

УДК 512.542

*А.А. Трофимук, В.О. Лукьяненко*

## КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, У КОТОРЫХ НОРМАЛЬНЫЙ РАНГ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП ИЗ ПОДГРУППЫ ФИТТИНГА $\leq 2$

Получены оценки производной длины и нильпотентной длины разрешимой группы  $G$ , у которой нормальный ранг силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга  $\leq 2$ . В частности, производная длина такой группы  $G$  не превышает 7, а нильпотентная длина группы  $G$  не превышает 4. Кроме того, если группа  $G$   $A_4$ -свободна, то нильпотентная длина группы  $G$  не превышает 3, а производная длина группы  $G$  не превышает 5; если группа  $G$  имеет нечетный порядок, то  $G$  метанильпотентна, а производная длина группы  $G$  не превышает 4.

### Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1; 2].

Напомним, что нормальный ранг  $r_n(P)$   $p$ -группы  $P$  определяется следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X < P} \log_p |X/\Phi(X)|,$$

где  $X$  пробегает все нормальные подгруппы группы  $P$ , в том числе и  $P$ . Здесь  $\Phi(X)$  – подгруппа Фраттини группы  $X$ .

В.С. Монаховым в [3] были исследованы разрешимые группы с силовскими подгруппами нормального ранга  $\leq 2$ . В частности, доказано следующее утверждение:

*Если  $G$  – разрешимая группа с силовскими подгруппами нормального ранга  $\leq 2$ , то нильпотентная длина группы  $G$  не превышает 4.*

Бициклической называют группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Метабициклическая группа всегда является бициклической. Обратное утверждение верно для примарных групп нечетного порядка [2, теорема III.11.5]. Кроме того, нормальный ранг бициклической группы нечетного порядка  $\leq 2$ . Однако хорошо известно, что бициклические 2-группы имеют нормальный ранг  $\leq 3$ .

А.А. Трофимук в работе [4] заметил, что для оценки производной длины разрешимой группы достаточно рассматривать порядки силовских подгрупп только ее подгруппы Фиттинга. Доказано следующее утверждение:

*Пусть  $G$  – разрешимая непримарная группа и  $F(G)$  – ее подгруппа Фиттинга. Если силовские подгруппы в  $F(G)$  бициклические, то производная длина группы  $G$  не превышает 6.*

Поэтому возникает вполне естественная задача: получить оценки производной и нильпотентной длины разрешимой группы, у которой нормальный ранг силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга не превышает 2. Доказана следующая теорема.

Напомним, что группа  $G$  называется  $A_4$ -свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе  $A_4$ .

**Теорема.** *Пусть  $G$  – разрешимая группа и  $r_n(P) \leq 2$  для любой силовской подгруппы  $P$  из подгруппы Фиттинга  $F(G)$ . Тогда нильпотентная длина группы  $G$  не превышает 4, а производная длина группы  $G$  не превышает 7. В частности, если:*

- 1) группа  $G$   $A_4$ -свободна, то нильпотентная длина группы  $G$  не превышает 3, а производная длина группы  $G$  не превышает 5;
- 2) группа  $G$  имеет нечетный порядок, то  $G$  метанильпотентна, а производная длина группы  $G$  не превышает 4.

### 1. Вспомогательные результаты

Конкретные группы обозначаются следующим образом:  $1$  – единичная группа;  $A_n$  – знакопеременная группа степени  $n$ .

В доказательствах основной теоремы будут использоваться фрагменты теории формаций [1]. Формацией называется класс групп  $X$ , который удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) если  $G \in X$  и  $N \triangleleft G$ , то  $G/N \in X$  ;
- 2) если  $G/N_1 \in X$  и  $G/N_2 \in X$ , то  $G/N_1 \cap N_2 \in X$ .

Пусть  $F$  – некоторая формация групп и  $G$  – группа. Тогда  $G^F$  –  $F$ -корадикал группы  $G$ , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп  $N$  из  $G$ , для которых  $G/N \in F$ . Произведение  $FN = \{G \in G \mid G^H \in F\}$  формаций  $F$  и  $N$  состоит из всех групп  $G$ , для которых  $N$ -корадикал принадлежит формации  $F$ . Как обычно,  $F^2 = FF$ . Формация  $F$  называется насыщенной, если из условия  $G/\Phi(G) \in F$  следует, что  $G \in F$ . Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначают через  $N$  и  $A$  соответственно.

Для доказательства основной теоремы нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

**Лемма 1.** Пусть  $F$  – формация. Тогда  $NF$  – насыщенная формация.

*Доказательство.* Согласно [5, с. 36], произведение  $NF$  является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то  $NF$  – насыщенная формация.

Обозначим через  $d(G)$  – число минимальных образующих  $p$ -группы  $G$ .

**Лемма 2** ([6, теорема 44.12]). Пусть  $N$  – подгруппа  $p$ -группы  $G$ , такая, что  $d(N) = 2$ . Если  $N \leq \Phi(G)$ , то  $N$  метациклическая.

**Лемма 3** Пусть  $P$  –  $p$ -группа и  $r_n(P) \leq 2$ . Тогда производная длина группы  $P$  не превышает 3.

*Доказательство.* Если  $\Phi(P) = 1$ , то  $P$  – абелева группа. Предположим, что  $\Phi(P) \neq 1$ . Так как  $\Phi(P)$  нормальна в  $P$ , то  $d(\Phi(P))$  не превышает 2. Если  $d(\Phi(P)) = 1$ , то  $\Phi(P)$  – циклическая и  $P$  – метабелева группа. Если  $d(\Phi(P)) = 2$ , то  $\Phi(P)$  – метациклическая по лемме 2. Значит, производная длина группы  $P$  не превышает 3.

**Лемма 4** ([7, лемма 12]). Пусть  $H$  – неприводимая разрешимая подгруппа группы  $GL(2, p)$ . Тогда  $H \in N^3 \cap A^4$ .

**Лемма 5** ([7, лемма 13]). Если  $H$  – разрешимая  $A_4$ -свободная подгруппа группы  $GL(2, p)$ , то  $H$  метабелева.

**Лемма 6** ([2, лемма VI.8.1]). Пусть  $H$  – неприводимая подгруппа нечетного порядка группы  $GL(2, p)$ . Тогда  $H$  циклическая.

## 2. Доказательство основной теоремы

1. Вначале докажем, что  $G \in \mathbf{F} = \mathbf{N}^4 \cap \mathbf{NA}^4$ . Воспользуемся индукцией по порядку  $G$ . Предположим, что  $\Phi(G) \neq 1$ . Тогда  $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ . Пусть  $F_p$  – силовская  $p$ -подгруппа в  $F(G)$ , тогда  $F_p\Phi(G)/\Phi(G)$  – силовская  $p$ -подгруппа в  $F(G/\Phi(G))$ . Так как  $F_p\Phi(G)/\Phi(G) \cong F_p/F_p \cap \Phi(G)$ , то  $r_n(F_p\Phi(G)/\Phi(G)) \leq r_n(F_p) \leq 2$ . Поэтому  $G/\Phi(G)$  удовлетворяет условиям теоремы. Так как формация  $\mathbf{F}$  насыщена, то  $G \in \mathbf{F}$ . Поэтому в дальнейшем будем считать, что  $\Phi(G) = 1$ .

По теореме III.4.5 [2] подгруппа Фиттинга  $F = F(G)$  является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп  $N_i$  группы  $G$ , где  $1 \leq i \leq k$ . По теореме I.4.5 [2] для каждого  $N_i$  фактор-группа  $G/C_G(N_i)$  изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов  $\text{Aut}(N_i)$ . По лемме I.9.6 [2] фактор-группа  $G/\bigcap_{i=1}^k C_G(N_i)$  изоморфна подгруппе прямого произведения групп  $G/C_G(N_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то

$$\bigcap_{i=1}^k C_G(N_i) = C_G(F) = F \text{ и } G/\bigcap_{i=1}^k C_G(N_i) = G/F.$$

Так как  $N_i$  – элементарная абелева  $p_i$ -подгруппа порядка  $p_i^k$ , то  $N_i \leq F_{p_i}$  и  $k \leq 2$ , поскольку  $\Phi(N_i) = 1$  и  $r_n(P) \leq 2$  для любой силовской подгруппы  $P$  из  $F(G)$ . Поэтому возможны следующие варианты:

- 1)  $\text{Aut}(N_i)$  изоморфна циклической группе порядка  $p_i - 1$ ;
- 2)  $\text{Aut}(N_i)$  изоморфна подгруппе группы  $GL(2, p_i)$ ;

В первом случае фактор-группа  $G/C_G(N_i)$  циклическая. Поэтому  $G/C_G(N_i) \in \mathbf{A} \subset \mathbf{N}^3 \cap \mathbf{A}^4$ .

Во втором случае фактор-группа  $G/C_G(N_i)$  изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы  $GL(2, p_i)$  и фактор-группа  $G/C_G(N_i) \in \mathbf{N}^3 \cap \mathbf{A}^4$  по лемме 4. Так как  $\mathbf{N}^3 \cap \mathbf{A}^4$  – формация, то  $G/F \in \mathbf{N}^3 \cap \mathbf{A}^4$ . Поэтому  $G \in \mathbf{F}$ .

Итак, мы доказали, что  $G/F \in \mathbf{A}^4$ . Из леммы 1 следует, что  $F \in \mathbf{A}^3$ , поэтому производная длина  $G$  не превышает 7. Так как  $G \in \mathbf{N}^4$ , то нильпотентная длина  $G$  не превышает 4.

Пусть группа  $G$  является  $A_4$ -свободной. Тогда, повторяя доказательство основной части теоремы и используя лемму 5, получим, что  $G/F \in \mathbf{A}^2$ . Поэтому  $G \in \mathbf{N}^3$  и нильпотентная длина группы  $G$  не превышает 3, а так как по лемме 1  $F \in \mathbf{A}^3$ , то производная длина группы  $G$  не превышает 5.

Пусть группа  $G$  имеет нечетный порядок. Тогда, используя лемму 6, получим, что  $G/F \in \mathbf{A}$ . Поэтому  $G \in \mathbf{N}^2$  и нильпотентная длина группы  $G$  не превышает 2, а производная длина группы  $G$  не превышает 4 по лемме 1.

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов // Минск : Вышэйшая школа. – 2006.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.
3. Монахов, В.С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В.С. Монахов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.
4. Трофимук, А.А. Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы / А.А. Трофимук // Математические заметки. – 2010. – Т. 87, № 2. – С. 287–293.
5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва : Наука, 1978. – 272 с.
6. Berkovich, Y. Groups of Prime Power Order Volume 1 / Yakov Berkovich. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 2008.
7. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

***A.A. Trofimuk, V.O. Lukyanenko On Finite Groups Whose Normal Rank of Sylow Subgroups of the Fitting Subgroup is at Most 2***

We obtain estimates of the derived length and the nilpotent length of a solvable group  $G$  whose normal rank of Sylow subgroups of the Fitting subgroup is at most 2. In particular, the derived length of such group does not exceed 7 and the nilpotent length of such group does not exceed 4. Besides, if  $G$  is  $A_4$ -free then the nilpotent length of  $G$  is at most 3 and the derived length of  $G$  is at most 5; if  $G$  has odd order, then  $G$  is metanilpotent and the derived length of  $G$  is at most 4.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 06.11.2014