УДК 517.5

А.М. Поддубный

ТЕОРЕМЫ ТИПА ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА

В работе проведено исследование вопросов о граничном поведении производных аналитических и гармонических функций в единичном круге комплексной плоскости. Полученные результаты обобщают некоторые результаты Ф. Лесли и С. Варшавского и имеют вид, удобный для исследования граничных свойств обобщенных в смысле Ниче минимальных поверхностей.

Сформулируем сначала некоторые определения понятий и обозначения, используемые в работе.

Определение 1 [1, с.14]. Будем говорить, что вещественная функция $\omega(t)$, заданная на некотором сегменте $[0,l]$, принадлежит классу Ω, если выполняются следующие условия:

1) $\omega(0)=0, \quad \omega(t)>0$ при $t\in(0,l]$;

2) $\omega(t)$ не убывает вместе с t;

3) $\omega(t)$ непрерывна на $[0,l]$;

4) для $\forall t_1,t_2\in[0,l]$ выполняется неравенство

$$\omega(t_1+t_2)\le\omega(t_1)+\omega(t_2).$$

Функции класса Ω называют функциями типа модуля непрерывности. По теореме С.М. Никольского [2] для $\omega(t)\in\Omega$ имеет место равенство

$$\omega(\omega,t)=\omega(t).$$

Определение 2 [1, с.17]. Будем говорить, что $\omega(t)\in\Omega^*$, если $\omega(t)\in\Omega$ и выполняется условие Дини

$$\int_0^1\frac{\omega(t)}{t}dt<\infty.$$

Определение 3 [1, с.17]. Если $\omega(t)\in\Omega$ и существует такая константа $C>1$, что $\lim\limits_{t\to0}\frac{\omega(ct)}{\omega(t)}>1$, то скажем , что функция $\omega(t)$ принадлежит классу Ω**.

Известно [3], что если $\omega(t)\in\Omega$**, то

$$\int_0^t\frac{\omega(u)}{u}du\le A\omega(t),$$

где $A>0$ – константа, независящая от t.

Определение 4. Будем говорить, что вещественная функция $\varphi(t)$, заданная на сегменте $[-\pi,\pi]$, принадлежит обобщенному классу Гёльдера $H_p^\omega[-\pi,\pi]$, $1\le p<\infty$, если модуль непрерывности $\omega_p(\varphi,t)$ функции $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $\omega_p(\varphi,t)\le\omega(t)$, где $\omega(t)\in\Omega$ – функция типа модуля непрерывности.

Пусть $D=\{z\in C:|z|\le1\}$ – единичный круг, $T=\{z\in C:|z|=1\}$ – единичная окружность комплексной плоскости, $\overline{D}=D\bigcup T$. Классическая теорема Харди–Литтлвуда описывает связь между гладкостью предельных значений аналитической функции на границе аналитичности и скоростью роста модуля ее производных высших порядков, а именно

Теорема Харди–Литтлвуда [4, с. 397]. Для того чтобы функция $f(z)$ аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$ удовлетворяла на T условию Липшица

$$\left|f(e^{i\theta})-f(e^{i\theta'})\right|\le K\left|\theta-\theta'\right|^{\alpha},\ 0<\alpha\le 1,$$

необходимо и достаточно, чтобы в D выполнялось неравенство

$$\left|f'(z))\right|\le\frac{M}{(1-r)^{1-\alpha}},\ r=|z|,$$

где M – конечная постоянная.

Эта теорема стала эффективным орудием в решении многих задачах теории функций и теории тригонометрических рядов. Классические результаты Г. Харди и Дж. Литтлвуда [4, с.397–399] о граничных свойствах функций, аналитических в открытом круге и непрерывных в замкнутом круге, обобщались в разных направлениях в зависимости от их применения. В частности, в работах [5 – 7] получено обобщение результатов Г. Харди и Дж. Литтлвуда в форме, удобной для исследования граничных свойств обобщенных в смысле Ниче [8] минимальных поверхностей.

Ниже изложенное утверждение дополняет результаты автора, полученные в [7] и обобщает некоторые результаты Ф. Лесли и С. Варшавского [5; 6].

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в D и непрерывна в $\overline{D}$. Если для всех $z=re^{i\theta}$, $0\le r<1$, выполняется неравенство

$$\left|f^{(n+k)}(z)\right|\ \le M\int\limits_{1-r}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^{k+1}}dt,\ M=const>0,$$

где $\omega(t), t\ge 0$ – неотрицательная неубывающая функция, удовлетворяющая условию Дини

$$\int\limits_0^1\frac{\omega(t)}{t}dt<\infty,$$

$n\in N, k=0,1,2,...,$ то существует константа $K>0$, независящая от r, такая, что для $z\in D$ выполняется неравество

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le K.$$

Доказательство. Имеет место формула Тейлора для функции $f^{(n)}(z)$, $|z|<1,$ с остаточным членом в интегральной форме

$$f^{n}(z)=f^{(n)}(0)+f^{(n+1)}(0)z+\ldots+f^{(n+k-1)}(0)\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}+ \\ +\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^z(z-z_1)^{k-1}f^{(n+k)}(z_1)dz_1\,. \tag{1}$$

Так как нам надо оценить $\left|f^{(n)}(z)\right|$, $|z|<1$, то достаточно ограничиться оценкой интегрального слагаемого в правой части (1), потому что величина

$$\left|f^{(n)}(0)+f^{(n+1)}(0)z+\ldots+f^{(n+k-1)}(0)\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}\ \right|$$

ограничена сверху в замкнутому круге $\overline{D}$. Иными словами, не нарушая общности, можно считать, что

$$f^{(n)}(0) = f^{(n+1)}(0) = \ldots = f^{(n+k-1)}(0) = 0$$

и исследовать формулу

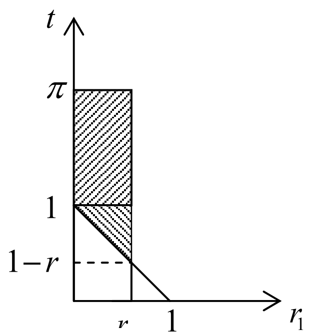
$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^z (z - z_1)^{k-1} f^{(n+k)}(z_1)d(z_1).$$

Обозначим $z = re^{i\theta}$, $z_1 = re^{i\theta}$ и будем считать, что интегрирование ведется вдоль радиус-векторов точек, взятых в рассматриваемом круге. Тогда

$$f^{(n)}(re^{i\theta}) = \frac{e^{ik\theta}}{(k-1)!}\int_0^r (r - r_1)^{k-1} f^{(n+k)}(r_1 e^{i\theta})dr_1,$$

а следовательно, используя условие теоремы, получаем, что

$$\left|f^{(n)}(re^{i\theta})\right| \le \frac{M}{(k-1)!}\int_0^r (r - r_1)^{k-1}\int_{1-r}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^{k+1}}dtdr_1. \qquad (2)$$



Далее изменим порядок интегрирования в повторном интеграле, используя класическую теорему Фубини. А именно, заданный двукратный интеграл в правой части (2) по области $\begin{pmatrix} 0 \le r_1 \le r \\ 1 - r_1 \le t \le \pi \end{pmatrix}$ заменим сумой двукратных интегралов по областям $\begin{pmatrix} 1 - r \le t \le 1 \\ 1 - t \le r_1 \le r \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \le t \le \pi \\ 0 \le r_1 \le r \end{pmatrix}$.

Тогда

$$\left|f^{(n)}(re^{i\theta})\right| \le \frac{M}{(k-1)!}\left[\int_{1-r}^{1}\int_{1-t}^{r}\frac{(r-r_1)^{k-1}\omega(t)}{t^{k+1}}dr_1dt + \int_1^{\pi}\int_0^{r}\frac{(r-r_1)^{k-1}\omega(t)}{t^{k+1}}dr_1dt\right] =$$

$$= \frac{M}{(k-1)!}\left[\int_{1-r}^{1}\frac{\omega(t)}{t^{k+1}}\int_{1-t}^{r}(r-r_1)^{k-1}dr_1dt + \int_1^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^{k+1}}\int_0^{r}(r-r_1)^{k-1}dr_1dt\right] =$$

$$= \frac{M}{(k-1)!}\left[\frac{1}{k}\int_{1-r}^{1}\frac{\omega(t)}{t^{k+1}}(r-1+t)^k dt + \frac{1}{k}\int_1^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^{k+1}}r^k dt\right].$$

В силу свойств функции $\omega(t)$, $t > 0$,

$$\int_1^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^{k+1}}r^k dt \le \int_1^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^{k+1}}dt \le \omega(\pi)(\pi - 1),$$

и $r - 1 + t \le t$ получим

$$\int_{1-r}^{1}\frac{\omega(t)}{t^{k+1}}(r-1+t)^k dt \le \int_{1-r}^{1}\frac{\omega(t)}{t}dt \le \int_0^1\frac{\omega(t)}{t}dt < \infty \text{ (за условием Дини).}$$

Тогда

$$\left|f^{(n)}(re^{i\theta})\right| \le \frac{M}{k!}\left[\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}dt + \omega(\pi)(\pi-1)\right] = K = const > 0.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. При $k=1$ из данной теоремы получаем следствие к лемме 2 работы [5]. Следует отметить, что метод доказательства теоремы отличается от метода доказательства соответствующих результатов работы [5].

Следующая же теорема дает для гармонических в единичном круге функций достаточные условия принадлежности предельных значений к обобщенному классу Гельдера.

Теорема 2. Пусть $u(re^{i\theta})$ гармоническая в D функция с граничной функцией $u(e^{i\theta}) \in L_p[-\pi,\pi]$, $1 \le p < \infty$. Если для $\omega(t) \in \Omega^{**}$ выполняются условия

$$\left\|\frac{\partial u(re^{i\theta})}{\partial r}\right\| \le C_1 \frac{\omega(1-r)}{1-r}, \qquad \left\|\frac{\partial u(re^{i\theta})}{\partial \theta}\right\| \le C_2 \frac{\omega(1-r)}{1-r},$$

где C_1, C_2 − положительные константы , не зависящие от r, то $u(e^{i\theta}) \in H_p^{\omega}[-\pi,\pi]$.

Доказательство. Нужно доказать соотношение:

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \int_{-\pi}^{\pi}\left|u(re^{i(\theta+h)}) - u(re^{i\theta})\right|^p d\theta \le C[\omega(h)]^p,$$

где $C = const > 0$ не зависит от h.

Не теряя общности, будем считать, что $\frac{1}{2} \le r < 1$, $0 < h < \frac{1}{2}$, и введем следующие обозначения:

$$u'_\theta = \frac{\partial u}{\partial \theta}, \qquad u'_r = \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Тогда для $0 < \rho < r$ будем иметь

$$u(re^{i(\theta+h)}) - u(re^{i\theta}) = [u(re^{i(\theta+h)}) - u(\rho e^{i(\theta+h)})] + [u(\rho e^{i(\theta+h)}) - u(\rho e^{i\theta})] +$$

$$+[u(\rho e^{i\theta}) - u(re^{i\theta})] = e^{i(\theta+h)}\int_\rho^r u'_r(te^{i(\theta+h)})dt + i\rho\int_\theta^{\theta+h} e^{it}u'_\theta(\rho e^{it})dt + e^{i\theta}\int_\rho^r u'_r(te^{i\theta})dt.$$

Для $0 < \rho < r$ имеем

$$\Delta_h(\theta) := \left|u(re^{i(\theta+h)}) - u(re^{i\theta})\right| \le \int_\rho^r \left|u'_r(te^{i(\theta+h)})\right|dt + \int_\theta^{\theta+h}\left|u'_\theta(\rho e^{it})\right|dt + \int_\rho^t \left|u'_r(te^{i\theta})\right|dt =:$$

$$=: \Delta_1(\theta) + \Delta_2(\theta) + \Delta_3(\theta).$$

В результате получаем оценку

$$\|\Delta_h(\theta)\| \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\Delta_1(\theta))^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\Delta_2(\theta))^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\Delta_3(\theta))^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = i_1 + i_2 + i_3$$

Проведем теперь оценку интегралов i_k, $k=1, 2, 3,$ используя обобщенное неравенство Минковского [9 , с.601], условие теоремы и соответствующие свойства функции $\omega(t)$.

$$i_1=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{\rho}^{r}\left|u'_r(te^{i(\theta+h)})\right|dt\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\le\int_{\rho}^{r}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u'_r(te^{i(\theta+h)})\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}dt\le$$

$$\le C_1\int_{\rho}^{r}\frac{\omega(1-t)}{1-t}dt=C_1\int_{1-r}^{1-\rho}\frac{\omega(u)}{u}du,\qquad C_1=const>0 .$$

Положим $1-h=r$, $\rho+h=r$. Это можно сделать, поскольку $\frac{1}{2}\le r<1$. Тогда $\rho=r-h=1-2h$, а следовательно

$$i_1\le C_1\int_{h}^{2h}\frac{\omega(u)}{u}du .$$

Полагая $u=t+h$, получим:

$$i_1\le C_1\int_0^h\frac{\omega(t+h)}{t+h}dt\le C_1\int_0^h\frac{\omega(t)+\omega(h)}{t+h}dt\le C_1\left[\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}dt+\int_0^h\frac{\omega(h)}{h}dt\right]=$$

$$=C_1\left[\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}dt+\omega(h)\right].$$

И поскольку $\omega(t)\in\Omega^{**}$, то

$$i_1\le(C_1+A)\omega(h)=C_1^*\omega(h),\quad C_1^*=const>0. \tag{3}$$

Аналогично устанавливается оценка

$$i_3\le C_3\omega(h)\ . \tag{4}$$

Поскольку

$$\Delta_2(\theta)=\int_0^h\left|u'_\theta(\rho e^{i(\theta+t)})\right|dt,$$

то, используя условия теоремы, аналогично оценке величины i_1 получаем:

$$i_2=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\Delta_2(\theta)\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^h\left|u'_\theta\left(\rho e^{i(\theta+t)}\right)\right|dt\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le\int_0^h\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u'_\theta\left(\rho e^{i(\theta+t)}\right)\right|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}dt\le\int_0^h\frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}dt=\frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}h .$$

Поскольку

$\rho+h=r$, и $1-\rho=2h$, то

$$i_2 \le \frac{\omega(2h)}{2h} h \le \omega(h). \tag{5}$$

Тепер из соотношений (3) – (5) получаем, что $\|\Delta_h(\theta)\| \le C\omega(h)$, где $C = const > 0$ не зависит от h.

Теорема 2 доказана.

Следствие. При $\omega(t) = t^{\alpha}, 0 < \alpha \le 1,$ из теоремы 2 получаем лему 3 работы [10].

Замечание 2. Теорему 2 можно получить как следствие одной теоремы Ю.И. Волкова [11, теорема 1] при $k = 1$, но теорема 1 Ю.И. Волкова получена при дополнительном условии на модуль непрерывности $\omega(t)$: существует такое $\beta,\ \ 0 < \beta < 1,$ что функция $t^{-\beta}\omega(t)$ не возрастает. В теореме 2 такого условия на модуль непрерывности нету.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковальчук, Р.Н. О некоторых свойствах интегрального модуля гладкости граничной функции класса $H_p(p \ge 1)$ / Р.Н. Ковальчук // Теория функций, функциональный анализ и их приложения : Респ. науч. сб. / Харьковский госуд. ун-т им. А.М. Горького. – Харьков : Изд-во Харьковского ун-та, 1969. – Вып. 9. – С. 14–20.
2. Никольский, С.М. Ряд Фурье с данным модулем непрерывности / С.М. Никольский // Докл. АН СССР. – 1946. – 52, №3 – С. 191–194.
3. Бари, Н.К. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций / Н.К. Бари, С.Б. Стечкин // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – Вып. 5. – С. 483–522.
4. Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. – М. : Наука, 1966. – 623 с.
5. Lesley F.D. Differentiability of minimal surfaces at the boundary / F.D. Lesley // Pacific J. Math. – 1971. – 37, №1. – P. 123–139.
6. Warschawski, S. Boundary Derivatives of Minimal Surfaces / S. Warschawski // Arch. Rational Mech. Anal. – 1970. – 38. – P. 241–256.
7. Піддубний, О.М. Оцінки зростання вздовж радіуса похідних аналітичних функцій / Піддубний О.М. // Укр. мат. журн. – 2013. – 65, № 10. – С. 1420–1426.
8. Nitsche, J.C. On new resultat in the theory of minimal surfaces / J.C. Nitsche // Bull. Amer. Math. Soc. – 1965. – 71. – P. 195–270.
9. Тиман, М.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / М.Ф. Тимман. – М. : Физматгиз, 1960. – 624 с.
10. Stegbuchner, H. Eindeutigkeitsmengen holomorpher Funktionen, die einer integrierten Lmschitzbedingung genügen / H. Stegbuchner // Math. Nachr. – 1982. – 106. – P. 73–88.
11. Волков, Ю.І. Про граничні властивості одного класу функцій, аналітичних в крузі / Ю.І. Волков //Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1968. – № 11. – С. 968–972.

O.M.Piddubny **Hardy-Littlewood Type Theorems**

In this paper we researched the issues about the boundary behavior of derivatives of analytic and harmonic functions in the unit disc of the complex plane. The obtained results generalize some F.Lesley and S.Warschawski results and have a form convenient for the study of boundary properties of generalized in the sense of Nitsche minimal surfaces.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 25.09.2014