УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик[1], С.В. Сидак[2]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]преподаватель каф. информатики и прикладной математики Брестского государственного технического университета, магистрант Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

СХОДИМОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НЕЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Для решения линейных уравнений с положительным ограниченным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве предлагается новый неявный итерационный метод. Доказана сходимость метода в исходной норме гильбертова пространства. Получены априорные оценки погрешности метода при точной и приближенной правой части операторного уравнения, погрешность в счете. Найденные для предложенного метода оценки погрешности оптимизированы. Проведено сравнение оценок погрешности рассматриваемого итерационного метода и явного метода простой итерации.

1. Постановка задачи

В гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение I рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается неявный итерационный метод

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + 2\alpha Ay, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. В этом случае метод (2) примет вид

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^2)x_{n,\delta} + 2\alpha Ay_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Ниже под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ, т.е. если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{n} \|x - x_{n,\delta}\|\right) = 0$.

2. Сходимость метода при точной правой части уравнения

Теорема 1. *Итерационный метод* (2) *при условии* $\alpha > 0$ *сходится в исходной норме гильбертова пространства*.

Доказательство

По индукции нетрудно показать, что

$$x_n = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A^2)^n (E + \alpha A^2)^{-n}\right]y.$$

Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A = \int\limits_0^M \lambda dE_\lambda$ ($M = \|A\|$, E_λ – спектральная функция), имеем

$$x - x_n = A^{-1}(E - \alpha A^2)^n (E + \alpha A^2)^{-n} y = \int\limits_0^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n dE_\lambda y =$$

$$= \int\limits_0^\varepsilon \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n dE_\lambda y + \int\limits_\varepsilon^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n dE_\lambda y .$$

Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0, M]$ выполнялось $\alpha > 0$. (4)

Тогда $\left|\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right| \le q < 1$ и, следовательно, $\left\|\int\limits_\varepsilon^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n dE_\lambda y\right\| \le q^n \left\|\int\limits_\varepsilon^M \lambda^{-1} dE_\lambda y\right\| =$

$$= q^n \left\|\int\limits_\varepsilon^M dE_\lambda x\right\| \le q^n \|x\| \to 0, \ n \to \infty .$$

$\left\|\int\limits_0^\varepsilon \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n dE_\lambda y\right\| \le \left\|\int\limits_0^\varepsilon dE_\lambda x\right\| = \|E_\varepsilon x\| \to 0,$ так как при $\varepsilon \to 0$ E_ε сильно стремится к нулю в силу свойств спектральной функции. Таким образом, доказано, что при условии (4) метод (2) сходится. Теорема 1 доказана.

3. Оценка скорости сходимости

Скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$ неизвестна и может быть сколь угодно малой. Для ее оценки предположим, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, т.е. $x = A^s z, \ s > 0$. Тогда $x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^s \left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n dE_\lambda z$.

Используя результаты из [1], получим оценку для подынтегральной функции:

$$|f(\lambda)| = \left|\lambda^s \left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n\right| \le \left|\lambda^s (1 - \alpha\lambda^2)^n\right| \le s^{\frac{s}{2}} (2n\alpha e)^{-\frac{s}{2}}.$$

Отсюда $\|x - x_n\| \le s^{s/2} (2n\alpha e)^{-s/2} \|z\|$.

Но может оказаться, что локальный максимум внутри [0, M] не будет являться глобальным, поэтому будем учитывать значение функции $f(\lambda)$ на правом конце отрезка, т.е. в точке $\lambda = M$ (на левом конце отрезка $f(0) = 0$). Тогда справедливо $\|x - x_n\| \le \max\left\{ s^{s/2} (2n\alpha e)^{-s/2}, M^s \left(\frac{1-\alpha M^2}{1+\alpha M^2}\right)^n \right\} \|z\|$.

4. Сходимость при приближенной правой части уравнения

Покажем, что при условии (4) метод (3) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ приближенной правой части уравнения (1).

Рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. По доказанному, $x - x_n \to 0,\ n \to \infty$. Убедимся, что $x_n - x_{n,\delta}$ можно сделать сходящимся к нулю. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, имеем

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E-\alpha A^2)^n (E+\alpha A^2)^{-n}\right](y - y_\delta) = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1-\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n\right] dE_\lambda (y-y_\delta).$$

Оценим сверху подынтегральную функцию $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n\right] \ge 0$ при условии (4).

При $n=1$ $g_1(\lambda) = \frac{2\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda^2}$. Ее производная равна $g_1'(\lambda) = \frac{2\alpha(1-\alpha\lambda^2)}{(1+\alpha\lambda^2)^2}$, следовательно, $\lambda^* = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2}$ – стационарная точка для функции $g_1(\lambda)$. Поскольку $g_1''(\lambda^*) < 0$, то λ^* – точка максимума функции $g_1(\lambda)$ и $\max\limits_{[0,M]} g_1(\lambda) = g_1(\lambda^*) \le 2\alpha^{1/2}$.

Покажем по индукции, что при $n \in N$

$$g_n(\lambda) = |g_n(\lambda)| \le 4n^{1/2}\alpha^{1/2}. \qquad (5)$$

При $n = 1$ неравенство (5) проверено выше. В дальнейшем будем считать $n \ge 2$. Предположим, что (5) верно при $n = m$, т.е. $g_m(\lambda) \le 4m^{1/2}\alpha^{1/2}$ и рассмотрим

$$g_{m+1}(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-\frac{(1-\alpha\lambda^2)^{m+1}}{(1+\alpha\lambda^2)^{m+1}}\right] = \lambda^{-1}\left[1-\frac{(1-\alpha\lambda^2)^{m}}{(1+\alpha\lambda^2)^{m}}\right] + \lambda^{-1}\left[1-\frac{(1-\alpha\lambda^2)^{m+1}}{(1+\alpha\lambda^2)^{m+1}}\right] -$$

$$-\lambda^{-1}\left[1-\frac{(1-\alpha\lambda^2)^{m}}{(1+\alpha\lambda^2)^{m}}\right] \le 4m^{1/2}\alpha^{1/2} + \left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^m \cdot \frac{2\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda^2}.$$

Поэтому

$$g_{m+1}(\lambda) \le 4m^{1/2}\alpha^{1/2} + \left|\frac{(1-\alpha\lambda^2)^m \cdot 2\alpha\lambda}{(1+\alpha\lambda^2)^{m+1}}\right| \le 4m^{1/2}2\alpha^{1/2} + \left|2\alpha\lambda(1-\alpha\lambda^2)^m\right|.$$

Покажем, что

$$2m^{1/2}\alpha^{1/2} + \left|\alpha\lambda(1-\alpha\lambda^2)^m\right| \le 2(m+1)^{1/2}\alpha^{1/2}, \qquad (6)$$

что равносильно неравенству $\left|\alpha^{1/2}(1-\alpha\lambda^2)^m\lambda\right| \le (\sqrt{m+1}-\sqrt{m})2$. Имеем

$$\sqrt{m+1} = \sqrt{m\left(1+\frac{1}{m}\right)} = \sqrt{m}\left\{1 + \frac{1}{2m} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!m^2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!m^3} + \right.$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!\,m^4}+\ldots+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{2}-(2p-2)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot m^{2p-1}}+$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{2}-(2p-2)\right]\cdot\left[\frac{1}{2}-(2p-1)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot 2p\cdot m^{2p}}+\ldots\right\}.$$

Покажем, что каждый положительный член ряда больше модуля следующего за ним отрицательного члена, т.е.

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{2}-(2p-2)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot m^{2p-1}}>\left|\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{2}-(2p-2)\right]\cdot\left[\frac{1}{2}-(2p-1)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot 2p\cdot m^{2p}}\right|,$$

что равносильно $1>\frac{\left|\frac{1}{2}-(2p-1)\right|}{2pm}$ или $\frac{2p-1-\frac{1}{2}}{2pm}<1$, а это уже очевидно при $m\geq 1$. Следовательно,

$$\sqrt{m+1}>\sqrt{m}\left(1+\frac{1}{2m}-\frac{1}{8m^2}\right).$$

Вернемся к доказательству неравенства (6). Поскольку (раздел 3) $\left|(1-\alpha\lambda^2)^m\lambda\right|\leq(2m\alpha e)^{-1/2}$, то вместо (6) докажем более сильное неравенство

$$(2m\alpha e)^{-1/2}\alpha^{1/2}\leq 2m^{1/2}\left(\frac{1}{2m}-\frac{1}{8m^2}\right). \tag{7}$$

Преобразуем его: $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}m^{-1/2}e^{-1/2}\leq 2m^{1/2}\,\frac{1}{2m}\left(1-\frac{1}{4m}\right)$.

Поскольку $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}m^{-1/2}e^{-1/2}\leq m^{-1/2}e^{-1/2}$, то докажем более сильное неравенство $m^{-1/2}e^{-1/2}\leq m^{-1/2}\left(1-\frac{1}{4m}\right)$, что то же самое $1\leq e^{1/2}\left(1-\frac{1}{4m}\right)$, $m\geq 2$.

Неравенство (7) выполняется, и тем более справедливо неравенство (6). Таким образом, для $n\geq 1$ справедлива оценка (5), т.е. $g_n(\alpha)\leq 4n^{1/2}\alpha^{1/2}, n\geq 1$. Отсюда $\|x_n-x_{n,\delta}\|\leq 4n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta,\ n\geq 1$.

Поскольку $\|x-x_{n,\delta}\|\leq\|x-x_n\|+\|x_n-x_{n,\delta}\|\leq\|x-x_n\|+4n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta$ и $\|x-x_n\|\to 0$, $n\to\infty$, то для сходимости метода (3) достаточно выбрать $n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/2}\delta\to 0,\quad n\to\infty,\quad \delta\to 0$. Итак, доказана

Теорема 2. *При условии* (4) *итерационный метод* (3) *сходится, если число итераций n выбирать из условия* $n^{1/2}\delta\to 0,\quad n\to\infty,\quad \delta\to 0$.

5. Оценка погрешности метода и ее оптимизация

Запишем теперь общую оценку погрешности метода (3)

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\| \le \left\|x-x_n\right\| + \left\|x_n-x_{n,\delta}\right\| \le$$

$$\le \max\left\{ s^{s/2}\left(2n\alpha e\right)^{-s/2},\ M^s\left(\frac{1-\alpha M^2}{1+\alpha M^2}\right)^n \right\}\left\|z\right\| + 4n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta,\ n\ge 1.$$

Так как для достаточно больших n $M^s\left(\frac{1-\alpha M^2}{1+\alpha M^2}\right)^n \le s^{s/2}\left(2n\alpha e\right)^{-s/2}$, то для этих n справедлива оценка

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\| \le s^{s/2}\left(2n\alpha e\right)^{-s/2}\left\|z\right\| + 4n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta,\ \ n\ge 1. \tag{8}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Если решение x уравнения* (1) *истокообразно представимо, то при условии* (4) *для метода* (3) *справедлива оценка погрешности* (8).

Для минимизации оценки погрешности вычислим правую часть оценки (8) в точке, в которой производная от нее равна нулю: в результате получим априорный момент останова

$$n_{\text{опт}} = 2^{-2/(s+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{(s+2)/(s+1)}\alpha^{-1}e^{-s/(s+1)}\left\|z\right\|^{2/(s+1)}\delta^{-2/(s+1)}. \tag{9}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (8), имеем

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (1+s)\cdot 2^{s/(s+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{s(1-2)/(2(s+1))}e^{-s/(2(s+1))}\delta^{s/(s+1)}\left\|z\right\|^{1/(s+1)}. \tag{10}$$

Замечание 1. *Оценка погрешности* (10) *имеет порядок* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$*, и, как следует из* [2]*, он является оптимальным в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x=A^s z,\ s>0$.

Замечание 2. *Оптимальная оценка* (10) *не зависит от* α*, но от параметра* α *зависит* $n_{опт}$*, поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать* α*, удовлетворяющим условию* (4)*, и так, чтобы* $n_{опт}=1$*. Для этого достаточно выбрать* $\alpha_{\text{опт}} = 2^{-2/(s+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{(s+2)/(s+1)}e^{-s/(s+1)}\left\|z\right\|^{2/(s+1)}\delta^{-2/(s+1)}$.

Сравнение метода (3) с широко известным явным методом итераций [2–6]

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right),\ x_{0,\delta}=0 \tag{11}$$

показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод (11) предпочтительнее неявного метода (3). Однако неявный метод (3) обладает следующим важным достоинством. В явном методе (11) на шаг α накладывается ограничение сверху – неравенство $0<\alpha\le\frac{5}{4\left\|A\right\|}$, что может привести на практике к необходимости большого числа вычислений. В неявном методе (3) ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет считать $\alpha > 0$ произвольно большим (независимо от $\|A\|$). В связи с чем оптимальную оценку для метода (3) можно получить уже на первом шаге итераций.

6. Погрешность в счете

Рассмотрим погрешность метода при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, получаемое по формуле (3), а z_n – значение с учетом вычислительной погрешности, т.е.

$$z_{n+1} = (E + \alpha A^2)^{-1}\left[(E - \alpha A^2) z_n + 2\alpha A y_\delta\right] + \alpha\gamma_n, \quad z_0 = 0. \tag{12}$$

Здесь γ_n – погрешность вычислений. Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (12) равенство (3). Имеем $\varepsilon_{n+1} = (E + \alpha A^2)^{-1}(E - \alpha A^2)\varepsilon_n + \alpha\gamma_n$, $\varepsilon_0 = 0$. Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции нетрудно получить, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1} (E + \alpha A^2)^{-(n-1-i)} (E - \alpha A^2)^{n-1-i} \alpha\gamma_i .$$

В силу (4) и того, что $0 \in Sp\, A$ справедливо $\left\|(E + \alpha A^2)^{-1}(E - \alpha A^2)\right\| \le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \le n\alpha\gamma, \quad \gamma = \sup\limits_i |\gamma_i|$.

Таким образом, с учетом вычислительной погрешности оценка погрешности метода (3) запишется в виде

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le s^{s/2}(2n\alpha e)^{-s/2}\|z\| + 4n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta + n\alpha\gamma, \ n \ge 1.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук, В. Ф. Некоторые итеративные методы решения уравнений I рода / В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1976. – № 5. – С. 23–27.
2. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
3. Константинова, Я. В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 1973. – № 1. – С. 9–15.
4. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
5. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во Сиб. отд. АН СССР, 1962. – 92 с.
6. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 14.09.2016

Matysik O.V., Sidak S.V. **Convergence the Non-evident Iteration Process of the Decision of the Ill-Posed Equations of first kind in the Hilbert Space**

In the Hilbert space to solve of the linear equations with limited affirmated self-adjoned operator we investigate the application of the new non-evident iterative method. Convergence of the method in its initial norm of Hilbert space is proved. The apriori estimations of this method error, having a precise and approximate right-side part of the operator equation, the error in calculation have been received. For the offered method the found estimations of the error are optimised. The comparison of the error estimations of the given iteration method and the evident method of simple iteration has been done.