к $\langle i_1, i_2, i_4 \rangle$. При этом подалгебра J_2 инвариантна относительно Adh_2 (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду:

$$\langle i_3 \rangle, \ \langle i_1, i_2 \rangle, \ \langle i_3, i_4 \rangle, \ \langle i_1, i_2, i_4 \rangle, \ \langle i_1, i_2, i_3, i_4 \rangle.$$

Рассмотрим подалгебру J_3. Инвариантные относительно adJ_3 подпространства имеют вид:

$$\langle i_1 \pm i_3\rangle,\ \langle \lambda i_2 + \mu i_4\rangle,\ \langle i_1 \pm i_3, \lambda i_2 + \mu i_4\rangle,\ \langle i_1, i_3\rangle,$$
$$\langle i_2, i_4\rangle,\ \langle i_1 \pm i_3\rangle^{\perp},\ \langle \lambda i_2 + \mu i_4\rangle^{\perp},\ \langle i_1, i_2, i_3, i_4\rangle,$$

где символом $\nu^{\perp}$ обозначается ортогональное дополнение подпространства ν пространства $\bar{T}_4$.

При помощи Adh_3 пространства $\langle i_1 + i_3\rangle$ и $\langle i_1 - i_3\rangle$, $\langle i_2 + i_4\rangle$ и $\langle i_2 - i_4\rangle$, $\langle i_1 + i_3, i_2 + i_4\rangle$ и $\langle i_1 - i_3, i_2 - i_4\rangle$, $\langle i_1 - i_3, i_2 + i_4\rangle$ и $\langle i_1 + i_3, i_2 - i_4\rangle$, $\langle i_1 + i_3, i_2\rangle$ и $\langle i_1 - i_3, i_2\rangle$, $\langle i_1 + i_3, i_4\rangle$ и $\langle i_1 - i_3, i_4\rangle$ сопряжены. При помощи Adh_4 пространство $\langle \lambda i_2 + \mu i_4\rangle$ переводится либо в $\langle i_2\rangle$, либо в $\langle i_4\rangle$, либо в $\langle i_2 \pm i_4\rangle$. При помощи Adh_{12} пространства $\langle i_1 + i_3, i_2 + i_4\rangle$ и $\langle i_1 - i_3, i_2 + i_4\rangle$ сопряжены. При этом подалгебра J_3 инвариантна относительно Adh_3, Adh_4 и Adh_{12} (2). Таким образом, инвариантные относительно adJ_3 подпространства приводятся к виду:

$$\langle i_2\rangle,\ \langle i_4\rangle,\ \langle i_1 + i_3\rangle,\ \langle i_2 + i_4\rangle,\ \langle i_1 + i_3, i_2\rangle,\ \langle i_1 + i_3, i_4\rangle,$$
$$\langle i_1, i_3\rangle,\ \langle i_2, i_4\rangle,\ \langle i_1 + i_3, i_2 + i_4\rangle,\ \langle i_1, i_3, i_4\rangle,\ \langle i_1, i_2, i_3\rangle,$$
$$\langle i_1 + i_3, i_2, i_4\rangle,\ \langle i_1, i_3, i_2 + i_4\rangle,\ \langle i_1, i_2, i_3, i_4\rangle.$$

Рассмотрим подалгебру J_4. Инвариантные относительно adJ_4 подпространства имеют вид: $\langle \lambda i_1 + \mu (i_2 - i_4)\rangle$, $\langle i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\rangle$, $\langle \lambda i_1 + \mu (i_2 - i_4)\rangle^{\perp}$, $\langle i_1, i_2, i_3, i_4\rangle$. При помощи Adh_5 подпространство $\langle \lambda i_1 + \mu (i_2 - i_4)\rangle$ сопряжено либо $\langle i_1\rangle$, либо $\langle i_2 - i_4\rangle$. При этом J_4 инвариантна относительно Adh_5 (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду:

$$\langle i_1\rangle,\ \langle i_2 - i_4\rangle,\ \langle i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\rangle,\ \langle i_2, i_3, i_4\rangle,\ \langle i_1, i_3, i_2 - i_4\rangle,\ \langle i_1, i_2, i_3, i_4\rangle.$$

Рассмотрим подалгебру J_5. Инвариантные относительно adJ_5 подпространства имеют вид: $\langle \lambda (i_2 - i_4) + \mu i_3\rangle$, $\langle i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\rangle$, $\langle \lambda (i_2 - i_4) + \mu i_3\rangle^{\perp}$, $\langle i_1, i_2, i_3, i_4\rangle$. При помощи Adh_6 подпространство $\langle \lambda (i_2 - i_4) + \mu i_3\rangle$ приводится к $\langle i_3\rangle$ или $\langle i_2 - i_4\rangle$. При этом подалгебра J_5 инвариантна относительно Adh_6 (2).

Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду:

$$\langle i_3\rangle,\ \langle i_2 - i_4\rangle,\ \langle i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\rangle,\ \langle i_1, i_2, i_4\rangle,\ \langle i_2 - i_4, i_1, i_3\rangle,\ \langle i_1, i_2, i_3, i_4\rangle.$$

Рассмотрим подалгебру J_6. Инвариантные относительно adJ_6 подпространства: $\langle \lambda (i_1 + i_3) + \mu (i_2 - i_4)\rangle$, $\langle \nu (i_1 + i_3) - \lambda (i_2 - i_4), \lambda i_1 - (1 + \nu) i_2 + i_4\rangle$. $\nu \neq 0$, $\langle i_1 - \lambda i_2, i_2 - i_4 + \lambda (i_1 + i_3)\rangle$, $\langle i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\rangle$, $\langle i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4\rangle$, $\langle \lambda (i_1 + i_3) + \mu (i_2 - i_4)\rangle^{\perp}$, $\langle i_1, i_2, i_3, i_4\rangle$.

При помощи Adh_7 пространство $\langle \lambda (i_1 + i_3) + \mu (i_2 - i_4)\rangle$ приводится к $\langle i_1 + i_3\rangle$ или $\langle i_1 + i_2 + i_3 - i_4\rangle$. При помощи Adh_{13} эти пространства сопряжены. При помощи Adh_7 пространство $\langle \nu (i_1 + i_3) - \lambda (i_2 - i_4), \lambda i_1 - (1 + \nu) i_2 + i_4\rangle$ приводится к $\langle i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4\rangle$ или $\langle i_1 + i_2 + i_3 - i_4, \lambda i_1 - (\lambda + 1) i_2 + i_4\rangle$. При помощи

Adh_{13} пространство $\langle i_1+i_2+i_3-i_4, \lambda i_1-(\lambda+1)i_2+i_4\rangle$ приводится к пространству $\langle i_1+i_3, \lambda i_2+\mu i_4\rangle$. При помощи Adh_8 пространства $\langle i_2-i_4, \lambda i_1+\mu i_3\rangle$ и $\langle i_1+i_3, \lambda i_2+\mu i_4\rangle$ сопряжены. При помощи Adh_7 пространство $\langle i_1-\lambda i_2, i_2-i_4+\lambda(i_1+i_3)\rangle$ при $\lambda\neq 1$ приводится к виду $\langle i_1+i_3, \lambda i_2+\mu i_4\rangle$, а пространство $\langle i_1-i_2, i_1+i_2+i_3-i_4\rangle$ при помощи Adh_4 – к виду $\langle i_1+i_3, \lambda i_2+\mu i_4\rangle$. При помощи Adh_4 пространство $\langle i_1+i_3, \lambda i_2+\mu i_4\rangle$ приводится к $\langle i_1+i_3, i_2\rangle$, $\langle i_1+i_3, i_4\rangle$ или к $\langle i_1+i_3, i_2\pm i_4\rangle$. При этом подалгебра J_6 инвариантна относительно Adh_4, Adh_7, Adh_8, Adh_{13}. (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\langle i_1+i_3\rangle$, $\langle i_1+i_3, i_2\pm i_4\rangle$, $\langle i_1+i_3, i_2\rangle$, $\langle i_1+i_3, i_4\rangle$, $\langle i_1+i_3, i_2, i_4\rangle$, $\langle i_1, i_2, i_3, i_4\rangle$.

Рассмотрим подалгебру J_7. Инвариантны относительно adJ_7 подпространства: $\langle i_1, i_2\rangle$, $\langle i_3+\mu i_1-\lambda i_2, i_4+\lambda i_1+\mu i_2\rangle$, $\langle i_1, i_2, i_3, i_4\rangle$. При помощи Adh_1 подпространства $\langle i_3+\mu i_1-\lambda i_2, i_4+\lambda i_1+\mu i_2\rangle$ приводится к виду $\langle i_3+\lambda i_1, i_4+\lambda i_2\rangle$. При этом подалгебра J_7 инвариантна относительно Adh_1 (2).

Таким образом, инвариантные пространства приводятся к виду:

$$\langle i_1, i_2\rangle,\ \langle i_3+\lambda i_1, i_4+\lambda i_2\rangle,\ \langle i_1, i_2, i_3, i_4\rangle.$$

Рассмотрим подалгебру J_8. Относительно adJ_8 инвариантны подпространства $\langle\lambda(i_1\pm i_3)+\mu(i_2\mp i_4)\rangle$, $\langle i_4+\lambda i_1+\mu i_2, i_2-\lambda i_3+\mu i_4\rangle$, $\langle i_2\pm i_4, \pm i_1+\lambda i_2+i_3\rangle$, $\langle i_2-i_4, i_1\pm i_3\rangle$, $\langle i_2+i_4, i_1\pm i_3\rangle$, $\langle i_4+\lambda i_3, i_2-\lambda i_1\rangle$, $\langle\lambda(i_1\pm i_3)+\mu(i_2\mp i_4)\rangle^{\perp}$, $\langle i_1, i_2, i_3, i_4\rangle$, $\langle i_1, i_3\rangle$, $\langle i_2, i_4\rangle$.

При помощи Adh_3 пространства $\langle\lambda(i_1+i_3)+\mu(i_2-i_4)\rangle$ и $\langle\lambda(i_1-i_3)+\mu(i_2+i_4)\rangle$ сопряжены. При помощи Adh_7 пространство $\langle\lambda(i_1+i_3)+\mu(i_2-i_4)\rangle$ переводится в $\langle i_1+i_3\rangle$ или $\langle i_1+i_2+i_3-i_4\rangle$. При помощи Adh_{13} эти пространства сопряжены. При помощи Adh_4 пространство $\langle i_4+\lambda i_1+\mu i_2, i_2-\lambda i_3+\mu i_4\rangle$ приводится к $\langle\lambda i_1+\mu i_4, \mu i_2-\lambda i_3\rangle$ или $\langle i_1+i_3, i_2\pm i_4\rangle$. При помощи Adh_7 пространство $\langle\lambda i_1+\mu i_4, \mu i_2-\lambda i_3\rangle$ приводится к $\langle i_1+i_3, \lambda(i_1-i_3)+\mu(i_2+i_4)\rangle$ или $\langle i_1+i_2, i_3-i_4\rangle$. При помощи Adh_3 пространства $\langle i_2-i_4, -i_1+\lambda i_2+i_3\rangle$ и $\langle i_2+i_4, i_1+\lambda i_2+i_3\rangle$, $\langle i_1+i_3, i_2-i_4\rangle$ и $\langle i_1-i_3, i_2+i_4\rangle$, $\langle i_1+i_3, i_2+i_4\rangle$ и $\langle i_1-i_3, i_2-i_4\rangle$, $\langle i_1+i_3, i_1+\mu(i_2+i_4)\rangle$ и $\langle i_1-i_3, i_1+\lambda(i_2-i_4)\rangle$ сопряжены. При помощи Adh_7 подпространства $\langle i_2+i_4, i_1+\lambda i_2+i_3\rangle$ и $\langle i_1-i_3, i_1+\lambda(i_2-i_4)\rangle$ при $\lambda\neq 0$ сопряжены, а пространство $\langle i_1+i_3, \lambda(i_1-i_3)+\mu(i_2+i_4)\rangle$ при $\lambda\neq 0$ входит в семейство $\langle i_1+i_3, i_1+\lambda(i_2+i_4)\rangle$. При этом подалгебра J_8 инвариантна относительно Adh_3, Adh_4, Adh_7, Adh_{13} (2). Таким образом, инвариантные относительно adJ_8 подпространства приводятся к виду: $\langle i_1+i_3\rangle$, $\langle i_2-\lambda i_1, i_4+\lambda i_3\rangle$, $\langle i_1-i_3, i_2\pm i_4\rangle$, $\langle i_1-i_3, i_1+\lambda(i_2-i_4)\rangle$, $\langle i_1+i_3\rangle^{\perp}$, $\langle i_1, i_2, i_3, i_4\rangle$.

Рассмотрим подалгебру J_9. Относительно adJ_{10} инвариантны подпространства: i_1, i_2 , i_3, i_4 , i_1, i_2, i_3, i_4 .

Рассмотрим подалгебру J_{10}. Относительно adJ_{10} инвариантны подпространства: $i_1 \pm i_3$, $i_2 \pm i_4$, i_1, i_3 , i_2, i_4 , $i_1 + i_3, i_2 \pm i_4$, $i_1 - i_3, i_2 \pm i_4$, $i_1 \pm i_3, i_2, i_4$, $i_2 \pm i_4, i_1, i_3$, i_1, i_2, i_3, i_4 .

При помощи Adh_3 пространства $i_1 + i_3$ и $i_1 - i_3$, $i_2 - i_4$ и $i_2 + i_4$, $i_1 + i_3, i_2 \pm i_4$ и $i_1 - i_3, i_2 \mp i_4$ сопряжены. При этом подалгебра J_{10} инвариантна относительно Adh_3 (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду $i_1 + i_3$, $i_2 + i_4$, i_1, i_3 , i_2, i_4 , $i_1 + i_3, i_2 \pm i_4$, $i_1 + i_3, i_2, i_4$, $i_2 + i_4$, i_1, i_2, i_3, i_4 .

Рассмотрим подалгебру J_{11}. Относительно adJ_{11} инвариантны пространства: $i_1 - i_3$, $i_2 - i_4$, $i_1 - i_3, i_2 \pm i_4$, $i_1 + i_3, i_2 - i_4$, $i_1 - i_3, i_2, i_4$, $i_2 - i_4, i_1, i_3$, i_1, i_2, i_3, i_4 . При помощи Adh_{14} подпространства $i_1 - i_3$ и $i_2 - i_4$, $i_1 - i_3, i_2 + i_4$ и $i_1 + i_3, i_2 - i_4$ сопряжены. При этом J_{11} инвариантна относительно Adh_{14} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $i_1 - i_3$, $i_1 - i_3, i_2 \pm i_4$. $i_1 - i_3, i_2, i_4$, i_1, i_2, i_3, i_4 .

Рассмотрим подалгебру J_{12}. Относительно adJ_{12} инвариантны подпространства: $i_2 \mp i_4, i_1 \pm i_3$, i_1, i_2, i_3, i_4 .

Рассмотрим подалгебру J_{13}. Относительно adJ_{13} инвариантны подпространства: $i_1 + i_3, i_2 - i_4$, i_1, i_2, i_3, i_4 .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белько, И. В. Подгруппы группы Лоренца / И. В. Белько, А. С. Феденко // Докл. АН БССР. – 1970. – Т. 14. – № 6. – С. 393–395.

2. Белько, И. В. Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре / И. В. Белько // Изв. АН БССР. Сер. физ-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 5–13.

3. Хабибуллина, Р. Н. Классификация групп движений биаксиального пространства гиперболического типа / Р. Н. Хабибуллина, А. П. Широков // Уч. зап. Казан. ун-та. – 1968. – Т. 128, кн. 3. – С. 154–163.

4. Юдов, А. А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и её алгебру Ли. Проблема эквивалентности подмногообразий пространства $^2R_4$ / А. А. Юдов // Изв. АН БССР. – 1989. – Деп. в ВИНИТИ, № 1498-В89.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.10.2016

Rakovich A.M., Yudov A.A. **Classification of Subgroups Lie Whether the Groups of Lie Motions of Four-Dimensional Pseudo-Euclidean Space of Signature Zero**

The work is classified the related subgroup If the Lie groups of motions of four-dimensional pseudo-Euclidean space of signature zero – space $^2R_4$. Are the invariant plane and straight for such subgroup Whether their images of stationarity.