

УДК 513.82

Е.В. Зубей, А.А. Юдов

О СВОЙСТВАХ РЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ, ПОРОЖДЕННЫХ ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА 1R_4 С ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ СТАЦИОНАРНОСТИ

Работа посвящена изучению однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры (пространства 1R_4). Исследуются однородные пространства вида G/G_i , где G_i – однопараметрические подгруппы Ли группы Ли вращений пространства 1R_4 . Среди всех таких однородных пространств находятся редуктивные однородные пространства.

1. Введение

Работа посвящена изучению однородных пространств с фундаментальной группой – группой движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры (пространства 1R_4).

Изучением однородных пространств занимались многие ученые: Лумисте Ю. [1], Феденко А.С. [2], Белько И.В. [3], Ведерников В.И. [4], а так же их ученики: Кононов С.Г., Юдов А.А. [5–7] и др.

В их работах исследуются свойства подмногообразий однородных пространств, связности на однородных пространствах, проводится классификация однородных пространств. Особенно много исследований посвящено изучению богатых дифференциально-геометрическими свойствами редуктивных однородных пространств. Редуктивные однородные пространства активно исследовались зарубежными геометрами: Номидзу К. [8], Кобаяси Ш. [9] и др. Много работ по редуктивным однородным пространствам выполнено Лумисте Ю. и его учениками. В данной работе продолжены исследования в этом направлении.

Проведена классификация редуктивных однородных пространств с фундаментальной группой движений пространства 1R_4 , причем для таких редуктивных пространств найдены все редуктивные дополнения. Показано приложение этих исследований для изучения дифференциально-геометрических свойств исследуемых редуктивных однородных пространств.

Результаты исследований могут быть применены в дифференциальной геометрии при исследовании связностей и их расширений в главных расслоениях, а также при изучении инвариантных аффинных связностей в главных расслоениях.

2. Постановка задачи

Классификация всех связных подгрупп Ли группы Ли G с точностью до сопряженности имеется [3]. Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой G . Ставится задача среди всех та-

ких однородных пространств выделить редуктивные однородные пространства. В данной работе найдены все редуктивные однородные пространства вида G/G_i , где G_i – связная однопараметрическая подгруппа Ли группы Ли H вращений пространства 1R_4 . Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства G/G_i рассматриваются соответствующие алгебры Ли \overline{G} и \overline{G}_i , затем находятся все пятимерные подпространства алгебры Ли \overline{H} , инвариантные относительно $ad \overline{G}_i$. Среди таких пространств находятся дополнительные к \overline{G}_i . Эти пространства будут редуктивными дополнениями для однородного пространства H/G_i . Поскольку пространство G/H редуктивно, отсюда будет следовать редуктивность однородного пространства G/G_i .

3. Редуктивные однородные пространства с однопараметрической группой стационарности

3.1 Рассмотрим однородное пространство H/G_1 , $\overline{G}_1 = \{i_9\}$. Будем находить пятимерные подпространства в \overline{H} , инвариантные относительно $ad \overline{G}_1$.

Система векторов $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}\}$ в случае 1° может быть выбрана в виде: $\{i_5 + \lambda i_9, i_{10} + \mu i_9, i_7 + \nu i_9, i_8 + \sigma i_9, i_6 + s i_9\}$. Из условия инвариантности подпространства $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}\}$ относительно $ad \overline{G}_1$ следует $\mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0, \lambda = 0$. Таким образом, инвариантны подпространства: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s i_9\}$.

В случае 2° ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_6, i_{10} + \mu i_6, i_7 + \nu i_6, i_8 + \sigma i_6, i_9\}$. Система инвариантности в этом случае приводится к виду $\mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0, \lambda = 0$. Получаем инвариантное подпространство $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$.

В случаях 3°, 4°, 5°, 6° системы инвариантности противоречивы.

3.2 Для однородного пространства H/G_2 , $\overline{G}_2 = \{i_6\}$.

Система векторов $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}\}$ в случае 1° может быть выбрана в виде: $\{i_5 + \lambda i_9, i_{10} + \mu i_9, i_7 + \nu i_9, i_8 + \sigma i_9, i_6 + s i_9\}$.

Из условия инвариантности подпространства $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}\}$ относительно $ad \overline{G}_2$ следует $\mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0, \lambda = 0$. Таким образом, инвариантны подпространства: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s i_9\}$.

В случае 2° ищем инвариантные подпространства в виде:

$$\{i_5 + \lambda i_6, i_{10} + \mu i_6, i_7 + \nu i_6, i_8 + \sigma i_6, i_9\}.$$

Система инвариантности в этом случае приводится к виду $\mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0, \lambda = 0$. Получаем инвариантное подпространство $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$.

В случае 3° ищем инвариантные подпространства в виде:

$$\{i_5 + \lambda i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 + \nu i_8, i_6, i_9\}.$$

Система инвариантности в этом случае приводится к виду $\lambda = \pm 1, -\lambda\mu + \nu = 0, -\lambda\nu + \mu = 0$. Из которой получаем, что $\lambda = 1, \mu = \nu$ или $\lambda = -1, \mu = -\nu$. Получаем инвариантное подпространство $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 \pm \mu i_8, i_6, i_9\}$.

В случае 4° ищем инвариантные подпространства в виде:

$$\{i_5 + \lambda i_7, i_{10} + \mu i_7, i_8, i_6, i_9\}.$$

Система инвариантности в этом случае приводится к виду $\lambda\mu = 0, \mu^2 = 1, \lambda = 0$. Решая эту систему, находим, что $\lambda = 0, \mu = \pm 1$. Получаем инвариантное подпространство $\{i_5, i_{10} \pm i_7, i_8, i_6, i_9\}$.

В случаях 5°, 6° системы инвариантности противоречивы.

3.3 Рассмотрим однородное пространство $H/G_3, \overline{G_3} = \{i_5 - i_8\}$.

В случае 1° ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10}, i_6 + \mu i_{10}, i_7 + \nu i_{10}, i_8 + \sigma i_{10}, i_9 + s i_{10}\}$. Система инвариантности в этом случае приводится к виду:

$$s + \lambda\nu + \lambda\mu = 0, \mu^2 + \mu\nu = -1, \nu^2 + \mu\nu = 1, \sigma\mu + \sigma\nu + s = 0, \lambda + \nu s + s\mu + \sigma = 0.$$

Складывая второе и третье уравнение этой системы, получаем: $\mu = -\nu$. Подставляя найденные значения во второе уравнение системы, получаем $0 = 1$, т.е. противоречие. Следовательно, система инвариантности в случае 1° противоречива.

В случае 2° ищем инвариантные подпространства в виде $\{i_5 + \lambda i_6, i_{10} + \mu i_6, i_7 + \nu i_6, i_8 + \sigma i_6, i_9\}$. Система инвариантности в этом случае приводится к виду:

$$\begin{cases} -\lambda^2 + \lambda\sigma = 1, \\ -\lambda\mu + \mu\sigma = 0, \\ -\lambda\nu + \nu\sigma = 0, \\ -\lambda\sigma + \sigma^2 = 1, \\ \mu + \nu = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему получаем, что $0 = 1$, т.е. противоречие. Следовательно, система инвариантности в случае 2° противоречива.

В случае 3° ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 + \nu i_8, i_6, i_9\}$. Из системы инвариантности следует $\mu = -\nu, \lambda = 1$.

Получили инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 - i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 - \mu i_8, i_6, i_9\}$.

В случае 4° ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_7, i_{10} + \mu i_7, i_8, i_6, i_9\}$. Из системы инвариантности следует $\mu = 1, \lambda = 0$. Получили инвариантное подпространство в виде: $\{i_5, i_7 + i_{10}, i_8, i_6, i_9\}$.

В случаях 5°, 6° системы инвариантности противоречивы.

3.4 Рассмотрим однородное пространство $H/G_4, \overline{G_4} = \{i_6 + \theta i_9\}$.

В случае 1° ищем инвариантные подпространства в виде:

$$\{i_5 + \lambda i_{10}, i_6 + \mu i_{10}, i_7 + \nu i_{10}, i_8 + \sigma i_{10}, i_9 + s i_{10}\}.$$

Система инвариантности приводится к виду

$$-\nu - \theta\sigma = 0, \theta\nu - \sigma = 0, \lambda\mu + \lambda = 0, -\lambda\theta + \mu = 0.$$

Отсюда следует, что $\nu = 0, \sigma = 0, \mu = 0, \lambda = 0$.

Получили инвариантные подпространства в виде: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s i_9\}$.

В случае 2° ищем инвариантные подпространства в виде $\{i_5 + \lambda i_6, i_{10} + \mu i_6, i_7 + \nu i_6, i_8 + \sigma i_6, i_9\}$. Система инвариантности в этом случае приводится к виду $-\nu - \sigma\theta = 0$, $\theta\nu - \sigma = 0$, $\lambda + \theta\mu = 0$, $-\theta\lambda + \mu = 0$. Отсюда следует, что $\nu = 0$, $\sigma = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = 0$. Получили инвариантные подпространства в виде: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$.

В случае 3° ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 + \nu i_8, i_6, i_9\}$. Из системы инвариантности следует $\lambda^2\theta + \lambda\mu - \nu = -\theta$, $-\theta\lambda\mu + \mu^2 + \theta\nu = -1$, $(1 - \theta\nu)\lambda + (\nu + \theta)\mu = 0$. Из первого уравнения системы: $\lambda\mu - \nu = -\theta(\lambda^2 + 1)$, из второго уравнения системы: $\lambda\mu - \nu = \frac{1 + \mu^2}{\theta}$, т.е.

$-\theta(\lambda^2 + 1) = \frac{1 + \mu^2}{\theta}$. Откуда $-\theta^2(\lambda^2 + 1) = 1 + \mu^2$. Система инвариантности в случае 3° противоречива.

В случае 4° ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_7, i_{10} + \mu i_7, i_8, i_6, i_9\}$. Из системы инвариантности следует

$$\lambda^2 + \lambda\mu\theta = -1, \lambda\mu + \theta\mu^2 = \theta, \mu - \theta\lambda = 0. \quad (1)$$

Третье уравнение системы домножим на λ , и от второго уравнения отнимем третье, получим $\mu = 0$, $\lambda = 0$. Подставив найденные значения в первое уравнение системы (1), получим противоречие. Следовательно, система инвариантности в случае 4° противоречива.

В случаях 5°, 6° системы инвариантности противоречивы.

3.5 Подведем итоги исследования однородных пространств с однопараметрическими группами стационарности точки в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Ниже перечислены все инвариантные подпространства для всех однопараметрических подгрупп Ли группы Ли вращений пространства Минковского $(\overline{G_1} - \overline{G_4})$:

1) для пространства H/G_1 инвариантными подпространствами являются только следующие пространства: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + si_9\}$, $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$;

2) для пространства H/G_2 инвариантными подпространствами являются только следующие пространства: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + si_9\}$, $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$, $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 \pm \mu i_8, i_6, i_9\}$, $\{i_5, i_{10} \pm i_7, i_8, i_6, i_9\}$;

3) для пространства H/G_3 инвариантными подпространствами являются только следующие пространства: $\{i_5 - i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 - \mu i_8, i_6, i_9\}$, $\{i_5, i_7 + i_{10}, i_8, i_6, i_9\}$;

4) для пространства H/G_4 инвариантными подпространствами являются только следующие пространства: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + si_9\}$, $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$.

Теорема 2. Пространство $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$ не является дополнительным к $\overline{G_1}$, пространства $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 \pm \mu i_8, i_6, i_9\}$, $\{i_5, i_{10} \pm i_7, i_8, i_6, i_9\}$ не являются дополнительными к $\overline{G_2}$, пространства $\{i_5 - i_8, i_{10} + \mu i_8, i_7 - \mu i_8, i_6, i_9\}$, $\{i_5, i_7 + i_{10}, i_8, i_6, i_9\}$ не являются

дополнительными к $\overline{G_3}$, пространство $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s i_9\}$ при $s = 0$ не является дополнительным к $\overline{G_4}$.

Таким образом, получена следующая теорема:

Теорема 3. Пространство H/G_1 , является редуکتивным, редуکتивными дополнениями к $\overline{G_1}$ являются только подпространства $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s i_9\}$, пространство H/G_2 является редуکتивным, редуکتивными дополнениями к $\overline{G_2}$ являются только подпространства $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s i_9\}$ при $s \neq 0$ и $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$, пространство H/G_3 не является редуکتивным, пространство H/G_4 является редуکتивным, редуکتивными дополнениями являются только подпространства $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s i_9\}$ при $s \neq 0$ и $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белько, И.В. Подгруппы группы Лоренца / И.В. Белько, А.С. Феденко // ДАН БССР. – 1970. – т. XIY. – № 6. – С. 393–395.
2. Белько, И.В. Подгруппы группы Лоренца-Пуанкаре / И.В. Белько // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. – 1971. – №1. – С. 5–13.
3. Ведерников, В.И. Симметрические пространства и сопряженные связности / В.И. Ведерников // Уч. зап. Казанского ун-та. – 1965. – Т. 125 – кн. 1. – С. 7–59.
4. Рийвес, К. Подгруппы группы движений Евклида пространства R_5 и их орбиты / К. Рийвес // Уч. зап. Тартуского ун-та. – 1975. – Выпуск 355. – С. 35–56.
5. Лунисте, Ю. Связности в главных расслоениях / Ю. Лунисте // Труды I республиканской конференции математиков БССР. – 1965. – Минск. – С. 247–258.
6. Тутаев, Л.К. К дифференциальной геометрии линий и поверхностей в пространстве Минковского / Л.К. Тутаев // Труды I республиканской конференции математиков БССР. – 1965. – Минск. – С. 290–307.
7. Юдов, А.А. Подгруппы группы движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры / А.А. Юдов // Вестник БГУ им. В.И. Ленина. – 1977. – №1. – С. 16–21.
8. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М : Мир, 1964. – 533 с.
9. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – Т. I – М : Наука, 1981. – 343 с.
10. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – Т. II – М : Наука, 1981. – 413 с.
11. Картан, Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства / Э. Картан. – М. – 1949. – С. 119–149.

E.V. Zubej, A.A. Judov About the Properties of Reductive Spaces Generated by the Group of Motions of Space 1R_4 with One-Parameter Groups of Stationarity

One-dimensional sub-groups of group G of rotation of space 2R_4 and corresponding homogeneous spaces G/G_i are considered in the article. Among these homogeneous spaces reduce homogeneous spaces were found.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 21.10.2014