

УДК 524.354.6-33

В.С. Секержицкий, В.В. Климович, Е.А. Саванчук

К ВОПРОСУ ОБ УРАВНЕНИИ СОСТОЯНИЯ ХОЛОДНОГО НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННО-ПРОТОННОГО ВЕЩЕСТВА В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Получено уравнение состояния холодного сверхплотного электронно-протонного вещества в присутствии магнитного поля с индукцией, превышающей квантовый предел для свободных нерелятивистских электронов. Показана возможность применения подобного уравнения состояния для астрофизических оценок.

Нахождение уравнений состояния вещества при плотностях, превышающих порог его полной ионизации, имеет важное значение для физики сверхплотных астрофизических объектов, в частности, для построения теоретических моделей, позволяющих не только объяснять отдельные наблюдаемые эффекты, но и обосновывать предположения и гипотезы о строении и энергетике указанных небесных тел. Теоретически обоснованная и подтвержденная наблюдательными данными (по крайней мере, косвенными) возможность существования в сверхплотных звездах весьма сильных магнитных полей делает актуальной задачу об учете их влияния на физические свойства сверхплотного вещества. В настоящей работе получены уравнения состояния холодного сверхплотного электронно-протонного вещества в присутствии магнитного поля с индукцией, превышающей квантовый предел для свободных нерелятивистских электронов, входящих в состав такого вещества.

Как известно, в квантовом пределе сверхсильных магнитных полей для заряженных фермионов номер квантового уровня Ландау $n = 0$ и магнитные моменты всех микрочастиц направлены по полю. Тогда химический потенциал, давление и плотность энергии нерелятивистского крайне вырожденного идеального ферми-газа вычисляются следующим образом (см., например, подраздел 2.2 в [1], где имеются ссылки на соответствующие оригинальные работы):

$$\chi_q(B) = m_q c^2 + \zeta_q(B), \quad \zeta_q(B) = \frac{\pi^4 \hbar^6 n_q^2}{2m_q^3 \mu^2 B^2} + (1 - \sigma_q) \mu B, \quad (1)$$

$$P_q(B) = \frac{\pi^4 \hbar^6 n_q^3}{3m_q^3 \mu^2 B^2}, \quad (2)$$

$$w_q(B) = m_q c^2 n_q + \frac{\pi^4 \hbar^6 n_q^3}{6m_q^3 \mu^2 B^2} + (1 - \sigma_q) n_q \mu B. \quad (3)$$

Здесь B – индукция магнитного поля, n_q – концентрация заряженных фермионов, m_q – масса фермиона, $q = e, p$ – индексы, соответствующие электронному и протонному газам, $\sigma_q = \mu_q / \mu$, μ_q – собственный магнитный момент фермиона; для электронов μ – магнетон Бора μ_B , для нуклонов μ – ядерный магнетон μ_J , $m_p \mu_J = m_e \mu_B$, $\sigma_p = 2,793$, $\sigma_e \approx 1$.

Для электронейтральной среды $n_p = n_e$. При этом нижняя граница сверхсильного магнитного поля для протонов и электронов одинакова:

$$B^{(p)} = B^{(e)} = \frac{\pi^{4/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2^{2/3} m_p \mu_J} = 3,82 \cdot 10^{-7} n_p^{2/3} \text{ (Гс)}. \quad (4)$$

Таким образом, химические потенциалы рассматриваемых ферми-газов при заданных их концентрациях уменьшаются с ростом индукции сверхсильного магнитного поля и достигают значения энергии покоя при

$$B = \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \frac{\zeta_q(0)}{(\sigma_q - 1)^{1/3} \mu}. \quad (5)$$

При более высоких значениях B (в соответствующих реальных условиях вряд ли достижимых) химические потенциалы протонов меньше энергии покоя. Давления протонного и электронного газов стремятся к нулю при $B \rightarrow \infty$. Средние полные энергии обоих газов в сверхсильном магнитном поле уменьшаются.

Применим записанные выше соотношения для вывода уравнения состояния холодного электронно-протонного вещества (ионизованного водорода). При этом необходимо, вообще говоря, учитывать возможность существования как твердой, так и плазменной фаз электронно-протонного вещества. В [2] были сформулированы оценочные критерии устойчивости фазы твердого тела в замагниченном электронно-протонном веществе и показано, что при низких температурах сильное магнитное поле уменьшает диапазон значений массовой плотности, при которых фаза твердого тела является устойчивой и не переходит в плазменную фазу. Мы рассмотрим здесь уравнения состояния ионизованного сильно замагниченного водорода для модели крайне вырожденных идеальных ферми-газов его компонентов (приближенное описание плазменной фазы). Как следует из приведенных ниже соотношений, при наличии сверхсильных магнитных полей в модели «неподвижных» протонов и электронного газа (приближенное описание фазы твердого тела) уравнение состояния практически такое же, как и для плазменной фазы.

При плотности вещества $\rho \leq 10^6 \text{ г/см}^3$ (концентрации протонов $n_p \leq 10^{30} \text{ см}^{-3}$) электроны нерелятивистские. В этом случае давление и плотность энергии вещества связаны с соответствующими характеристиками его электронного и протонного компонентов соотношениями:

$$P = P_p + P_e = \frac{\pi^4 \hbar^6 n_p^3}{3m_p^3 \mu_J^2 B^2} + \frac{\pi^4 \hbar^6 n_e^3}{3m_e^3 \mu_B^2 B^2} = \frac{\pi^4 \hbar^6 n_e^3}{3m_e^3 \mu_B^2 B^2} \left(\frac{m_e}{m_p} + 1\right) \approx \frac{\pi^4 \hbar^6 n_e^3}{3m_e^3 \mu_B^2 B^2} = P_e, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} w &= w_p + w_e = m_p c^2 n_p + \frac{\pi^4 \hbar^6 n_p^3}{6m_p^3 \mu_J^2 B^2} + (1 - \sigma_p) n_p \mu_J B + m_e c^2 n_e + \frac{\pi^4 \hbar^6 n_e^3}{6m_e^3 \mu_B^2 B^2} = \\ &= (m_p c^2 + m_e c^2 + (1 - \sigma_p) \mu_J B) n_p + \frac{\pi^4 \hbar^6 n_e^3}{6m_e^3 \mu_B^2 B^2} \left(\frac{m_e}{m_p} + 1\right) \approx \end{aligned}$$

$$\approx \left(m_p c^2 + (1 - \sigma_p) \mu_\beta B \right) n_p + \frac{\pi^4 \hbar^6 n_p^3}{6 m_p^3 \mu_\beta^2 B^2} = w_p. \quad (7)$$

Тогда уравнение состояния может быть записано следующим образом:

$$w \approx \left(m_p c^2 + (1 - \sigma_p) \mu_\beta B \right) \left(\frac{3 m_e^3 \mu_B^2 B^2}{\pi^4 \hbar^6} \right)^{1/3} P_e^{1/3} + P_e / 2. \quad (8)$$

Легко видеть, что для астрофизических оценок последним слагаемым в (8) можно пренебречь с достаточной степенью точности, и уравнение состояния нерелятивистского электронно-протонного сильно замагниченного вещества принимает вид:

$$P \approx \frac{\pi^4 \hbar^6}{3 m_e^3 \mu_B^2 B^2 \left(m_p c^2 + (1 - \sigma_p) \mu_\beta B \right)^3} w^3 \approx \frac{\pi^4 \hbar^6}{3 m_e^3 \mu_B^2 B^2 (m_p c^2)^3} w^3 \equiv D_1 w^3. \quad (9)$$

Рассмотрим пример применения данного уравнения состояния к астрофизическим оценочным расчетам. Из ньютоновской теории тяготения известно [3, с. 155], что для уравнения состояния вещества

$$P = D w^{1+1/n} \quad (10)$$

приближенное соотношение между массой M и радиусом R астрофизической конфигурации имеет вид:

$$R^{3-n} \approx \frac{D^n (n+1)}{4 (2nG)^n} c^{2(n+1)} M^{1-n}, \quad (11)$$

где G – гравитационная постоянная. В (11) индекс политропы $n = 1/2$ в рассматриваемом случае. Тогда

$$R = \left(\frac{3}{8} \right)^{2/5} \frac{D_1^{1/5}}{G^{1/5}} c^{6/5} M^{1/5}. \quad (12)$$

Соотношение (12) устанавливает однозначную связь массы и радиуса нерелятивистской электронно-протонной конфигурации при фиксированном значении индукции магнитного поля, превышающем квантовый предел для электронов и протонов. Плотность вещества $\rho \approx m_p c^2 n_p$ (а значит и концентрация протонов) входит в (12) неявно. В реальных астрофизических объектах возможна зависимость индукции замороженного магнитного поля от плотности вещества; одна из таких зависимостей может иметь вид:

$$B = B_0 (\rho / \rho_0)^{2/3}, \quad (13)$$

где B_0 и ρ_0 – индукция магнитного поля и плотность вещества на поверхности объекта. Тогда уравнение состояния:

$$P \approx \frac{\pi^4 \hbar^6 \rho_0^{4/3}}{3m_e^3 \mu_B^2 B_0^2 (m_p c^2)^3} w^{5/3} \equiv D_2 w^{5/3}. \quad (14)$$

Здесь индекс политропы $n = 3/2$, и подстановка (14) в (11) дает

$$R \approx \left(\frac{5}{8}\right)^{2/5} \frac{D_2}{3G} c^{10/5} M^{-1/3}. \quad (15)$$

Заметим, что в отсутствие магнитного поля также имеет место $P \propto w^{5/3}$ и $R \propto M^{-1/3}$, но коэффициенты в соответствующих формулах отличны, естественно, от коэффициентов в (14) и (15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секержицкий, В.С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях / В.С. Секержицкий. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с. : ил.
2. Секержицкий, В.С. О критериях устойчивости твердого состояния электронно-протонного вещества в магнитном поле / В.С. Секержицкий, Е.А Саванчук // Веснік Брэсцкага ун-та. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 2. – С. 44–47.
3. Саакян, Г.С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г.С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с. : ил.

V.S. Sekerzhitsky, V.V.Klimovich, E.A. Savanchuk For Question of States Equation of Cold Nonrelativistic Electron-Proton Matter in Superstrong Magnetic Field

The states equation of cold superdense electron-proton matter in presence magnetic field off induction, exceed quantum limit for free nonrelativistic electrons is receive. The possibility of application similar to states equation for astrophysical valuation is demonstrate.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.09.2014