УДК 539.12:530.145

*П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов*

# КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ БЕЗМАССОВОГО ПОЛЯ СО СПИРАЛЬНОСТЯМИ 0, ±1

Осуществлена процедура вторичного квантования безмассового поля, описываемого не распадающейся по группе Лоренца 11-компонентной системой тензорных уравнений первого порядка. На этой основе показана возможность описания теории безмассового поля со спиральностями 0, ±1 как единого физического объекта.

## Введение

Как известно, в классической теории поля микрочастицу с целым спином 1 и ненулевой массой $m$ обычно описывают с помощью системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$(\Box - m^2)\psi_\mu(x) = 0\,, \tag{1}$$

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0, \tag{2}$$

где $\psi_\mu(x)$ – четырёхмерный вектор. Уравнение (2) имеет вид калибровки Лоренца и играет для уравнения (1) роль дополнительного условия, исключающего «лишнюю» степень свободы.

Описание безмассовых частиц (полей) в таком подходе осуществляется путём предельного перехода $m \to 0$, т.е. замены уравнения (1) на уравнение Даламбера. При этом безмассовый аналог исходной массивной частицы обладает проекциями спина (спиральностью) ±1, значение же спиральности, равное нулю, теряется.

Однако в современных теоретико-полевых моделях фундаментальных частиц и их взаимодействий нередко возникает необходимость совместного описания безмассовых полей не только с максимальным, но и промежуточными значениями спиральности [1–3]. В работах [4–6] было показано, что такое описание в рамках не распадающейся по полной группе Лоренца теории возможно при использовании формализма дифференциальных линейных уравнений первого порядка – теории релятивистских волновых уравнений (РВУ).

В работе [6], в частности, рассматривается 11-компонентная система

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0\,, \tag{3}$$

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi_0 = 0\,, \tag{4}$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \psi_{[\mu\nu]} = 0\,, \tag{5}$$

в которой величины $\psi_0$ и $\psi_{[\mu\nu]}$ – соответственно скаляр и антисимметричный тензор. Уравнение (3) совпадает по виду с (2), но играет здесь уже не роль дополнительного условия, а равноправного уравнения. Величины $\psi_0$, $\psi_\mu$ выступают в системе (3)–(5) в качестве потенциалов; компоненты тензора $\psi_{[\mu\nu]}$ – напряжённости.

Система (3)–(5) инвариантна относительно градиентных преобразований

$$\psi_\mu \to \psi_\mu + \partial_\mu \Lambda(x)\,, \tag{6}$$

где произвол в выборе калибровочной функции $\Lambda(x)$ ограничен условием

$$\Box\Lambda = 0\,. \qquad (7)$$

Поэтому по аналогии с электромагнитным полем есть основания считать, что данная градиентная инвариантность в совокупности с уравнением (3) приводит к исключению двух из четырёх степеней свободы вектор-потенциала $\psi_\mu$. Независимыми остаются только две его компоненты, связанные с поперечной поляризацией векторного поля. Ещё одна степень свободы обусловлена потенциалом скалярного поля $\psi_0$.

Однако для окончательного и точного ответа на вопрос о числе степеней свободы рассматриваемого поля и их физической интерпретации необходимо провести процедуру вторичного квантования системы (3)–(5), к осуществлению которой мы и переходим.

**Вторичное квантование**

Прежде всего нетрудно убедиться, что потенциалы $\psi_\mu(x)$, $\psi_0(x)$ удовлетворяют уравнениям второго порядка вида

$$\Box\psi_\mu - \partial_\mu\psi_0 = 0\,, \qquad (8)$$

$$\Box\psi_0 = 0\,, \qquad (9)$$

т.е действительно описывают безмассовое поле. При этом градиентный член $\partial_\mu\psi_0$ в (8) выступает в роли внутреннего источника (типа «тока смещения») для векторной составляющей поля.

Общие решения этих уравнений можно представить в виде суперпозиции плоских волн

$$\psi_\mu(x) = \sum_k N_k (C_{\mu k} e^{ikx} + \overset{+}{C}_{\mu k}\, e^{-ikx})\,, \qquad (10)$$

$$\psi_0(x) = \sum_k N_k (B_k e^{ikx} + \overset{+}{B}_k\, e^{-ikx})\,, \qquad (11)$$

где $N_k$ – нормировочный множитель, $kx = k_\mu x_\mu$, $k_\mu = (\vec{k}, i\omega)$ – четырёхмерный волновой вектор, удовлетворяющий условию $k^2 = k_\mu k_\mu = \vec{k}^2 - \omega^2 = 0$.

Для исключения нефизических решений системы (3)–(5) будем использовать базис, предложенный в работе [7] при квантовании поля нотофа – безмассового поля со спиральностью 0, переносящего во взаимодействиях спин 1, а именно:

$$e_\mu^{(1)}, \quad e_\mu^{(2)}, \quad k_\mu, \quad n_\mu\,, \qquad (12)$$

$$e_\mu^{(i)} e_\mu^{(j)} = \delta_{ij}, \;\; e_\mu^{(i)} k_\mu = 0, \;\; e_\mu^{(i)} n_\mu = 0, \;\; n_\mu^2 = -1\,. \qquad (13)$$

Особенностью этого базиса является его неортогональность, так как он содержит изотропный вектор $k_\mu$ и $k_\mu n_\mu \neq 0$.

Разложим амплитуды $C_{\mu k}, \overset{+}{C}_{\mu k}$ по этому базису

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^{2} c_{ki} e_\mu^{(i)} + c_{k3} k_\mu + c_{k0} n_\mu\,, \qquad (14)$$

$$\overset{+}{C}_{\mu k} = \sum_{i=1}^{2} \overset{+}{c}_{ki}\, e_\mu^{(i)} + \overset{+}{c}_{k3}\, k_\mu + \overset{+}{c}_{k0}\, n_\mu\,. \qquad (15)$$

Теперь учтём, что система (3)–(5) инвариантна относительно градиентных преобразований (6), (7). Условие (7) означает, что калибровочную функцию $\Lambda(x)$ также можно представить в виде разложения, аналогичного (14), (15):

$$\Lambda(x) = \sum_k N_k (\lambda_k e^{ikx} + \overset{+}{\lambda}_k e^{-ikx}) , \tag{16}$$

где $\lambda_k, \overset{+}{\lambda}_k$ – произвольные амплитуды.

Подставляя разложения (10), (14)–(16) в преобразование (6), получаем калибровочные преобразования для амплитуд $C_{\mu k}, \overset{+}{C}_{\mu k}$

$$C_{\mu k} \to C_{\mu k} + i\lambda_k k_\mu , \tag{17}$$

$$\overset{+}{C}_{\mu k} \to \overset{+}{C}_{\mu k} - i\overset{+}{\lambda}_k k_\mu . \tag{18}$$

Из (17), (18) следует, что амплитуды $C_{\mu k}, \overset{+}{C}_{\mu k}$ определяются с точностью до несущественных слагаемых $i\lambda_k k_\mu$, $-i\overset{+}{\lambda}_k k_\mu$ соответственно. В разложениях (14), (15) роль таких несущественных слагаемых выполняют члены $c_{k3} k_\mu$ и $\overset{+}{c}_{k3} k_\mu$. Отбрасывая их, получим для $C_{\mu k}, \overset{+}{C}_{\mu k}$ выражения

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^{2} c_{ki} e_\mu^{(i)} + c_{k0} n_\mu , \tag{19}$$

$$\overset{+}{C}_{\mu k} = \sum_{i=1}^{2} \overset{+}{c}_{ki} e_\mu^{(i)} + \overset{+}{c}_{k0} n_\mu . \tag{20}$$

Далее переходим в обычный ортонормированный базис

$$e_\mu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\lambda} , \tag{21}$$

первые два орта которого ($\lambda = 1, 2$) соответствуют поперечным поляризациям и совпадают с ортами $e_\mu^{(i)}$ базиса (12), (13), третий $e_\mu^{(3)}$ и четвёртый $e_\mu^{(4)}$ – продольной и скалярной поляризациям потенциала $\psi_\mu(x)$. При этом выполняются соотношения

$$e_\mu^{(\lambda)} e_\mu^{(\lambda')} = \delta_{\lambda\lambda'}, \;\; e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\nu} \tag{22}$$

и векторы $k_\mu, n_\mu$ в базисе (21), (22) имеют компоненты

$$k_\mu = (0, 0, \omega, i\omega), \quad n_\mu = (0, 0, 0, i) . \tag{23}$$

Окончательные выражения для амплитуд $C_{\mu k}, \overset{+}{C}_{\mu k}$ в ортонормированном базисе (21) принимают вид

$$C_{\mu k} = \sum_{\lambda=1,2,4} c_{k\lambda} e_\mu^{(\lambda)} , \quad \overset{+}{C}_{\mu k} = \sum_{\lambda=1,2,4} \overset{+}{c}_{k\lambda} e_\mu^{(\lambda)} , \tag{24}$$

где использованы обозначения

$$c_{k4} = i c_{k0}, \;\; \overset{+}{c}_{k4} = i \overset{+}{c}_{k0} . \tag{25}$$

Лангранжиан системы (3)–(5) может быть представлен в форме

$$L = -\psi_\mu \partial_\mu \psi_0 - \frac{1}{2} \psi_{[\mu\nu]} (\partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu) + \frac{1}{4} \psi_{[\mu\nu]}^2 . \tag{26}$$

Отсюда для тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi_A)} \partial_\nu \psi_A - \delta_{\mu\nu} L \tag{27}$$

и его компоненты $T_{44}$ вытекают выражения

$$T_{\mu\nu} = -\psi_\mu \partial_\nu \psi_0 - \psi_{[\mu\alpha]} \partial_\nu \psi_\alpha - \delta_{\mu\nu} L\,, \tag{28}$$

$$T_{44} = -\psi_4 \partial_4 \psi_0 - \psi_{[4\alpha]} \partial_4 \psi_\alpha - L\,. \tag{29}$$

Подставляя в (29) разложения (10), (11), с учетом (24) получим для энергии поля

$$E = \int T_{44} d^3 x \tag{30}$$

формулу

$$E = \frac{1}{2} \sum_k \omega \left[ \sum_{\lambda=1,2,4} (c_{k\lambda} \overset{+}{c}_{k\lambda} + \overset{+}{c}_{k\lambda} c_{k\lambda}) + (b_k \overset{+}{b}_k + \overset{+}{b}_k b_k) \right], \tag{31}$$

в которой

$$b_k = \frac{B_k}{\omega}, \quad \overset{+}{b}_k = \frac{\overset{+}{B}_k}{\omega}, \tag{32}$$

а также учтено, что $N = 1/\sqrt{2V\omega}$ ($V$ – нормировочный объем).

Вторичное квантование рассматриваемого поля осуществляется, как обычно, путем замены амплитуды $c_{k\lambda}, \overset{+}{c}_{k\lambda}$, $b_k, \overset{+}{b}_k$ на операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[c_{k\lambda}, \overset{+}{c}_{k'\lambda'}]_- = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (\lambda, \lambda' = 1, 2, 4)\,, \tag{33}$$

$$[b_k, \overset{+}{b}_k]_- = \delta_{kk'} \tag{34}$$

и все остальные коммутаторы равны нулю. Из условий квантования (33), (34) следует, что собственные значения операторов $c_{k\lambda}, \overset{+}{c}_{k\lambda}$, и $b_k, \overset{+}{b}_k$ равны целым положительным числам или нулю.

Уравнение (3), входящее в рассматриваемую классическую систему (3)–(5) в качестве составной части, для квантованного поля сформулируем в виде условия, накладываемого на операторы $\widehat{\psi}_\mu$, а не на волновые функции $\Psi$ гильбертова пространства физических состояний поля, на которые действуют эти операторы. Точнее говоря, будем использовать более слабое условие [8; 9]

$$\partial_\mu \widehat{\psi}_\mu^{(+)} \Psi = 0\,, \tag{35}$$

в котором операторы $\widehat{\psi}_\mu^{(+)}$ содержат только положительно-частотные части.

Из условия (35) вытекает соотношение

$$(\sum_k (\omega\, c_{k4} e^{ikx}) \Psi = 0\,, \tag{36}$$

из которого, в свою очередь, следует, что функция $\Psi$ при всех $k$ должна удовлетворять равенству

$$c_{k4} \Psi = 0\,. \tag{37}$$

Учитывая, что операторы $c_{k4}$ и $(-\overset{+}{c}_{k4})$ эрмитово сопряжены, имеем также

$$\Psi^* \overset{+}{c}_{k4} = 0\,. \tag{38}$$

Из (37), (38) вытекает условие

$$(\Psi, \overset{+}{c}_{k4} c_{k4} \Psi) = 0\,, \tag{39}$$

благодаря которому исчезает среднее значение части оператора энергии (31), связанной со скалярной составляющей вектор-потенциала $\psi_\mu$.

В результате для среднего значения энергии квантового поля получается выражение

$$\overline{E}=\frac{1}{2}(\Psi,\sum_{k}\omega\sum_{\lambda=1,2}(c_{k\lambda}\overset{+}{c}_{k\lambda}+\overset{+}{c}_{k\lambda}c_{k\lambda})\Psi)+\frac{1}{2}(\Psi,\sum_{k}\omega\,(b_{k}\overset{+}{b}_{k}+\overset{+}{b}_{k}b_{k})\Psi)\,. \qquad (40)$$

Дальнейшая процедура квантования осуществляется в соответствии с квантованием обычного электромагнитного поля.

Формула (40) показывает, что вклад в энергию квантованного поля дают две степени свободы, связанные с поперечными колебаниями векторной составляющей $\psi_{\mu}$, и одна степень свободы, приходящаяся на скалярный потенциал $\psi_{0}$. Окончательно, с учетом нераспадения системы (3)–(5) по группе Лоренца, можно сделать вывод о том, что указанная система тензорных уравнений дает совместное описание взаимосвязанных безмассовых полей со спиральностями 0, ±1 как единого физического объекта.

**Заключение**

Из полученных результатов следует вывод о принципиальной возможности совместного описания безмассовых полей с различными значениями спиральности как единого физического объекта в рамках теории обобщенных релятивистских волновых уравнений первого порядка. Ранее в литературе такое описание в данном подходе не предлагалось. Основное значение этого факта заключается в существенном расширении рамок теории РВУ с точки зрения ее приложения в современных полевых моделях, таких как SU(n)-калибровочные модели фундаментальных взаимодействий, теория суперструн.

Еще более широкие возможности в данном отношении представляют собой РВУ, волновая функция которых преобразуется по приводимому представлению полной группы Лоренца, содержащему кратные (повторяющиеся) неприводимые представления этой группы. Уравнения данного типа являются в настоящее время предметом исследования авторов и будут темой последующих публикаций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kalb, M. Classical direct interesting action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. – 1974. – № 8. – P. 2273–2284.

2. Aurilia, A. Generalized Maxwell equations and gauge mixing mechanism of mass generation / A. Aurilia, Y. Takahashi // Progr. Theor. Phys. – 1981. – Vol. 66. – P. 693–712.

3. Dvoeglazov, V.V. Photon–notoph equations / V.V. Dvoeglazov // arxiv: physics / 9804010 v. – Дата доступа : 17. 04. 1998.

4. Плетюхов, В.А. Безмассовые частицы в теории релятивистских волновых уравнений / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2007. – № 3. – С. 3–11.

5. Андрусевич, П.П. Безмассовые и массивные калибровочно-инвариантные поля в теории обобщенных релятивистских волновых уравнений / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. прыродазн. навук. – 2007. – №1. – С. 36–45.

6. Плетюхов, В.А. Массивные калибровочно-инвариантные теории и безмассовые поля / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – №1. – С. 80–88.

7. Огиевецкий, В.И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов // ЯФ. – 1966. – Т. 4, вып. 1. – С. 216–224.

8. Прохоров, Л. В. Квантование электромагнитного поля / Л.В. Прохоров // УФН. – 1988. – Т. 154, вып. 2. – С. 299–320.

9. Ахиезер, А.И. Квантовая электродинамика / А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. – М. : Наука. – 1969. – 623 с.

***P.P. Andrusevich, V.A. Pletyukhov*** **Quantum Theory of a Massless Field with Helicity 0, ±1**

Implemented procedure of second quantization of a massless field described by 11-component system of tensor equations. On this basis, the possibility of a massless field theory description with helicity 0, ±1 as a single physical entity is showed.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 24.02.14