УДК 515.1

А.О. Пришляк[1], Д.Н. Скочко[2]
[1]*д-р физ.-мат. наук, проф. каф. геометрии топологии и динамических систем Киевского государственного университета имени Т. Шевченко*
[2]*аспирант каф. геометрии топологии и динамических систем Киевского государственного университета имени Т. Шевченко*

АТОМЫ С ОДНОЙ, ДВУМЯ И ТРЕМЯ КРИТИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МОРСА НА ПОВЕРХНОСТЯХ С КРАЕМ

Теория функций Морса является одним из основных инструментов для исследования топологических объектов. Данная статья посвящена исследованиям атомов функций Морса, которые заданы на поверхностях с краем. Присутствуют и некоторые ограничения на атомы: они могут иметь сложность от одного до трех и обязательно должны иметь хотя бы одну критическую точку, которая отвечает локальному минимуму или максимуму компоненты края относительно функции Морса. В работе найдены и приведены иллюстрации всех таких атомов, а именно, один атом сложности один, пять атомов сложности два и сорок семь атомов сложности три.

Введение

Теория функций Морса является одним из основных инструментов для исследования топологических объектов. Она развивалась во многих работах, например, таких как [1; 2, с. 18; 3, с. 66–147], в которых были сформулированы основные понятия теории. В [3, с. 74] рассмотрено простые функции Морса для двумерных многообразий; в [4, с. 40] – сложные функции Морса, на каждом критическом уровне которой может быть 2 или 3 критические точки, т.е. исследованы все возможные -атомы сложности 2 и 3. Кроме того, в работах [5, с. 49; 6, с. 61; 7, с. 799; 8, с. 22; 9, с. 1129] исследуются случаи функций Морса на двух- и трехмерных многообразиях с краем.

В [1, с. 138] найдены все атомы для двумерных многообразий без края. Любой из них может быть атомом для функции Морса f, заданной на некоторой поверхности X^2 с краем, однако эти атомы не учитывают особенностей, возникающих в окрестности точек локальных минимумов и максимумов компонент края многообразия относительно ограничения функции f на край. Поэтому для поверхностей с краем к атомам сложности один: A, B, $\tilde{B}$ стоит добавить еще два типа атомов C_1, отвечающий локальному минимуму, и C_2, отвечающий локальному максимуму ограничения функции f на край.

Целью данной работы является нахождение всех атомов для функций Морса, заданных на двумерных многообразиях с краем, которые содержат одну, две или три критические точки и хотя бы одна из этих точек отвечает C_1- или C_2-особенности.

1. Атомы на замкнутых поверхностях

Пусть $f(x)$ – функция, которая задана на гладком многообразии X^2, и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – гладкие регулярные координаты в окрестности точки x.

Определение 1. Точка x называется *критической* для функции f, если дифференциал $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ обращается в ноль в точке x. Это эквивалентно условию преобразования в ноль всех частных производных в данной точке. Критическая точка x называется *невырожденной*, если второй дифференциал $d^2 f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ невырожденный в этой точке. Это эквивалентно тому, что матрица вторых частных производных имеет определитель, отличный от нуля.

Согласно лемме Морса [2], в окрестности каждой невырожденной критической точки всегда можно выбрать такие локальные координаты, в которых функция запишется в виде квадратичной формы: $f(x) = -x_1^2 - x_1^2 - \cdots + x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2$. Для каждой невырожденной критической точки число λ определяется однозначно и называется ее индексом. Таким образом, на поверхности может существовать только три типа критических точек: минимум, максимум и седловая.

Определение 2. Гладкая функция называется *функцией Морса,* если все ее критические точки невырожденные. Мы также будем требовать, чтобы критические точки не лежали на краю и все критические точки ограничения функции на край были невырожденными. Функция Морса, которая на каждом критическом уровне имеет только одну критическую точку, называется *простой*, а во всех остальных случаях – *сложной*.

Пусть f – функция Морса на поверхности X^2, а g – функция Морса на другой поверхности Y^2. Рассмотрим (X^2, f) и (Y^2, g).

Определение 3. Функции Морса f и g на поверхностях X^2 и Y^2 называются послойно-эквивалентными, если существует диффеоморфизм $\mu : X^2 \longrightarrow Y^2$, переводящий связные компоненты линий уровня функции f в связные компоненты линий уровня функции g. В этом случае говорят, что пара (X^2, f) послойно эквивалентна паре (Y^2, g).

Определение 4. *Атомом* называется окрестность P^2 критического слоя, задаваемая неравенством $c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon$ для достаточно малого ε, расслоенная на линии уровня функции f и рассматриваемая с точностью до послойной эквивалентности.

Для случая двумерных многообразий без края вполне достаточно трех атомов A (локальный минимум или максимум), B (седловая точка) и $\tilde{B}$ (случай вклеивания листа Мебиуса).

Определение 5. Атом называется *простым,* если функция Морса f в паре (P^2, f) – простая. Остальные атомы называются *сложными.*

Определение 6. Рассмотрим пару (P^2, f), где P^2 – связная компактная поверхность с непустым краем ∂P^2, а f – функция Морса на ней, имеющая ровно одно критическое значение, причем $f^{-1}(c - \varepsilon) \cup f^{-1}(c + \varepsilon) = \partial P^2$. Класс оснащенной послойной эквивалентности этой пары (P^2, f) будет называться -*атомом*, или *оснащенным атомом.*

2. Атомы сложности 1 и 2 для многообразий с краем

Пусть f – функция Морса на поверхности M^2 с краем. Исследуем, сколько всего существует атомов для сложных функций Морса на M^2, содержащие одну, две или три критические точки на одном критическом уровне. Как отмечено ранее, существует пять типов критических точек A, B, $\tilde{B}$, C_1 и C_2. Для построения многообразий с краем удобно воспользоваться представлением атома в виде склейки крестов и полос, изображенных на рисунке 1, где заштрихованные участки – это положительная часть окрестности критического слоя, а белые – отрицательная часть. Стрелки $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \eta, \theta, \vartheta$ указывают направление роста функции f и места склейки полосок и крестов.

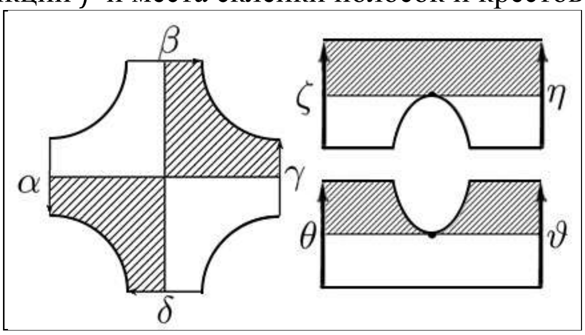

Рисунок 1. – Кресты и полосы для создания склеек атомов

Следует отметить, что функция Морса $f: M^2 \to R$ должна удовлетворять следующие условия:

1) все ее критические точки невырождены и не лежат на ∂M^2;

2) край многообразия можно представить в виде объединения

$$\partial M^2 = \partial M_-^2 \cup \partial M_0^2 \cup \partial M_+^2,$$

такого, что ограничение f_∂ функции f на ∂M_0^2 является функцией Морса, и если множество $\partial M_-^2 \neq \emptyset$ ($\partial M_+^2 \neq \emptyset$), то функция f принимает на ней минимальное (максимальное) значение. При этом пересечение $V_- = \partial M_-^2 \cap \partial M_0^2$ и $V_+ = \partial M_0^2 \cap \partial M_+^2$ будут 0-мерными многообразиями, которые называются углами, а сама тройка $(M^2, \partial M^2, V_- \cup V_+)$ – поверхностью с углами. Критические значения такой функции состоят из критических значений функций f и f_∂. Критические значения для функций Морса f и соответствующие им атомы рассмотрены в [3, с. 138].

В дальнейшем под *атомами для функций Морса, заданных на многообразиях с краем,* будем понимать атом функции Морса, содержащий обязательно хотя бы одну из двух особенностей C_1 или C_2. В таком случае -атомов с одной критической точкой для двумерных многообразий с краем существует только два: C_1 и C_2 (рисунок 2), – и они соответствуют одному атому.

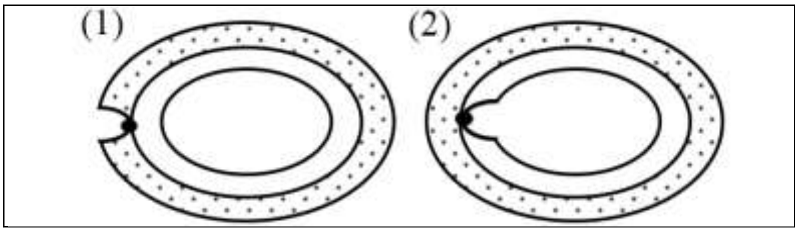

Рисунок 2. – Атомы сложности 1

Для случая, когда атом имеет сложность 2, имеет место следующее свойство.

Теорема 1. Для сложных функций Морса, заданных на двумерных многообразиях с краем, существует 5 атомов сложности 2, содержащих локальные минимумы и максимумы компонент края.

Доказательство. Атом, имеющий две критические точки, можно представить в виде двух вариантов склеек: склейка креста с полосой или склейки двух полос.

1. Исследуем сколько существует вариантов для приклеивания полосы к кресту. Полосы с C_1- и C_2-особенностями имеют по два места для склейки θ, ϑ и ζ, η соответственно, а крест – четыре: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. В дальнейшем выражение $\alpha\beta$ означает, что α приклеено к β.

Ориентированные атомы. Рассмотрим два типа склеек $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ и $(\alpha\delta, \gamma\beta)$. Они образуют два -атома, соответствующие атому B (седловая критическая точка).

В первую склейку можно вклеить полосу с C_2-особенностью двумя способами: $(\alpha\zeta, \eta\beta, \gamma\delta)$ и $(\alpha\beta, \gamma\zeta, \eta\delta)$. Эти склейки задают один и тот же атом, показанный на рисунке 3(1), с точностью до поворота на 180^0. Во вторую склейку можно вклеить полосу с C_1-особенностью также двумя способами: $(\alpha\theta, \vartheta\delta, \beta\gamma)$ и $(\alpha\delta, \beta\vartheta, \theta\gamma)$. Но, как и в предыдущем случае, полученные склейки задают один и тот же атом с точностью до поворота на 180^0 – рисунок 3(2).

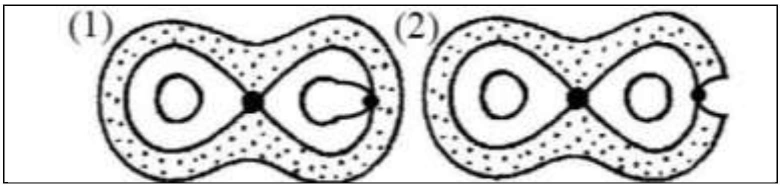

Рисунок 3. – Ориентируемые атомы сложности 2 с одной седловой точкой

Неориентированные атомы. Склейка $(\alpha\gamma, \beta\delta)$ отвечает атому $\tilde{B}$. В нее можно вклеить полоску $\theta\vartheta$ двумя способами: $(\alpha\theta, \vartheta\gamma, \beta\delta)$ и $(\alpha\gamma, \beta\theta, \vartheta\delta)$, – оба из которых соответствуют одному -атому (рисунок 4(2)), и полоску $\zeta\eta$ двумя способами: $(\alpha\gamma, \beta\zeta, \eta\delta)$ и $(\alpha\zeta, \eta\gamma, \beta\delta)$, соответствующими f-атому (рисунок 4(1)). Заменив у первого -атома цвета окрестностей на противоположные, получим второй f-атом. Таким об-разом, существует только один атом сложности 2, обе критические точки которого являются C_1- или C_2-особенностями.

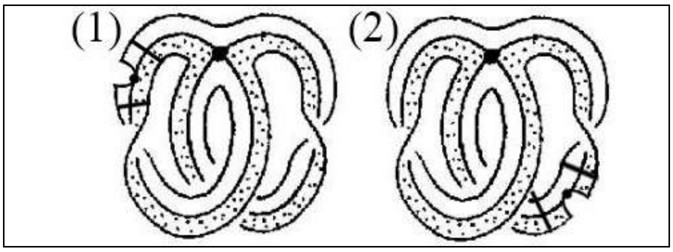

Рисунок 4. – Неориентируемые атомы сложности 2

2. Склейка двух полос дает такие варианты атомов (рисунок 5), все из которых являются ориентированными:

1) $(\theta_1\vartheta_2, \theta_2\vartheta_1)$ – рисунок5(1);
2) $(\vartheta\zeta, \theta\eta)$ – рисунок5(2);
3) $(\theta\eta, \vartheta\theta)$ – рисунок5(3);
4) $(\zeta_1\eta_2, \zeta_2\eta_1)$ – рисунок (4).

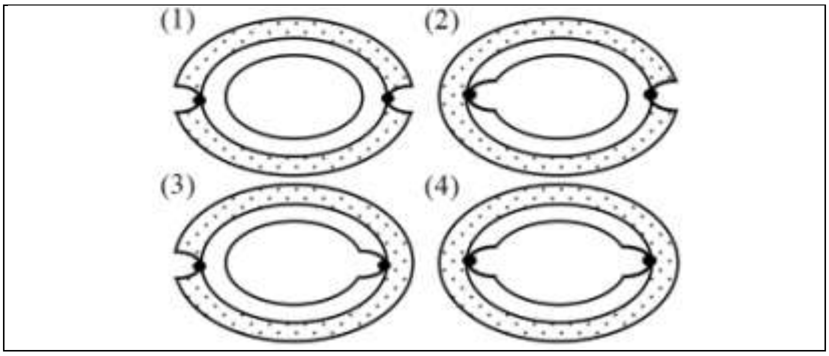

Рисунок 5. – Ориентируемые атомы сложности 2 без седловых точек

Атом (1) и (4), так же как (2) и (3), являются -атомами одного атома. Таким образом, существует только два атома, имеющих две критические точки, каждая из которых является C_1- или C_2-особенностью.

Итак, всего существует 4 ориентированных атома с двумя критическими точками и 1 неориентированный атом для функций Морса, заданные на поверхности с краем.

3. Атомы сложности 3 для многообразий с краем

Теорема 2. Для сложных функций Морса, заданных на двумерных многообразиях с границей, существует 47 атомов сложности 3, содержащих локальные минимумы и максимумы компонент пределы.

Доказательство. Атом сложности 3 можно получить следующими типами склейки:

1) склейка креста с двумя полосами;
2) склейка двух крестов с одной полосой;
3) склейка трех полос.

1. Пусть крест склеен по следующему закону: $(\alpha\beta, \gamma\delta)$. Он соответствует атому, на критическом уровне которого находится одна седловая точка. В него можно вклеить две полосы восемью способами (рисунок 6):

1) $(\alpha\theta, \vartheta\zeta, \eta\gamma, \beta\delta)$;
2) $(\alpha\theta_1, \vartheta_1\theta_2, \vartheta_2\gamma, \beta\delta)$;
3) $(\alpha\zeta_1, \eta_1\zeta_2, \eta_2\gamma, \beta\delta)$;
4) $(\alpha\zeta, \eta\theta, \vartheta\gamma, \beta\delta)$;
5) $(\alpha\zeta, \eta\gamma, \beta\vartheta, \theta\delta)$;
6) $(\alpha\theta, \vartheta\gamma, \beta\zeta, \eta\delta)$;
7) $(\alpha\zeta_1, \eta_1\gamma, \beta\eta_2, \zeta_2\delta)$;
8) $(\alpha\theta_1, \vartheta_1\gamma, \beta\vartheta_2, \theta_2\delta)$.

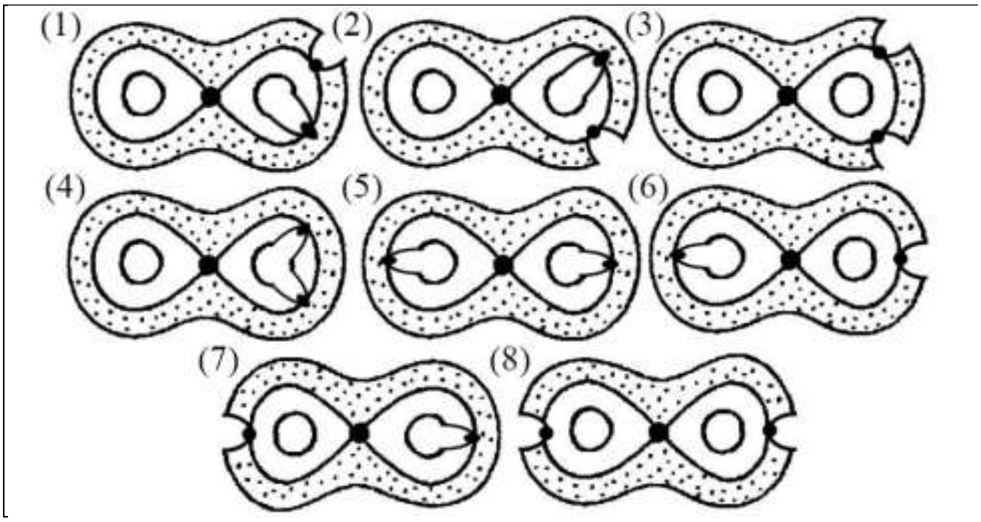

Рисунок 6. – Ориентируемые атомы сложности 3 с одной седловой точкой

Первые четыре варианта соответствуют тем случаям, когда обе полосы вклеиваются с одной стороны относительно седловой критической точки, а остальные четыре – с разных. Варианты (1) и (2) являются гомеоморфными относительно осевой симметрии, а варианты (6) и (7) – относительно поворота на 180^0. Таким образом, существует шесть ориентируемых атомов сложности 3 с одной седловой точкой.

Пусть крест склеен неориентированно, т.е. $(\alpha\gamma, \beta\delta)$, аналогично предыдущему случаю, существует четыре склейки, где полоски располагаются на одной стороне относительно критической точки креста и четыре на разных (рисунок 7):

1) $(\alpha\theta, \vartheta\zeta, \eta\gamma, \beta\delta)$;
2) $(\alpha\theta_1, \vartheta_1\theta_2, \vartheta_2\gamma, \beta\delta)$;
3) $(\alpha\zeta_1, \eta_1\zeta_2, \eta_2\gamma, \beta\delta)$;
4) $(\alpha\zeta, \eta\theta, \vartheta\gamma, \beta\delta)$;
5) $(\alpha\zeta, \eta\gamma, \beta\vartheta, \theta\delta)$;
6) $(\alpha\theta, \vartheta\gamma, \beta\zeta, \eta\delta)$;
7) $(\alpha\zeta_1, \eta_1\gamma, \beta\eta_2, \zeta_2\delta)$;
8) $(\alpha\theta_1, \vartheta_1\gamma, \beta\vartheta_2, \theta_2\delta)$.

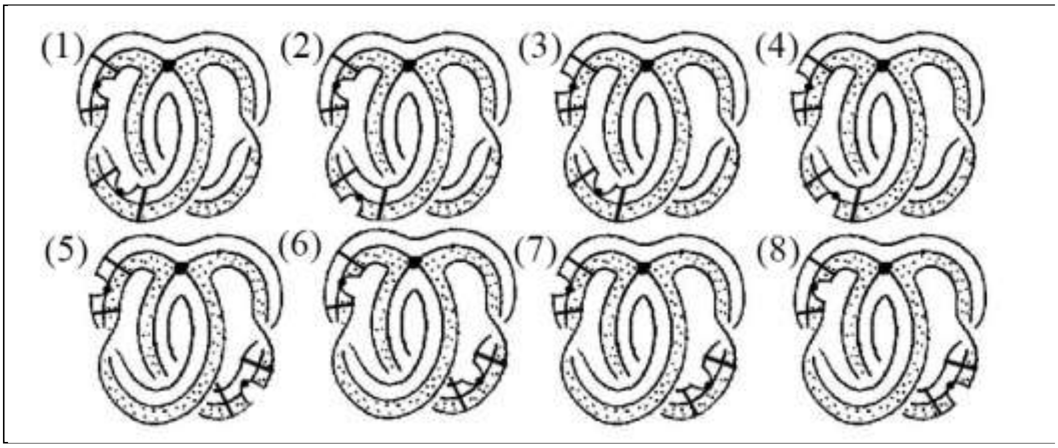

Рисунок 7. – Неориентируемые атомы сложности 3

Атомы (1) и (4) гомеоморфны, а (5) и (6) являются f -атомами одного атома. Таким образом, существует шесть не ориентируемых атомов сложности три.

2. Существует четыре ориентированных атома сложности два, образованные склеиванием двух крестов:

1) $(\alpha_1\beta_2, \beta_1\gamma_2, \gamma_1\delta_2, \delta_1\alpha_2)$;
2) $(\alpha_2\beta_1, \beta_2\alpha_1, \gamma_2\delta_1, \delta_2\gamma_1)$;
3) $(\alpha_1\beta_1, \gamma_1\beta_2, \delta_1\alpha_2, \gamma_2\delta_2)$;
4) $(\alpha_1\beta_1, \gamma_1\beta_2, \delta_1\gamma_2, \alpha_2\delta_2)$;

Вклеить полосу в первую склейку можно восемью способами: четырьмя для вклейки полосы локального максимума (каждый из трех последних может быть получен из первого поворотом на 180^0 или осевой симметрией) и четырьмя для минимума (три последних из которых также могут быть получены поворотом первого на 180^0 или осевой симметрией).

Таким образом, существует два атома, которые на рисунке 9 пронумерованы как 1 и 2, но, заменив цвета первого атома на противоположные, получим атом под номером 2; следовательно, 1 и 2 являются двумя -атомами одного атома.

Для второй склейки существует восемь вариантов атомов, которые разбиваются на пары таким образом, чтобы в каждой из пар второй атом можно было получить из первого осевой симметрией; следовательно, каждой паре соответствует по одному атому, а потому существует 4 атома, которые изображены на рисунке 8 под номерами от 3 до 6.

Для третьей склейки также существует четыре пары с симметричными атомами; представители каждой из пар имеют на рисунке 8 номера от 7 до 10. Для четвертой склейки существует 6 атомов, их номера – 12–16, для атомов под номерами 15 и 16 существует по паре симметричных атомов.

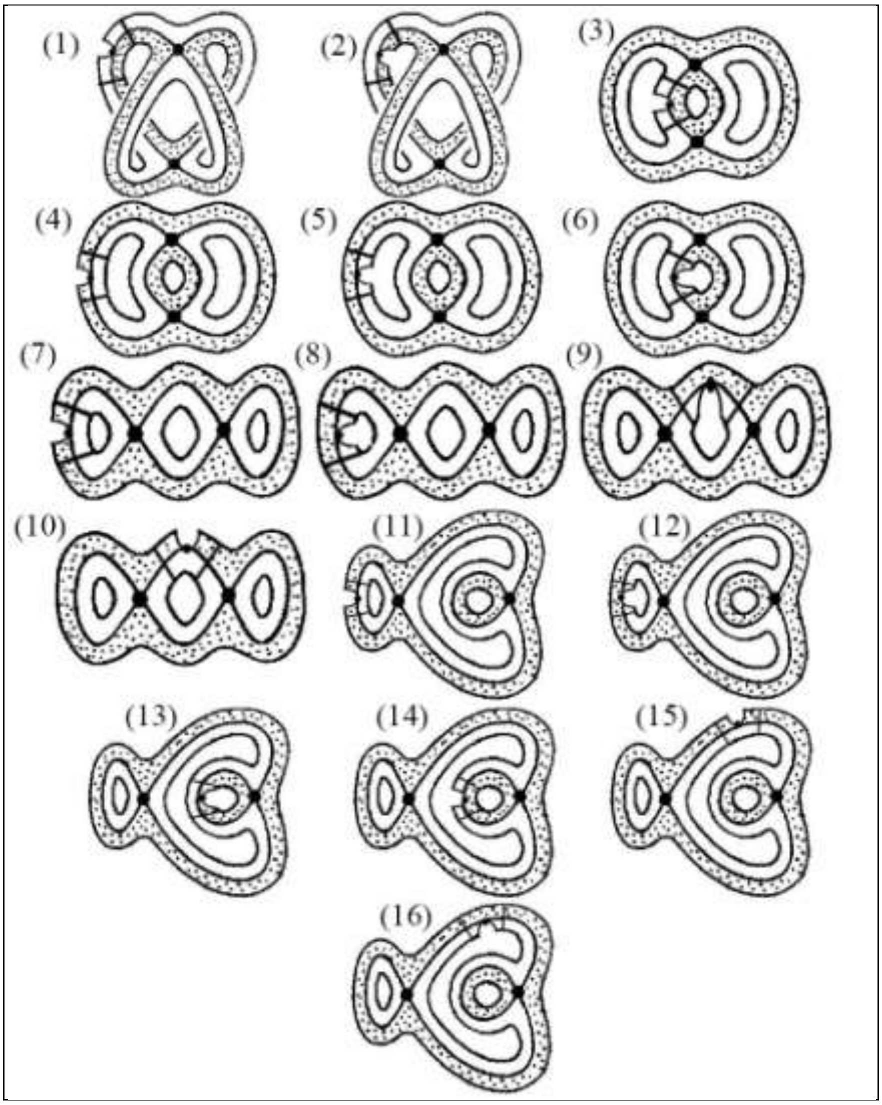

Рисунок 8. – Ориентированные атомы сложности 3 с двумя седловыми точками

Итак, существует 15 ориентированных атомов сложности три, которые можно представить в виде склейки из двух крестов и одной полосы.

Существует четыре типа неориентированных атомов сложности два, каждый из которых можно представить в виде склейки двух крестов:

1) $(\alpha_1\beta_2, \gamma_1\alpha_2, \beta_1\gamma_2, \delta_1\delta_2)$;

2) $(\alpha_1\alpha_2, \beta_1\delta_2, \gamma_1\beta_2, \delta_1\gamma_2)$;

3) $(\alpha_1\beta_1, \gamma_1\beta_2, \alpha_2\gamma_2, \delta_1\delta_2)$;

4) $(\alpha_1\gamma_1, \delta_1\beta_2, \beta_1\delta_2, \alpha_2\gamma_2)$.

Для первой склейки существует четыре пары атомов, каждой из которых соответствует по одному атому с номерами от 1 до 4 (рисунок 9).

Для второй склейки имеется две пары симметричных атомов, которым на рисунке 10 соответствуют номера 5 и 6, и два атома – 7 и 8, которые симметричны сами себе.

Третья склейка не имеет симметрий и поворотов, следовательно, все восемь возможных атомов не гомеоморфны между собой (рисунок 10); их номера – 9–16.

Для четвертой существует две склейки под номерами 17 и 18, причем 17 получается из 18 заменой цветов на противоположные, следовательно, они соответствуют одному атому. Кроме того, еще есть две пары симметричных склеек, которым даны номера 19 и 20, но 19 аналогичным образом можно получить из 20.

Таким образом, всего существует 18 неориентированных атомов сложности три, которые можно представить в виде склейки двух крестов и одной полосы.

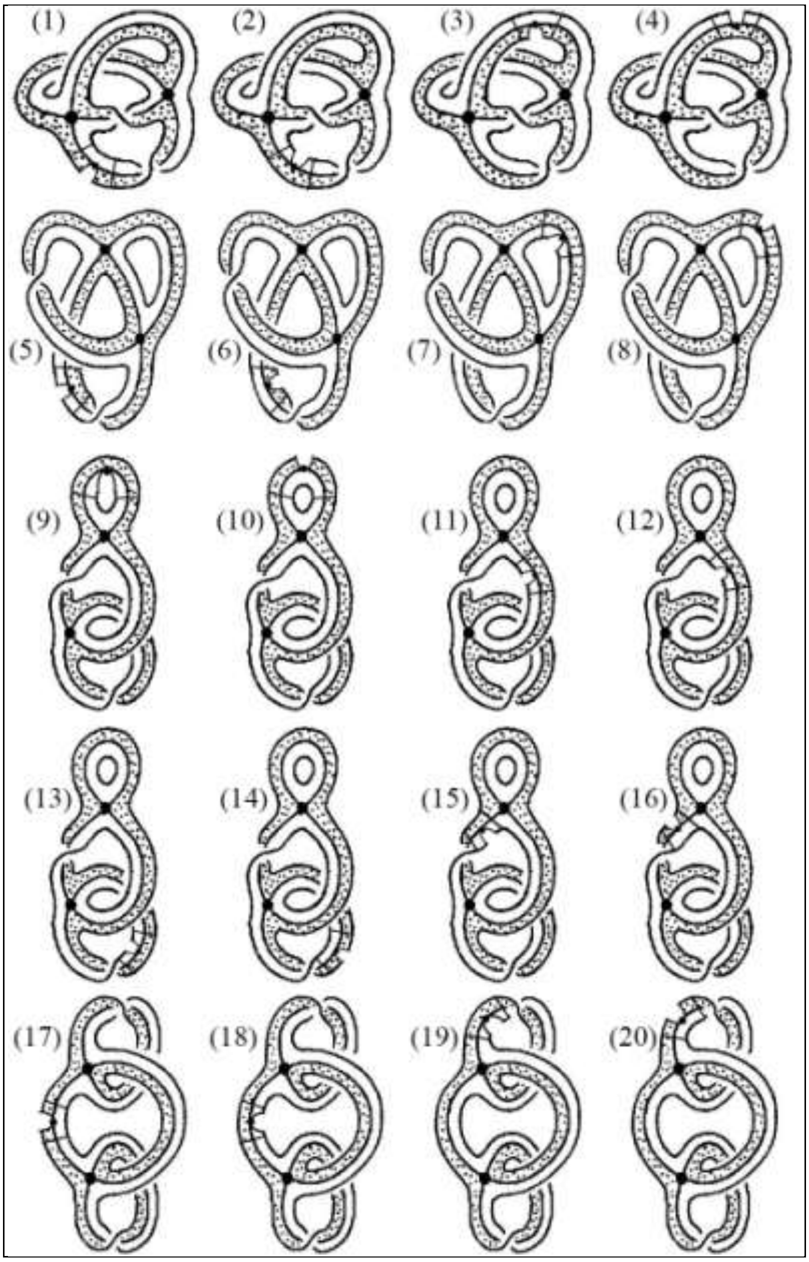

Рисунок 9. – Неориентированные атомы сложности три

3. Случаев, когда атом образован склеиванием двух полос, всего 4:

1) все три критические точки являются C_1-особенностью (рисунок 10(1));

2) все три критические точки являются C_2-особенностью (рисунок 10(2));

3) одна C_1- и две C_2-особенности (рисунок 10(3));

4) одна C_2- и две C_1-особенности (рисунок 10(4)).

Случаи (1) и (2), так же, как и (3) и (4), соответствуют различным -атомом одного атома, а потому существует только два атома сложности 3, склеенных только из полос.

Следовательно, всего существует 47 атомов сложности 3 для функций Морса, заданной на поверхности с краем.

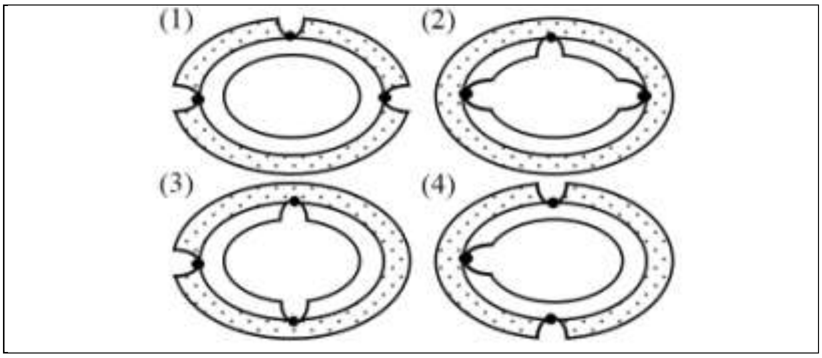

Рисунок 10. – Склейки с трех лент

Таким образом, для функций Морса, заданных на поверхностях с краем, существует 1 атом сложности один, 5 атомов сложности два и 47 атомов сложности три.

Заключение

В данной работе найдены все атомы с одной, двумя и тремя критическими точками функций Морса на замкнутых двумерных многообразиях с краем. Все данные занесены в таблицу.

Таблица. – Характеристики атомов сложности один, два и три

Тип	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Сумма
Сложность атома	1		2				3			
Количество крестов	0	1	1	0	1	1	2	2	0	
Количество полос	1	1	1	2	2	2	1	1	3	53
Ориентированный (+/–)	+	+	–	+	+	–	+	–	–	
Количество атомов	1	2	1	2	6	6	15	18	2	

Многообразия и заданные для них функции Морса могут иметь более сложное строение; например, функция Морса может иметь на одном критическом уровне больше трех критических точек. В дальнейшем планируется исследовать атомы с четырьмя и пятью критических точками.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Милнор, Дж. Теория Морса / Дж. Милнор. – М. : Мир, 1971.

2. Matsumoto, Y. An Introduction to Morse Theory / Y. Matsumoto // American Mathematical Society. Translations of Mathematical Monography. – 2002. – Vol. 208.

3. Болсинов, А. В. Интегрируемые гамильтоновы системы / А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко. – Ижевск : Удмур. ун-т. – 1999. – Т. 1.

4. Іванюк, О. Атоми складності 2 на поверхнях з краєм / О. Іванюк, О. Пришляк // Proceedings of International Geometrical Center. – 2013. – Vol. 6, № 3.

5. Prishlyak, A. O. Equivalence of Morse function on 3-manifolds / A. O. Prishlyak // Methods of Functional Analysis and Topology. – 1999. – Vol. 5, № 3.

6. Пришляк, А. О. Гомотопическая эквивалентность *m*-функций без внутренних критических точек на трёхмерных телах / А. О. Пришляк // ТВИМ. – 2012. – № 2.

7. Пришляк, А. О. Топологическая классификация m-полей на двух- и трехмерных многообразиях с краем / А. О. Пришляк // Україн. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 6.

8. Пришляк, А. О. Эквивалентность *m*-функций на трехмерных многообразиях с углами / А. О. Пришляк // Доповіді НАН Україны. – 2000. – № 6.

9. Максименко, С. І. Класифікація *m*-функцій на поверхнях / С. І. Максименко // Україн. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 8.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 06.10.2016

Prishlyak A.O., Scochco D.N. **Atoms with One, Two and Three Critical Points for Morse Functions on Surfaces with Boundary**

This article is devoted to the study of atoms of Morse functions which are defined on surfaces with a boundary. There are some atoms limitations: they have one, two or three critical points and they must have at least one critical point, which corresponds to a local minimum or maximum of the function restriction to the boundary. There are forty three different atoms, which satisfy these limitations: only one atom with one critical point, five atoms with two critical points and forty seven atoms that contain three critical points. Illustrations were listed for every of forty three atoms.