УДК 512.542

Т.С. Кирильчук[1], А.А. Трофимук[2]

*[1]магистрант каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*

*[2]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ НЕКОТОРЫХ ПОДГРУПП

Получены оценки производной длины и нильпотентной длины разрешимой группы G, у которой индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, равны p, p^2 или 125. В частности, установлено, что нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Кроме того, получены оценки производной и нильпотентной длины разрешимой группы, у которой $r_n(F)$ не превышает 2. В частности, установлено, что нильпотентная длина такой группы не превышает 4, а производная длина – не превышает 6. Также получены оценки производной и нильпотентной длины разрешимой группы, у которой $r_n(F)$ не превышает 3. Доказано, что нильпотентная длина такой группы не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6.

Введение

Все рассматриваемые группы в данной работе предполагаются конечными.

В работе [1] была установлена зависимость производной длины группы от силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга. Вполне естественным является дальнейшее рассмотрение строения разрешимых групп в зависимости от взаимодействия их подгрупп с подгруппой Фиттинга.

Строение разрешимых групп, индексы максимальных подгрупп которых равны простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел, получено в работах В.С. Монахова, М.В. Селькина и Е.Е. Грибовской [2]. Строение разрешимых групп, у которых индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел либо 8, либо 27, было изучено в работах [3–5].

Из работ [2; 6] видно, что происходит увеличение верхней границы оценки инвариантов (производной длины, нильпотентной длины), если рассматривать индексы максимальных подгрупп не свободными от кубов, а свободными от четвертых степеней. Из основных результатов работ [3–7] следует, что оценки инвариантов сохраняются, если рассматривать кубы малых простых чисел $p=2$ и $p=3$.

В теореме 1.1 показано, что оценки сохранятся также и для случая $p=5$, но при этом достаточно рассматривать индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга.

Доказана следующая

Теорема 1.1. Пусть G – разрешимая группа. Если индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, равны простым числам, квадратам простых чисел или 125, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, а нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Пример 1. Пусть E_{5^3} – элементарная абелевая группа порядка 125. При помощи компьютерной системы GAP построено полупрямое произведение $G = E_{5^3} \rtimes H$, где $H = Z_4 \times ([Z_4 \times Z_4]S_3)$. Здесь S_3 – симметрическая группа степени 3, а Z_n – циклическая группа порядка n. Группа G имеет порядок 48000 и индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, равны простым числам, квадратам простых чисел или 125. Кроме того, нильпотентная длина группы G равна 4. Данный пример показывает, что оценка нильпотентной длины, полученная в теореме 1.1, является точной.

В.С. Монахов [8] ввел понятие нормального ранга p-группы P следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \lhd P} \log_p |X/\Phi(X)|.$$

Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X, а запись $X \lhd P$ означает, что X – нормальная подгруппа группы P.

В этой же работе были исследованы разрешимые группы с силовскими подгруппами P нормального ранга $r_n(P) \le 2$ и $r_n(P) \le 3$.

Для формулировки основного результата введем следующее обозначение:

$$r_n(F) = \max_{p \in \pi(F)} r_n(F_p).$$

Здесь F – подгруппа Фиттинга группы G, F_p – силовская p-подгруппа группы F для $p \in \pi(F)$.

Поэтому возникает вполне естественная задача: получить оценки производной и нильпотентной длины разрешимой группы, у которой $r_n(F)$ не превышает 2 или $r_n(F)$ не превышает 3.

Доказана следующая

Теорема 1.2. Пусть G – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

I) если $r_n(F) \le 3$, то нильпотентная длинна группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6.

II) если $r_n(F) \le 2$, то нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина группы G не превышает 6. В частности, если:

1) группа G A_4-свободна, то нильпотентная длина группы G не превышает 3, а производная длина группы G не превышает 4;

2) группа G имеет нечетный порядок, то G метанильпотентна, а производная длина группы G не превышает 3.

Пример 2. Пусть S – экстраспециальная группа порядка 27. Вычисления в системе GAP показали, что ее группой автоморфизмов является группа $E_{3^2} \rtimes GL(2,3)$. Полупрямое произведение $G = S \rtimes GL(2,3)$ является группой порядка $1296 = 2^4 \cdot 3^4$ с подгруппой Фиттинга $F = S$ порядка 27 и $r_n(F) = 2$. Производная длина G равна 6, а нильпотентная длина равна 4. Данный пример показывает, что оценки производной и нильпотентной длины, полученные в теореме 1.2. в общем случае, являются точными.

Пример 3. Пусть A – экстраспециальная группа порядка 125. В системе GAP построено полупрямое произведение $G = A \rtimes S_3$ порядка $750 = 5^3 \cdot 3 \cdot 2$ с подгруппой Фиттинга F, совпадающей с A и $r_n(F) = 2$. Здесь S_3 – симметрическая группа степени 3. Производная длина G равна 4, а нильпотентная длина равна 3. Данный пример показывает, что оценки производной и нильпотентной длины, полученные в теореме 1.2 в случае A_4-свободности группы, являются точными.

Пример 4. Зафиксируем простые числа $p=5$ и $q=3$. Тогда показатель числа 5 по модулю 3 равен 2, и существует группа Шмидта $G = P \rtimes Q$ такая, что P неабелева порядка 5^3, а Q – циклическая подгруппа порядка 3. Причем подгруппа Фиттинга F совпадает с P и $r_n(F)=2$. Так как P неабелева, то $Z(P)=P'=\Phi(P)$. Из свойств групп Шмидта следует, что $G'=P$. Таким образом, $((G')')'=(P')'=Z(P)'=1$ и $d(G)=3$. Очевидно, что $n(G)=2$. Данный пример показывает, что оценки производной и нильпотентной длины, полученные в теореме 1.2. для групп нечетного порядка, являются точными.

1. Основные определения и вспомогательные результаты

В настоящей работе применяют термины с соответствующими обозначениями, принятые в монографиях [9; 10]. Прописными готическими буквами обозначаются классы групп, т.е. всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой и все группы, изоморфные ей.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N\in\mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}= \{G\in\mathfrak{B} \mid G^{\mathfrak{H}}\in\mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2=\mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G)\in\mathfrak{F}$ следует, что $G\in\mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначаются через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно.

Лемма 1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно [10, с. 36], произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 1.2. ([11], лемма 12). Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n,p)$. Тогда:

1) если $n=2$, то $H\in\mathfrak{N}^3\cap\mathfrak{A}^4$;

2) если $n=3$, то $H\in\mathfrak{N}^3\cap\mathfrak{A}^4$.

Кроме того, если $n\in\{2;3\}$, $p>3$ и $O_p(H)=1$, то H – p'-группа.

Лемма 1.3. Если H – разрешимая неприводимая подгруппа группы $GL(3,5)$, то $H\cong Z_2\times D$, $H\cong Z_4\times D$, $H\cong D$ или $H\cong D_1$, где $D\in\{A_4, S_4, [Z_4\times Z_4]Z_3, [Z_{31}]Z_3, [[Z_4\times Z_4]Z_3]Z_2\}$ и $D_1\in\{Z_{31}, Z_{62}, Z_{124}, [A_4]Z_4, [[Z_4\times Z_4]Z_3]Z_4\}$. В частности, производная длина H не превышает 3, а если H A_4-свободна, то $H\cong D_1$, где $D_1\in\{Z_{31}, Z_{62}, Z_{124}, [Z_{31}]Z_3, Z_2\times[Z_{31}]Z_3, Z_4\times[Z_{31}]Z_3\}$ и производная длина H не превышает 2.

Здесь S_n – симметрическая группа степени n.

Доказательство. Утверждение легко получить, используя систему компьютерной алгебры GAP.

Лемма 1.4. ([11], лемма 7). Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G)\in\mathfrak{A}^k$, когда $G\in\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$.

Лемма 1.5. ([11], лемма 13). Если H – разрешимая A_4-свободная подгруппа группы $GL(2,p)$, то H метабелева.

Лемма 1.6. ([13], лемма 2.4). Пусть P – p-группа и $r_n(P) \le 2$. Тогда производная длина группы P не превышает 2. В частности, если $p = 2$, то P бициклическая.

Лемма 1.7. ([14], лемма VI.8.1]). Пусть H – неприводимая подгруппа нечетного порядка группы $GL(2, p)$. Тогда H циклическая.

2. Доказательство теоремы 1.1.

Вначале докажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Воспользуемся индукцией по порядку G. Предположим, что $\Phi(G) \ne 1$ и $M/\Phi(G)$ – максимальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Тогда M – максимальная подгруппа группы G и по условию теоремы M либо содержит подгруппу Фитинга $F(G)$, либо ее индекс $|G:M|$ есть простое число, квадрат простого или 125. В первом случае, так как $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$, то фактор-группа $M/\Phi(G)$ содержит подгруппу Фиттинга $F(G/\Phi(G))$ группы $G/\Phi(G)$, а так как $|G:M| = |G/\Phi(G):M/\Phi(G)|$, то во втором случае индекс максимальной подгруппы $M/\Phi(G)$ в группе $G/\Phi(G)$ есть простое число, квадрат простого или 125. Таким образом, фактор-группа $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условию теоремы и $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как по лемме 1.1. формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, то $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$.

По теореме III.4.5 [14] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп F_i группы G, где $1 \le i \le k$. Поэтому по теореме I.4.5 [14] для каждого F_i фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_i)$. По лемме I.9.6 [14] фактор-группа $G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(F_i)$, $1 \le i \le k$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то $\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = C_G(F) = F$ и $G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = G/F$.

Пусть F_i – элементарная абелева p_i-подгруппа. Ясно, что для каждого i существует максимальная подгруппа M_i в группе G такая, что $G = [F_i]M_i$. Так как M_i не содержит F_i, то M_i не содержит F. Поэтому порядок $|F_i|$ равен p_i, либо p_i^2, либо 125, где p_i – простое число. Поэтому возможны следующие варианты: $\mathrm{Aut}\,(F_i)$ изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$; $\mathrm{Aut}\,(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$; $\mathrm{Aut}\,(F_i)$ изоморфна группе $GL(3,5)$.

В первом случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и по лемме 1.2 фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$.

В третьем случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3,5)$ и из леммы 1.3 следует, что $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A}^3 \subset \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$. Так как $\mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$ – формация, то $G/F \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$.

Итак, мы доказали, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. По лемме 1.4 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^5$ и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина G не превышает 4.

Теорема доказана.

Следствие 1.1. Пусть G – разрешимая группа, у которой индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел или 125. Тогда производная длина фактор группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, а нильпотентная длина группы G не превышает 4.

3. Доказательство теоремы 1.2.

I) Покажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \bigcap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^5$. Воспользуемся индукцией по порядку G. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Тогда $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$. Пусть F_p – силовская p-подгруппа в $F(G)$, тогда $F_p\Phi(G)/\Phi(G)$ – силовская p-подгруппа в $F(G/\Phi(G))$. Так как $F_p\Phi(G)/\Phi(G) \cong F_p / F_p \bigcap \Phi(G)$, то $r_n(F_p\Phi(G)/\Phi(G)) \le r_n(F_p) \le 3$ и $r_n(F(G/\Phi(G))) \le r_n(F) \le 3$. Поэтому $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условиям теоремы. Так как формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, то $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$.

По теоремам III.4.5, I.4.5 и лемме I.9.6 [14] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп N_i группы G, где $1 \le i \le k$ и справедливы следующие утверждения

$$\bigcap_{i=1}^{k} C_G(N_i) = C_G(F) = F \text{ и } G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(N_i) = G/F.$$

Так как N_i – элементарная абелева p_i-подгруппа порядка p_i^k, то $N_i \le F_{p_i}$ и $k \le 3$, поскольку $\Phi(N_i) = 1$ и $r_n(P) \le 3$ для любой силовской подгруппы P из $F(G)$. Поэтому возможны следующие варианты:

1) Aut (N_i) изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$;

2) Aut (N_i) изоморфна подгруппе группы $GL(2, p_i)$;

3) Aut (N_i) изоморфна подгруппе группы $GL(3, p_i)$.

В первом случае фактор-группа $G/C_G(N_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^5$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(N_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и фактор-группа $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^4 \subset \mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^5$ по лемме 1.2.

В третьем случае фактор-группа $G/C_G(N_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3, p_i)$ и фактор-группа $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^5$ по лемме 1.2.

Так как $\mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^5$ – формация, то $G/F \in \mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^5$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина G не превышает 4. Так как $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^5$, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6 по лемме 1.4.

II) Пусть $r_n(F) \le 2$. Покажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \bigcap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Повторяя большую часть доказательства п. I теоремы, получим, что если N_i – элементарная абелева p_i-подгруппа порядка p_i^k, то $N_i \leq F_{p_i}$ и $k \leq 2$, поскольку $\Phi(N_i)=1$ и $r_n(P) \leq 2$ для любой силовской подгруппы P из $F(G)$. Поэтому возможны следующие варианты:

1) Aut (N_i) изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$;
2) Aut (N_i) изоморфна подгруппе группы $GL(2, p_i)$.

В первом случае фактор-группа $G/C_G(N_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^4$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(N_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и фактор-группа $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^4$ по лемме 1.2. Так как $\mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^5$ – формация, то $G/F \in \mathfrak{N}^3 \bigcap \mathfrak{A}^4$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$.

Итак, мы доказали, что $G/F \in \mathfrak{A}^4$. Из леммы 1.6 следует, что $F \in \mathfrak{A}^2$, поэтому производная длина G не превышает 6. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина G не превышает 4.

Пусть группа G является A_4-свободной, то, повторяя доказательство основной части теоремы и используя лемму 1.5, получим, что $G/F \in \mathfrak{A}^2$. Тогда $G \in \mathfrak{N}^3$ и нильпотентная длина группы G не превышает 3, а так как по лемме 1.6 $F \in \mathfrak{A}^2$, то производная длина группы G не превышает 4.

Пусть группа G имеет нечетный порядок, то, используя лемму 1.7, получим, что $G/F \in \mathfrak{A}$. Тогда $G \in \mathfrak{N}^2$ и нильпотентная длина группы G не превышает 2, а производная длина группы G не превышает 3 по лемме 1.6.

Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трофимук, А. А. Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы / А. А. Трофимук // Матем. заметки. – 2010. – Т. 87, № 2. – С. 287–293.
2. Монахов, В. С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В. С. Монахов, М. В. Селькин, Е. Е. Грибовская // Украин. матем. журн. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.
3. Грибовская, Е. Е. Конечные разрешимые группы с индексами максимальных подгрупп, равными p, p^2 или 8 / Е. Е. Грибовская // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2001. – № 4. – С. 11–14.
4. Грибовская, Е. Е. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп с индексами максимальных подгрупп p, p^2 или 8 / Е. Е. Грибовская // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2001. – Т. 21, № 3. – С. 98–103.
5. Трофимук, А. А. Конечные группы с ограничениями на индексы максимальных подгрупп / А. А. Трофимук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2009. – № 2(33). – С. 25–31.
6. Монахов, В. С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская // Матем. заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
7. Трофимук, А. А. О конечных разрешимых группах с небольшими индексами максимальных подгрупп / А. А. Трофимук, И. Н. Фенчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 99–105.

8. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.

9. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Высш. шк., 2006. – 207 с.

10. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

11. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – Т. 52, № 5. – 2011. – С. 1123–1137.

12. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.

13. Trofimuk, A. A. Solvable groups with restrictions on Sylow subgroups of the Fitting subgroup / A. A. Trofimuk // Asian-European Journal of Mathematics. – 2016. – Vol. 9, № 2. – 1650037 (6 p.).

14. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York : Springer, 1967.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 24.10.2016

Kirilchuk T.S., Trofimuk A.A. **Finite Groups with Given Properties of Some Subgroups**

The estimates of the derived length and nilpotent length of a finite solvable group G in which indices of maximal subgroups that not contain the Fitting subgroup, is equal to p, p^2, or 125, are obtained. In particular, the nilpotent length of G is at most 4 and the derived length of $G/\Phi(G)$ is at most 5. In addition, the estimates of the derived length and the nilpotent length of soluble group in which $r_n(F)$ does not exceed 2 are obtained. In particular, the nilpotent length of such groups does not exceed 4 and the derived length does not exceed 6. Also, the estimations of the derived length and the nilpotent length of a finite soluble group in which $r_n(F)$ does not exceed 3 are obtained. In particular, the nilpotent length of such groups does not exceed 4 and the derived length of $G/\Phi(G)$ does not exceed 6.