

УДК 517.9

Е.В. Пантелеева

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА, ПОРОЖДЁННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯМИ ТИПА МОРСА–СМЕЙЛА В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В работе получены необходимые и достаточные условия правосторонней обратимости операторов взвешенного сдвига в пространстве вектор-функций $L_2(X, \square^m, \mu)$ и формулы для соответствующих правых обратных. Операторы взвешенного сдвига порождены отображениями типа Морса–Смейла. Условия односторонней обратимости оператора $B - \lambda I$ ранее были получены только для одного класса отображений с простыми динамическими свойствами. Такие отображения имеют одну притягивающую точку, одну отталкивающую и не имеют седловых точек. Отображений типа Морса–Смейла обладают более сложной динамикой, т.к. имеют седловые точки, которые существенно влияют на свойства оператора. В статье доказано, что необходимым и достаточным условием правосторонней обратимости операторов взвешенного сдвига является существование разложения векторного расслоения $E = X \times C^m$ в прямую сумму устойчивого в положительном направлении и устойчивого в отрицательном направлении векториальных подмножеств. Ранее при исследовании спектральных свойств операторов взвешенного сдвига векториальные подмножества не использовались.

Введение

Данная работа связана с исследованием односторонней обратимости $B - \lambda I$ в случае, когда B есть оператор взвешенного сдвига в пространстве вектор-функций $L_2(X, \square^m, \mu)$, т.е. функций со значениями в m -мерном комплексном пространстве \square^m .

Линейный ограниченный оператор B , действующий в банаховом пространстве вектор-функций $F(X)$ на произвольном множестве X , называется *оператором взвешенного сдвига (ОВС)*, если он может быть представлен в виде

$$Bu(x) = A_0(x)u(\alpha(x)), \quad x \in X,$$

где $\alpha: X \rightarrow X$ – некоторое отображение, $A_0(x)$ заданная матрично-значная функция на X .

Мы рассматриваем случай, когда X – компактное метрическое пространство, а $\alpha: X \rightarrow X$ есть обратимое непрерывное отображение.

Описание спектра таких операторов в классических пространствах известно, т.е. получены условия обратимости операторов вида $B - \lambda I$ [1–3]. Однако интерес представляют также и условия правосторонней обратимости таких операторов, поскольку это есть условия существования решений соответствующих функциональных уравнений.

Сложность исследования операторов взвешенного сдвига зависит от сложности динамики отображения α , т.е. от поведения траекторий. Напомним, что *траекторией точки x_0* называется двусторонняя последовательность точек, заданная правилом

$$x_k = \alpha(x_{k-1}) = \alpha_k(x_0), \quad \alpha_k(x) = \alpha(\alpha_{k-1}(x)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому обычно сначала исследовались операторы, порожденные отображениями с достаточно простыми динамическими свойствами, а затем результаты переносились на общую ситуацию. Одним из классов отображений со сравнительно простой динамикой являются т.н. отображения типа Морса–Смейла.

Непрерывное отображение $\alpha: X \rightarrow X$ компактного метрического пространства называется *отображением типа Морса–Смейла*, если оно обратимо, имеет конечное число неподвижных точек и для каждой точки из X траектория стремится к одной из

неподвижных точек при $k \rightarrow +\infty$ и стремится к другой неподвижной точке при $k \rightarrow -\infty$.

Условия правосторонней обратимости $B - \lambda I$ для операторов взвешенного сдвига в пространствах вектор-функций ранее были получены только для одного очень специального класса отображений [4, с. 18], однако правосторонняя резольвента не строилась.

В данной работе получены необходимые и достаточные условия правосторонней гиперболичности оператора взвешенного сдвига B и построена правосторонняя резольвента для операторов, порожденных более широким классом отображений, чем рассмотренные в [4]. Эти отображения имеют более сложную динамику, так как у них имеются седловые точки, которые существенно влияют на свойство обратимости.

1. Правосторонне гиперболические операторы

Пусть B есть линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве F . Оператор B будем называть *правосторонне гиперболическим*, если операторы $B - \lambda I$ правосторонне обратимы для любого λ из некоторой окрестности единичной окружности и при этом существует семейство правых обратных $R_r(B; \lambda)$ для $B - \lambda I$, аналитически зависящее от λ .

Такое семейство $R_r(B; \lambda)$ будем называть *правосторонней резольвентой* для B .

В рассматриваемом случае единичная окружность принадлежит спектру оператора B , поэтому для таких операторов существует много различных правосторонних резольвент.

Пусть оператор B обратим. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. [5] Пусть обратимый оператор B является правосторонне гиперболическим и пусть $R_r(B; \lambda)$ – некоторая его правосторонняя резольвента. Разложение правосторонней резольвенты $R_r(B; \lambda)$ в операторный ряд Лорана в окрестности единичной окружности имеет вид

$$R_r(B; \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P) - \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P, \quad (1)$$

где оператор P связан с резольвентой той же формулой, что и проектор Рисса:

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{s^1} R_r(B; \lambda) d\lambda.$$

Формула (1) имеет тот же вид, что и формула для резольвенты гиперболического оператора, в случае гиперболического оператора оператор P есть известный проектор Рисса. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. [5] Пусть оператор B обратим. Если существует такой ограниченный оператор P , что операторный ряд (1) сходится по норме, то сумма этого ряда является правосторонней резольвентой.

Рассмотрим векторные подпространства

$$F^+ = \left\{ u \in F : \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \|B^n u\|^{1/n} < 1 \right\},$$

$$F^- = \left\{ u \in F : \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \|[B^{-1}]^n u\|^{1/n} < 1 \right\}.$$

Из теоремы 2 следует, что для того, чтобы построить правостороннюю резольвенту, достаточно получить соответствующий оператор P . Свойства оператора P , которые необходимы для сходимости ряда (1), описаны в следующей лемме:

Лемма 1. [5] Пусть F – гильбертово пространство и для введенных подпространств F^+ и F^- выполнено условие

$$F^+ + F^- = F, \quad (2)$$

то операторы $B - \lambda I$ правосторонне обратимы для всех λ из окрестности единичной окружности.

Если для ограниченного линейного оператора P выполнены включения

$$\text{Im } P \subset F^+, \text{Im}(I - P) \subset F^-, \quad (3)$$

то ряд (1) сходится, его сумма является правосторонней резольвентой и B есть правосторонне гиперболический оператор.

Значит, необходимо построить подпространства F^+ и F^- , для которых выполняется условие (2), а затем построить оператор P , для которого выполнены включения (3).

Отметим, что может существовать много различных операторов, удовлетворяющих условию (3), и, соответственно существует много различных правосторонних резольвент.

2. Локальные свойства устойчивых подмножеств

Неподвижная точка τ отображения α называется *притягивающей*, если для любой ее окрестности W существует инвариантная окрестность $U \subset W$, такая, что для всех $x \in U$ траектория $\alpha_k(x) \rightarrow \tau$ при $k \rightarrow +\infty$.

Точка, притягивающая для обратного отображения, называется *отталкивающей* для α .

Неподвижная точка τ отображения α называется *седловой*, если в любой ее окрестности W существует точка, траектория которой стремится к τ при $k \rightarrow +\infty$, и существует точка, траектория которой стремится к τ при $k \rightarrow -\infty$.

Будем рассматривать операторы взвешенного сдвига, порожденные отображениями $\alpha: X \rightarrow X$ в пространствах вектор-функций $L_2(X, \square^m, \mu)$. Для каждого из классов зададим функцию $\rho_d(x)$ соответственно

$$\rho(x) = \sqrt{\psi'(x_1)\psi'(x_2)\dots\psi'(x_d)}.$$

Тогда оператор $T_\alpha u(x) = \rho(x)u(\alpha(x))$ является унитарным в соответствующем пространстве. Оператор B удобно записывать в *стандартном виде* $B = AT_\alpha$, где матрица-функция $A(x) = \rho_d^{-1}(x)A_0(x)$ называется *приведенным коэффициентом*. Ниже считаем, что приведенный коэффициент является невырожденной непрерывной матрично-значной функцией.

Ассоциированное линейное расширение

Оператор $B - \lambda I$ может быть записан в виде $B - \lambda I = \lambda \left(\frac{1}{\lambda} B - I \right)$, где оператор $\frac{1}{\lambda} B$ также является оператором взвешенного сдвига. Поэтому в дальнейшем будем исследовать операторы вида $B - I$.

Произведение $E = X \times \square^m$ рассматривается как векторное расслоение над X с естественной проекцией [5]; слой E_x над точкой $x \in X$ является множеством

$$E_x = \{(x, \xi) : \xi \in \square^m\} = \{x\} \times \square^m,$$

изоморфное \square^m . В каждом слое определена норма, ниже используется обозначение $\|(x, \xi)\| := \|\xi\|$.

Каждое подмножество $K \subset E$ разбивается на слои $K_x = K \cap E_x$. Подмножество K называется *векториальным*, если для любого x слой K_x является векторным подпространством в E_x и измеримо зависит от x .

Векториальное подмножество $K \subset E$ называется *векторным подрасслоением*, если слои K_x непрерывно зависят от x .

Ассоциированное с оператором B отображение $\beta: E \rightarrow E$ задается формулой

$$\beta(x, \xi) = (\alpha^{-1}(x), A(\alpha^{-1}(x))\xi), \quad x \in X, \quad \xi \in \mathbb{R}^m. \quad (4)$$

При отображении β слой над точкой x линейно отображается в слой над точкой $\alpha^{-1}(x)$; действующие таким образом отображения векторного расслоения называются *линейными расширениями* отображения α^{-1} на векторное расслоение E .

Из предшествующих результатов [4] следует, что ассоциированное с оператором V линейное расширение β является наиболее простым объектом, к рассмотрению которого можно свести исследование оператора взвешенного сдвига в пространстве вектор-функций.

Устойчивые подмножества в окрестности притягивающей и отталкивающей точек

Подмножество $K \subset E$ называется *устойчивым в положительном направлении* относительно β , если существуют $\tilde{N}^+ > 0$ и $\gamma^+ < 1$ такие, что для всех $(x, \xi) \in K$ выполняется неравенство

$$\|\beta^k(x, \xi)\| \leq C^+(\gamma^+)^k \|(x, \xi)\|, \quad k > 0. \quad (5)$$

Подмножество $K \subset E$ называется *устойчивым в отрицательном направлении* относительно β , если существуют $\tilde{N}^- > 0$ и $\gamma^- < 1$ такие, что для всех $(x, \xi) \in K$ выполняется неравенство

$$\|\beta^{-k}(x, \xi)\| \leq C^-(\gamma^-)^k \|(x, \xi)\|, \quad k \geq 0.$$

Введём обозначения. Для неподвижной точки τ_j обозначим через $\lambda_i(\tau_j)$ собственные значения матрицы $A(\tau_j)$. Пусть $m(j)$ есть количество собственных значений (с учётом кратности) матрицы, которые по модулю меньше 1.

Локальные свойства устойчивых подмножеств вблизи неподвижных точек описаны в следующей лемме:

Лемма 2. [7] Пусть β есть линейное расширение (4), точка τ есть отталкивающая точка и для матрицы $A(\tau)$ выполнено условие гиперболичности: $|\lambda_i(\tau)| \neq 1$.

Тогда над достаточно малой окрестностью $U(\tau)$ точки τ существует однозначно определённое максимальное подмножество, устойчивое в положительном направлении. Это подмножество является инвариантным относительно β векторным подрасслоением с размерностью слоя $m(\tau)$. Проектор на это подрасслоение является оператором умножения на непрерывную проекторно-значную матрицу-функцию, которая может быть построена в виде явно заданного ряда.

Множеством асимптотической устойчивости для β на $\pm\infty$ будем называть подмножество $E^\pm \subset E$, состоящее из пар $(x, \xi) \in E$, для которых $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \|\beta^n(x, \xi)\| < 1$.

Искомое векториальное подмножество V_x^+ должно принадлежать E^+ , а векториальное подмножество V_x^- должно принадлежать E^- . Также очевидно, что в неподвижных точках должно быть $V^\pm = E^\pm$.

Основная сложность построения связана с тем, что множество E^+ является векториальным, но не является устойчивым, а максимальное устойчивое подмножество, т.е. подмножество вида

$$S(C, \gamma) = \{(x, \xi) \in E^+ : \|\beta^k(x, \xi)\| \leq C\gamma^k \|(x, \xi)\|, k \geq 0\},$$

где $C > 0$ и $\gamma < 1$, не является векториальным. В [7] показано, что если векториальное подмножество содержится в $S(C, \gamma)$, то в окрестности неподвижной точки τ_j размер-

ность слоя не превосходит числа $m(\tau_j)$. При подходящем выборе $C > 0$ и $\gamma < 1$ множество $S(C, \gamma)$ содержит хотя бы одно векториальное подмножество, достаточно большое в том смысле, что в окрестности каждой неподвижной точки τ_j размерность слоя есть $m(\tau_j)$.

3. Условия правосторонней обратимости

Теорема 3. [8] Пусть α – отображение типа Морса-Смейла. Оператор $B - I$ правосторонне обратим тогда и только тогда, когда для множеств асимптотической устойчивости E^\pm выполнено условие трансверсальности:

$$E_x = E_x^+ + E_x^- \text{ для всех } x \in X.$$

Будем говорить, что векторное расслоение E есть прямая сумма векториальных подмножеств (обозначаем $E = V^+ \oplus V^-$), если для каждого $x \in X$ выполнено $E_x = V_x^+ \oplus V_x^-$ и существует постоянная M , такая, что $\|p(x)\| \leq M$ для всех $x \in X$, где $p(x)$ есть проектор на V_x^+ в слое E_x с ядром V_x^- . Если подмножества V_x^+ и V_x^- являются векторными подрасслоениями, то в силу компактности X условие ограниченности в совокупности норм проекторов $p(x)$ выполнено автоматически.

Теорема 4. [9] Пусть B есть оператор взвешенного сдвига, порождённый произвольным обратимым отображением. Пусть существуют устойчивое в положительном направлении векториальное подмножество V^+ и устойчивое в отрицательном направлении векториальное подмножество V^- , такие, что

$$E = V^+ \oplus V^-$$

и P есть проектор в $L_2(X, \square^m)$, порождённый этим отображением, действующий по правилу $Pu(x) = p(x)u(x)$. Тогда подпространство $\text{Im } P$ инвариантно относительно B , подпространство $\text{Im}(I - P)$ инвариантно относительно B^{-1} и формула (1) задаёт одну из правосторонних резольвент, определённую в некотором кольце, содержащем единичную окрестность.

Отметим, что в рассматриваемом случае существует много правосторонних резольвент, им соответствуют различные операторы P и только некоторые из них есть проекторы, порожденные разложениями на устойчивые векториальные подмножества. Поэтому такие подмножества приходится строить непосредственно.

Построение устойчивых векториальных подмножеств для модельного класса отображений

В качестве X будем рассматривать d -мерный куб $X_d \subset R^d : X_d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) : 0 \leq x_j \leq 1\}$ и будем рассматривать отображения $\alpha : X \rightarrow X$, заданные формулой

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_d) = (\psi(x_1), \psi(x_2), \dots, \psi(x_d)).$$

Особенности динамики рассматриваемых отображений заключаются в том, что эти отображения имеют конечное число неподвижных точек и для каждой точки из X (не являющейся неподвижной) траектория стремится к одной из неподвижных точек при $k \rightarrow +\infty$ и стремится к другой неподвижной точке при $k \rightarrow -\infty$.

При $d = 1$ такие отображения имеют одну отталкивающую точку $\tau_0 = 0$ и одну притягивающую точку $\tau_1 = 1$ и не имеют седловых точек.

При $d = 2$ такие отображения имеют четыре неподвижные точки: отталкивающую точку $\tau_0 = (0, 0)$, притягивающую точку $\tau_3 = (1, 1)$, и две седловые точки $\tau_1 = (0, 1)$ и $\tau_2 = (1, 0)$.

В общем случае d неподвижными точками являются вершины куба (их количество есть 2^d), при этом точка $\tau_0 = (0, 0, \dots, 0)$ - отталкивающая, точка $\tau_{2^d-1} = (1, 1, \dots, 1)$ - притягивающая, а остальные вершины являются седловыми точками.

Полученные ниже результаты могут быть перенесены на более широкий класс отображений с аналогичными динамическими свойствами, но в данной работе мы ограничимся рассмотрением указанных модельных классов.

Теорема 5. [9] Пусть B есть оператор взвешенного сдвига, порожденный модельным отображением d -мерного куба, и выполнены условия трансверсальности

$$E_x = E_x^+ + E_x^- \text{ для всех } x \in X.$$

Тогда могут быть построены устойчивое в положительном направлении векториальное подмножество V^+ и устойчивое в отрицательном направлении векториальное подмножество V^- , такие, что

$$E = V^+ \oplus V^-$$

и, следовательно, правосторонняя резольвента может быть построена по формуле

$$R_r(B; \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} (I - P) - \sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P.$$

В работе впервые при исследовании операторов взвешенного сдвига использованы векториальные подмножества. Это является новым подходом, так как решение рассматриваемых задач не может быть получено с использованием только векторных подрасслоений, традиционно рассматриваемых в этой тематике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антоневиц, А.Б. Линейные функциональные уравнения: операторный подход / А.Б. Антоневиц. – Минск : Университетское, 1988. – 231 с.
2. Бронштейн, И.У. Неавтономные динамические системы / И.У. Бронштейн. – Кишинев : Штиинца, 1984. – 290 с.
3. Каток, А.Б. Введение в современную теорию динамических систем / А.Б. Каток, Б. Хасселблат. – Москва : Факториал, 1999. – 765 с.
4. Антоневиц, А.Б. Когерентная локальная гиперболичность линейного расширения / А.Б. Антоневиц // Функциональный анализ и его прил., 2005. – Т. 39, вып.1. – С. 52–69.
5. Antonevich, A.B. Right-Side Hyperbolic Operators / A.B. Antonevich, E.V. Panteleeva // Scientific Publications of the State University of Novi Pazar. Ser. A, Applied Mathematics, Informatics and Mechanics. – 2014. – № 1. – С. 1–9.
6. Karlovich, Yu.I. One-sided invertibility of functional operator with non-Carleman shift in Hölder spaces / Yu.I. Karlovich, R. Mardiev // Soviet Math. (Iz.VUZ), 1987. – 31 (3). – С. 106–110.
7. Пантелеева, Е.В. Локальные свойства подмножеств, устойчивых относительно линейного расширения / Е.В. Пантелеева // Труды института математики. – 2013. – №2 (21). – С. 142–153.
8. Антоневиц, А.Б. Правосторонние резольвенты дискретных операторов взвешенного сдвига с матричными весами / А.Б. Антоневиц, Е.В. Пантелеева // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – №3 (16). – С. 45–54.
9. Антоневиц, А.Б. Правосторонняя гиперболичность операторов, порождённых отображениями типа Морса-Смейла / А.Б. Антоневиц, Е.В. Пантелеева // Вестник ГрГУ им. Я.Купалы. Сер. 2, Матем. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2014. – №1 (170). – С. 65–72.

***E. V. Panteleeva* Spectral Properties of Weighted Shift Operators Generated by a Morse-Type Display Smail in Spaces of Vector-Valued Functions**

Weighted shift operators B in the space of vector-functions on a set X generated by mapping $\alpha : X \rightarrow X$ are considered. Condition of right-side invertibility for operators $B - \lambda I$ was obtained earlier for a special class of mappings having only attracting and repelling fixed points. The goal of the paper is to obtain necessary and sufficient conditions of right-side invertibility of $B - \lambda I$ and to construct the right-side resolvent for more large class of mappings, i.e. Morse-Smail type mappings. These mapping have saddle points and its dynamics is more complicated. Invertibility conditions of $B - \lambda I$ are known and can be formulated as existence of decomposition into sum of vector subbundles, stable and unstable with respect to a linear extension associated with operator. The main result of this paper is the claim that if use vectorial subsets the conditions of the right-side invertibility can be written in the similar form. Moreover by seeing this decomposition we construct a right-side resolvent for B .

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 18.11.2014