УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик

СХОДИМОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С АПОСТЕРИОРНЫМ ВЫБОРОМ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В работе доказана сходимость метода с апостериорным выбором числа итераций в исходной норме гильбертова пространства в случае самосопряженного оператора, в предположении, что погрешности имеются в правой части уравнения. Получены оценка погрешности метода и оценка для апостериорного момента останова. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении линейных операторных уравнений, а также при решении прикладных некорректных задач.

Введение

В статье предлагается итерационный метод неявного типа решения некорректно поставленных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода в гильбертовом пространстве. Метод представляет собой семейство итерационных схем, зависящих от параметра k.

Сравнение предлагаемого неявного метода с хорошо известным явным методом итераций $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right)$, $x_{0,\delta} = 0$ [1–8] показывает, что порядки их оптимальных оценок совпадают. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод из [1–8] предпочтительнее предлагаемого неявного метода. Однако предложенный неявный метод обладает следующим важным достоинством. В явном методе из [1–8] на шаг α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$, что может на практике привести к необходимости большого числа итераций. В рассматриваемом неявном методе никаких ограничений сверху на итерационный параметр $b > 0$ нет. В связи с чем оптимальную оценку для рассматриваемого неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций.

1. Постановка задачи. В работе решается уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с действующим в гильбертовом пространстве H неограниченным линейным самосопряженным оператором A, в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, однако, вообще говоря, не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) всё же существует, то для его отыскания предлагается новый неявный итерационный метод

$$\left(A^{2k} + B\right)x_{n+1} = Bx_n + A^{2k-1}y,\ x_0 = 0,\ k \in N, \tag{2}$$

где $E -$ единичный оператор, а $B -$ ограниченный вспомогательный самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмем оператор $B = bE, b > 0$. Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью δ, т. е. известен y_δ, для которого $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Поэтому вместо (2) приходится рассматривать приближение

$$\left(A^{2k} + B\right)x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + A^{2k-1}y_{\delta,}\ x_{0,\delta} = 0,\ k \in N. \qquad (3)$$

Ниже под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколько угодно близко подходят к точному решению операторного уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточных малых δ. Иными словами, метод (3) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{n}\|x - x_{n,\delta}\|\right) = 0$.

Для метода (3) при условии $b > 0$ доказана сходимость при точной и приближенной правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокообразно представимо, т. е. что $x = A^{2s}z, s > 0$, получена априорная оценка погрешности $\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le \left(\frac{bs}{2kn}\right)^{\frac{s}{k}}\|z\| + 2k\left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}}\delta,\ n \ge 1$ [9]. Эта оценка погрешности была оптимизирована: $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1+2s)\left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{s(1-2k)}{k(1+2s)}} 2^{-\frac{s}{k(2s+1)}}\|z\|^{\frac{1}{2s+1}}\delta^{\frac{2s}{2s+1}}$ и найден априорный момент останова $n_{\text{опт}} = 2^{-\frac{2s}{2s+1}}\left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{2(s+k)}{2s+1}} b\,\|z\|^{\frac{2k}{2s+1}}\delta^{-\frac{2k}{2s+1}}$. Очевидно, что оптимальная оценка не зависит от итерационного параметра *b*, но от *b* зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения объёма вычислительной работы следует брать *b*, удовлетворяющим условию $b > 0$, и так, чтобы $n_{\text{опт}} = 1$. Для этого достаточно выбрать $b_{\text{опт}} = 2^{\frac{2s}{2s+1}}\left(\frac{s}{k}\right)^{-\frac{2(s+k)}{2s+1}}\|z\|^{-\frac{2k}{2s+1}}\delta^{\frac{2k}{2s+1}}$.

В статье [10] доказано, что при условии $b > 0$ итерационный метод (3) сходится в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, если число итераций *n* выбирать из условия $\sqrt[4k]{n}\,\delta \to 0$ при $n \to \infty$, $\delta \to 0$. В энергетической норме без знания истокообразной представимости точного решения найден априорный момент останова $n_{\text{опт}} = b\,2^{-\frac{3+2k}{2}}k^{-\frac{1+2k}{2}}\|x\|^{2k}\delta^{-2k}$ и получены условия, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства *H*. Также в [10] в случае неединственного решения уравнения (1) доказано, что процесс (2) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

2. Правило останова по малости невязки. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, метод (3) становится неэффективным, так как тогда невозможно получить оценку погрешности и найти априорный момент останова в исходной норме гильбертова пространства. Тем не менее метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по малости невязки [3–4]. Здесь и ниже будем считать, что A – ограниченный линейный самосопряженный оператор.

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0,\ \varepsilon = b_1\delta,\ b_1 > 1$ и момент *m* останова итерационного процесса (3) условием

$$\left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon, (n < m), \quad \left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| \le \varepsilon . \tag{4}$$

Предположим, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, а именно, больше уровня останова, т. е. $\left\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon$. Ниже метод (3) с правилом останова (4) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{m}\left\|x - x_{m,\delta}\right\|\right) = 0$. Покажем возможность применения правила (4) к методу (3). Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \frac{b^n}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^n}\right] \ge 0$. Используя результаты [9], нетрудно показать, что при $b > 0$ для $g_n(\lambda)$ выполняются следующие условия

$$\sup_{-M\le\lambda\le M}\left|g_n(\lambda)\right| \le 2k\left(\tfrac{n}{b}\right)^{1/(2k)}, n > 0, \tag{5}$$

$$\sup_{-M\le\lambda\le M}\left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \le 1, n > 0, \tag{6}$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0, n \to \infty, \forall\lambda \in [-M, M], \tag{7}$$

$$\sup_{-M\le\lambda\le M}\left|\lambda^{2s}\left(1 - \lambda g_n(\lambda)\right)\right| \le \left(\tfrac{bs}{2kn}\right)^{s/k}, kn > s, \ 0 \le s < \infty . \tag{8}$$

Справедлива

Лемма 1. *Пусть* $A -$ *ограниченный оператор,* $A = A^*$. *Тогда для любого* $\omega \in H$ $\left(E - Ag_n(A)\right)\omega \to 0, \quad n \to \infty$.

Доказательство.

Используя интегральное представление оператора $A = \int\limits_{-M}^{M}\lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и $E_\lambda -$ спектральная функция оператора A, получим

$$\left(E - Ag_n(A)\right)\omega = \int\limits_{-M}^{M}\left(1 - \lambda g_n(\lambda)\right)dE_\lambda\omega = \int\limits_{0}^{M}\left(1 - \lambda g_n(\lambda)\right)dE_\lambda\omega + \int\limits_{-M}^{0}\left(1 - \lambda g_n(\lambda)\right)dE_\lambda\omega = I_1 + I_2$$

.

Первый из полученных интегралов разобьем на два интеграла

$$I_1 = \int\limits_{0}^{\varepsilon_0}\left(1 - \lambda g_n(\lambda)\right)dE_\lambda\omega + \int\limits_{\varepsilon_0}^{M}\left(1 - \lambda g_n(\lambda)\right)dE_\lambda\omega .$$

Так как $1 - \lambda g_n(\lambda) = \frac{b^n}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^n} \le q^n(\varepsilon_0) < 1$ для всех $\lambda \in [\varepsilon_0, M]$, то получим $\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{M}\left(1 - \lambda g_n(\lambda)\right)dE_\lambda\omega\right\| \le q^n(\varepsilon_0)\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{M}dE_\lambda\omega\right\| \le q^n(\varepsilon_0)\|\omega\| \to 0, n \to \infty$. Из условия (6) имеем $\left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}\left(1 - \lambda g_n(\lambda)\right)dE_\lambda\omega\right\| \le \left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}dE_\lambda\omega\right\| = \left\|E_{\varepsilon_0}\omega\right\| \to 0, \varepsilon_0 \to 0$, в силу свойств спектральной функции [11]. Аналогично, $I_2 \to 0, \ n \to \infty$. Следовательно, $\left(E - Ag_n(A)\right)\omega \to 0, n \to \infty$. Лемма 1 доказана.

Имеет место

Лемма 2. *Пусть* $A-$*ограниченный оператор,* $A=A^*$. *Тогда для любого* $\vartheta\in\overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^{s/k}\left\|A^{2s}(E-Ag_n(A))\vartheta\right\|\to 0$ *при* $n\to\infty,\ 0\le s<\infty$.

Доказательство.

Так как верно (8), то

$$n^{s/k}\left\|A^{2s}(E-Ag_n(A))\right\|\le n^{s/k}\sup_{-M\le\lambda\le M}\left|\lambda^{2s}(1-\lambda g_n(\lambda))\right|\le n^{s/k}\gamma_s n^{-s/k}=\gamma_s,$$

где $\gamma_s=\left(\frac{bs}{2k}\right)^{s/k}$. Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [11, с.151], по которой сходимость $B_n u\to Bu$ при $n\to\infty$ для всех $u\in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|$, $n=1,2,...,$ ограничены независящей от n постоянной.

Возьмем в качестве плотного в $\overline{R(A)}=H$ множество $R(A)$. Положим $s_1=s+\frac{1}{2}$. Тогда для каждого $\vartheta=A\omega\in R(A)$ имеем

$$n^{s/k}\left\|A^{2s}(E-Ag_n(A))\vartheta\right\|=n^{s/k}\left\|A^{2s+1}(E-Ag_n(A))\omega\right\|=$$

$$=n^{s/k}\left\|A^{2s_1}(E-Ag_n(A))\omega\right\|\le\gamma_{s_1}n^{\frac{-(s_1-s)}{k}}\|\omega\|=\gamma_{s_1}\|\omega\|n^{-1/(2k)}\to 0,\quad n\to\infty,$$

так как $s_1<\infty$. Лемма 2 доказана.

Справедлива

Лемма 3. *Пусть* $A-$*ограниченный оператор,* $A=A^*$. *Если для некоторой последовательности* $n_p<\overline{n}=const$ *и* $\vartheta_0\in\overline{R(A)}$ *при* $p\to\infty$ *имеем* $\omega_p=A\left(E-Ag_{n_p}(A)\right)\vartheta_0\to 0$, *то* $\vartheta_p=\left(E-Ag_{n_p}(A)\right)\vartheta_0\to 0$.

Доказательство.

В силу (6) последовательность ϑ_p ограничена $\left\|\vartheta_p\right\|\le 1,\ p\in N$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $\vartheta_p-\to\vartheta$, $(p\in N'\subseteq N)$, тогда $A\vartheta_p-\to A\vartheta,(p\in N')$.

Но по условию $\omega_p=A\vartheta_p\to 0,\ p\to\infty$, следовательно, $A\vartheta=0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A, то $\vartheta=0$. Тогда

$$\left\|\vartheta_p\right\|^2=\left(\vartheta_p,\left(E-Ag_{n_p}(A)\right)\vartheta_0\right)=\left(\vartheta_p,\vartheta_0\right)-\left(\vartheta_p,Ag_{n_p}(A)\vartheta_0\right)=$$

$$=\left(\vartheta_p,\vartheta_0\right)-\left(A\vartheta_p,g_{n_p}(A)\vartheta_0\right)=\left(\vartheta_p,\vartheta_0\right)-\left(\omega_p,g_{n_p}(A)\vartheta_0\right)\to\left(\vartheta,\vartheta_0\right)=0,\ (p\in N'),$$

так как $\vartheta=0,\ \omega_p\to 0,\ p\to\infty$ и по условию (5) $\left\|g_{n_p}(A)\right\|\le 2k\left(\frac{n_p}{b}\right)^{1/(2k)}\le 2k\left(\frac{\overline{n}}{b}\right)^{1/(2k)}$.

Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности ϑ_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $\vartheta_p\to 0,\ p\to\infty$. Лемма 3 доказана.

Если $A-$ограниченный несамосопряженный оператор, то справедлива аналогичная лемме 3

Лемма 4. *Пусть* $A-$*ограниченный несамосопряженный оператор. Если для некоторой последовательности* $n_p < \overline{n} = const$ *и* $\vartheta_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $p \to \infty$ *имеем* $\omega_p = A^* A\left(E - A^* A g_{n_p}\left(A^* A\right)\right)\vartheta_0 \to 0$, *то* $\vartheta_p = \left(E - A^* A g_{n_p}\left(A^* A\right)\right)\vartheta_0 \to 0$.

Для доказательства леммы 4 следует перейти к оператору $A = A^* A$ и использовать лемму 3.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $A-$*ограниченный оператор,* $A = A^*$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3) *выбирается по правилу* (4). *Тогда* $x_{m(\delta),\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство.

В [9] показано, что $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (CB)^n\right] y_\delta$, где $C = \left(A^{2k} + B\right)^{-1}$. Поэтому

$$x_{n,\delta} - x = A^{-1}\left[E - (CB)^n\right] y_\delta - x = A^{-1}\left[E - (CB)^n\right](y_\delta - y) + A^{-1}\left[E - (CB)^n\right] y - A^{-1} y =$$
$$= A^{-1}\left[E - (CB)^n\right](y_\delta - y) - (CB)^n x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - A g_n(A))x, \tag{9}$$

следовательно, $A x_{n,\delta} - y = A x_{n,\delta} - Ax = -A(E - A g_n(A))x + A g_n(A)(y_\delta - y)$.

Рассмотрим

$$A x_{n,\delta} - y_\delta = -A(E - A g_n(A))x + (y - y_\delta) + A g_n(y_\delta - y) =$$
$$= - A(E - A g_n(A))x - (E - A g_n(A))(y_\delta - y). \tag{10}$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - A g_n(A))x\| \to 0, n \to \infty, \tag{11}$$

$$\sigma_n = n^{1/(2k)}\|A(E - A g_n(A))x\| \to 0, n \to \infty. \tag{12}$$

Кроме того, из (5) и (6) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \le 2k\left(\tfrac{n}{b}\right)^{1/(2k)}\delta, \tag{13}$$

$$\|E - A g_n(A)\| \le 1. \tag{14}$$

Применим правило останова (4). Тогда $\|A x_{m,\delta} - y_\delta\| \le b_1\delta, b_1 > 1$ и из (10) и (14) получим

$$\|A(E - A g_m(A))x\| \le \|A x_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - A g_m(A))(y_\delta - y)\| \le (b_1 + 1)\delta. \tag{15}$$

Для любого $n < m$ $\|A x_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$, поэтому $\|A(E - A g_n(A))x\| \ge \|A x_{n,\delta} - y_\delta\| -$ $- \|(E - A g_n(A))(y - y_\delta)\| \ge (b_1 - 1)\delta$. Итак, для $\forall n < m$

$$\|A(E - A g_n(A))x\| \ge (b_1 - 1)\delta. \tag{16}$$

Из (12) и (16) при $n = m - 1$ получим $\frac{\sigma_{m-1}}{(m-1)^{1/(2k)}} = \|A(E - A g_{m-1}(A))x\| \ge (b_1 - 1)\delta$ или $(m-1)^{1/(2k)}\delta \le \frac{\sigma_{m-1}}{b-1} \to 0, \quad \delta \to 0$ (так как из (12) $\sigma_m \to 0, m \to \infty$). Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to 0$, то, используя (9), получим

$$\left\|x_{m,\delta}-x\right\| \le \left\|\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\|+\left\|g_m(A)\left(y_\delta-y\right)\right\| \le \left\|\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\|+2k\left(\tfrac{m}{b}\right)^{1/(2k)}\delta \to 0$$

При $m\to\infty, \delta\to 0$, так как из (11) $\left\|\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\|\to 0, m\to\infty$.

Если же для некоторых $\delta_n\to 0$ последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n}\to x,\ \delta_n\to 0$. Действительно, из (15) имеем $\left\|A\left(E-Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\|\le (b_1+1)\delta_n\to 0,\quad \delta_n\to 0$. Отсюда по лемме 3 получаем, что $\left(E-Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\to 0, \delta_n\to 0$. Поэтому

$$\left\|x_{m(\delta_n),\delta_n}-x\right\|\le\left\|\left(E-Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\|+2k\left(\frac{m(\delta_n)}{b}\right)^{1/(2k)}\delta_n\to 0,\quad \delta_n\to 0.$$

Теорема 1 доказана.

3. Оценка погрешности. Имеет место

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1*, оператор* A *– положителен и пусть* $x=A^{2s}z,\ s>0$. *Тогда справедливы оценки*

$$m\le 1+\frac{(2s+1)b}{4k}\left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta}\right]^{\frac{2k}{2s+1}},$$

$$\left\|x_{m,\delta}-x\right\|\le\left[(b_1+1)\delta\right]^{\frac{2s}{2s+1}}\|z\|^{\frac{1}{2s+1}}+\frac{2k}{b^{1/(2k)}}\left\{1+\frac{(2s+1)b}{4k}\left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta}\right]^{\frac{2k}{2s+1}}\right\}^{\frac{1}{2k}}\delta. \quad (17)$$

Доказательство.

Так как $x=A^{2s}z$, то

$$\left\|A\left(E-Ag_{m-1}(A)\right)x\right\|=\left\|A^{2s+1}\left(E-Ag_{m-1}(A)\right)z\right\|=\left\|\int_0^M\frac{\lambda^{2s+1}b^{m-1}}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^{m-1}}dE_\lambda z\right\|\le\left[\frac{(2s+1)b}{4k(m-1)}\right]^{\frac{2s+1}{2k}}\|z\|.$$

Воспользовавшись (16), получим $(b_1-1)\delta\le\left[\frac{(2s+1)b}{4k(m-1)}\right]^{\frac{2s+1}{2k}}\|z\|$. Отсюда имеем

$$m\le 1+\frac{(2s+1)b}{4k}\left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta}\right]^{\frac{2k}{2s+1}}.$$

При помощи неравенства моментов оценим

$$\left\|\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\|=\left\|A^{2s}\left(E-Ag_m(A)\right)z\right\|\le\left\|A^{2s+1}\left(E-Ag_m(A)\right)z\right\|^{\frac{2s}{2s+1}}\left\|\left(E-Ag_m(A)\right)z\right\|^{\frac{1}{2s+1}}\le$$

$$\le\left\|A\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\|^{\frac{2s}{2s+1}}\|z\|^{\frac{1}{2s+1}}\le\left[(b_1+1)\delta\right]^{\frac{2s}{2s+1}}\|z\|^{\frac{1}{2s+1}}.$$

Тогда

$$\left\|x_{m,\delta}-x\right\|\le\left\|\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\|+\left\|g_m(A)\left(y_\delta-y\right)\right\|\le\left[(b_1+1)\delta\right]^{\frac{2s}{2s+1}}\|z\|^{\frac{1}{2s+1}}+2k\left(\tfrac{m}{b}\right)^{\frac{1}{2k}}\delta\le$$

$$\le \left[(b_1+1)\delta\right]^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}} + \frac{2k}{b^{1/(2k)}} \left\{1+\frac{(2s+1)b}{4k}\left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta}\right]^{\frac{2k}{2s+1}}\right\}^{\frac{1}{2k}} \delta .$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. *Порядок оценки* (17) *есть* $O\left(\delta^{\frac{2s}{2s+1}}\right)$ *и, как следует из* [3], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 2. *Знание порядка* $2s > 0$ *истокопредставимости точного решения, используемое в теореме* 2, *не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова по малости невязки. В теореме* 2 *утверждается, что будет автоматически выбрано число итераций* m, *обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (4), *как показывает теорема* 1, *обеспечивает сходимость метода.*

Заключение. В работе изучены некоторые свойства предложенного неявного итерационного метода решения некорректных задач: доказана сходимость метода с апостериорным выбором числа итераций в исходной норме гильбертова пространства, получены оценка погрешности метода и оценка для апостериорного момента останова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
2. Бакушинский, А. Б. Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А.Б. Бакушинский // Журнал вычислительной математики и мат. физики. – 1967. – Т. 7, №3. – С. 672–677.
3. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
4. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
5. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
6. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.
7. Лаврентьев, М.М. Теория операторов и некорректные задачи / М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. – Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 1999. – 702 с.
8. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
9. Матысик, О.В. Метод итераций неявного типа для решения линейных уравнений с неограниченным оператором / О. В. Матысик // Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика. Математика. – 2013. – № 1. – С. 77–83.
10. Матысик, О.В. О приближенном решении линейных уравнений с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 87–92.
11. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

O.V. Matysik **The Convergence in the Hilbert Space of an Implicit Type Iteration Method for Solving Linear Operator Equations with Aposteriori Choice of Regularization Parameter**

We prove the convergence of the method with a posteriori choice of the number of iterations in the original norm of the Hilbert space in the case of a self-adjoint operator, under the assumption that the errors are in the right-hand side of the equation. Obtained error estimate and the estimate for the posterior moment stop. The results obtained can be used in theoretical studies of the solution of linear operator equations, and solving ill-posed problems applied.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 11.09.2014