УДК 519.65+517.548.5

А.П. Худяков

ОБОБЩЕННЫЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ЭРМИТА–БИРКГОФА ДЛЯ ФУНКЦИЙ СКАЛЯРНОГО И МАТРИЧНОГО АРГУМЕНТА

Для функций скалярного аргумента построен и исследован обобщенный интерполяционный многочлен Эрмита–Биркгофа относительно экспоненциальных функций с произвольными показателями степени. Получены явное представление и оценка погрешности. Данная формула обобщена на случай функций матричного аргумента. В частных случаях показана инвариантность интерполяционной формулы относительно экспоненциальных матричных многочленов.

Введение

Интерполяционная задача Эрмита–Биркгофа для случая функций состоит в построении многочленов, для которых выполнялись бы условия совпадения значений многочлена и его производных некоторых фиксированных порядков во всех или отдельных узлах с соответствующими значениями интерполируемой функции и её производных. Эта задача с пропусками порядков производных в отличие от задачи эрмитова типа не всегда разрешима [1–3].

В более общей постановке интерполяционной задачи Эрмита–Биркгофа условия совпадения в отдельных узлах производных заменяются на условия совпадения заданного дифференциального или некоторого другого вида оператора. В случае алгебраических операторных многочленов интерполяционные формулы такого типа получены в [4; 5]. В скалярном случае обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита–Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций построены и исследованы в [6; 7]. В [8; 9] они обобщены на случай функций матричного аргумента.

Интерполирование скалярных функций. Пусть имеется совокупность узлов $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$ а также заданы действительные числа $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n+1}.$ В узлах известны значения $f(x_i)$ $(i = \overline{0,n})$ функции $f(x),$ $x \in \mathbb{R}.$ Кроме этого, в одном из узлов x_j известно значение $D_{n+1}(f; x_j)$ дифференциального оператора вида

$$D_{n+1} f(x) = D(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_n) f(x),$$

где $D = \dfrac{d}{dx}.$

Функцию $f(x)$ будем интерполировать с помощью обобщенных полиномов относительно экспоненциальных функций вида $\varphi_k(x) = e^{\lambda_k x}$ $(k = \overline{0, n+1}).$ Построим многочлен $\widetilde{L}_{n+1}(x)$ степени $n+1,$ удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$\widetilde{L}_{n+1}(x_k) = f(x_k) \quad (k = \overline{0,n}); \quad D_{n+1}\left(\widetilde{L}_{n+1}; x_j\right) = D_{n+1}(f; x_j). \tag{1}$$

Введем следующие функции $g_m(y_0, y_1, \ldots, y_m),$ заданные рекуррентными соотношениями

$$g_0(y_0) = -1, \quad g_1(y_0, y_1) = g_0(y_1)e^{\lambda_1 y_0} - g_0(y_0)e^{\lambda_1 y_1} = e^{\lambda_1 y_1} - e^{\lambda_1 y_0},$$

$$g_2(y_0, y_1, y_2) = -g_1(y_1, y_2)e^{\lambda_2 y_0} + g_1(y_0, y_2)e^{\lambda_2 y_1} - g_1(y_0, y_1)e^{\lambda_2 y_2},$$

$$g_3(y_0, y_1, y_2, y_3) = g_2(y_1, y_2, y_3)e^{\lambda_3 y_0} - g_2(y_0, y_2, y_3)e^{\lambda_3 y_1} +$$

$$+g_2(y_0,y_1,y_3)e^{\lambda_3 y_2}-g_2(y_0,y_1,y_2)e^{\lambda_3 y_3}$$

и в общем случае

$$g_n(y_0,y_1,\ldots,y_n)=(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k g_{n-1}(y_0,\ldots y_{k-1},y_{k+1},\ldots,y_n)e^{\lambda_n y_k}\quad (n=1,2,\ldots).$$

Приведем две леммы, которые понадобятся в дальнейших рассуждениях.

Лемма 1. *При перестановке любых двух соседних аргументов* y_k, y_{k+1} *местами функция* $g_n(y_0,y_1,\ldots,y_n)$ *меняет знак на противоположный:*

$$g_n(y_0,y_1,\ldots,y_{k-1},y_{k+1},y_k,y_{k+2},\ldots,y_n)=-g_n(y_0,y_1,\ldots,y_k,y_{k+1},\ldots,y_n).$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. При $n=1$ имеет место равенство $g_1(y_1,y_0)=-g_1(y_0,y_1)$. Предположим, что при $n=m$ данное утверждение верно, т. е. для любого $0\le k\le m-1$

$$g_m(y_0,y_1,\ldots,y_{k-1},y_{k+1},y_k,y_{k+2},\ldots,y_m)=-g_m(y_0,y_1,\ldots,y_m).$$

Выберем произвольное $0\le p\le m.$ Тогда при $n=m+1$ получаем, что

$$g_{m+1}(y_0,y_1,\ldots,y_{p-1},y_{p+1},y_p,y_{p+2},\ldots,y_{m+1})=$$

$$=(-1)^m\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k g_m(y_0,y_1,\ldots,y_{k-1},y_{k+1},\ldots,y_{p-1},y_{p+1},y_p,y_{p+2},\ldots,y_{m+1})e^{\lambda_{m+1}y_k}+$$

$$+(-1)^{m+p}g_m(y_0,y_1,\ldots,y_p,y_{p+2},\ldots,y_{m+1})e^{\lambda_{m+1}y_{p+1}}+$$

$$+(-1)^{m+p+1}g_m(y_0,y_1,\ldots,y_{p-1},y_{p+1},\ldots,y_{m+1})e^{\lambda_{m+1}y_p}+$$

$$+(-1)^m\sum_{k=p+2}^{m+1}(-1)^k g_m(y_0,y_1,\ldots,y_{p-1},y_{p+1},y_p,y_{p+2},\ldots,y_{k-1},y_{k+1},\ldots,y_{m+1})e^{\lambda_{m+1}y_k}=$$

$$=-(-1)^m\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k g_m(y_0,y_1,\ldots,y_{k-1},y_{k+1},\ldots,y_{m+1})e^{\lambda_{m+1}y_k}-$$

$$-(-1)^{m+p}g_m(y_0,y_1,\ldots,y_{p-1},y_{p+1},\ldots,y_{m+1})e^{\lambda_{m+1}y_p}-$$

$$-(-1)^{m+p+1}g_m(y_0,y_1,\ldots,y_p,y_{p+2},\ldots,y_{m+1})e^{\lambda_{m+1}y_{p+1}}-$$

$$-(-1)^m\sum_{k=p+2}^{m+1}(-1)^k g_m(y_0,y_1,\ldots,y_{k-1},y_{k+1},\ldots,y_{m+1})e^{\lambda_{m+1}y_k}=$$

$$=-(-1)^m\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k g_m(y_0,y_1,\ldots,y_{k-1},y_{k+1},\ldots,y_{m+1})e^{\lambda_{m+1}y_k}=-g_{m+1}(y_0,y_1,\ldots,y_{m+1}).\qquad(2)$$

Равенство (2) имеет место для $0\le k\le m.$ Отсюда следует справедливость леммы 1.

Лемма 2. *Для любых вещественных чисел* $y_0,y_1,\ldots,y_{n-1}$ *и любых* i *и* n $(0\le i\le n-1,\ n\ge 1)$ *справедливо равенство*

$$g_n(y_i,y_0,y_1,\ldots,y_{n-1})=0.$$

Доказательство. Так же, как и в доказательстве предыдущей леммы, применим метод математической индукции. При $n=1$ получим

$$g_1(y_0,y_0)=e^{\lambda_1 y_0}-e^{\lambda_1 y_0}=0.$$

Предположим, что при $n=m$ утверждение верно, т. е. для любого $0\le i\le m-1$

$$g_m(y_i,y_0,y_1,\ldots,y_{m-1})=0.$$

Выберем произвольное $0\le k\le m.$ Тогда при $n=m+1$ получим

$$g_{m+1}(y_k, y_0, y_1, \dots, y_m) = (-1)^m g_m(y_0, y_1, \dots, y_m) e^{\lambda_{m+1} y_k} +$$
$$+(-1)^m \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j g_m(y_k, y_0, y_1, \dots, y_{j-2}, y_j, \dots, y_m) e^{\lambda_{m+1} y_{j-1}} =$$
$$= (-1)^m \left(g_m(y_0, y_1, \dots, y_m) e^{\lambda_{m+1} y_k} + (-1)^{k+1} g_m(y_k, y_0, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m) e^{\lambda_{m+1} y_k} \right).$$

Последовательно меняя местами соседние аргументы, в силу леммы 1 будем иметь

$$g_m(y_k, y_0, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m) = -g_m(y_0, y_k, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m) =$$
$$= g_m(y_0, y_1, y_k, y_2, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m) = \dots = (-1)^k g_m(y_0, y_1, \dots, y_m).$$

Таким образом,

$$g_{m+1}(y_k, y_0, y_1, \dots, y_m) = (-1)^m \left(1 + (-1)^{2k+1}\right) g_m(y_0, y_1, \dots, y_m) e^{\lambda_{m+1} y_k} = 0. \qquad (3)$$

Равенство (3) справедливо для произвольного i, где $0 \le i \le m$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Если* $\tilde{g}_n = g_n(x_0, x_1, \dots, x_n) \ne 0$, *то интерполяционный многочлен Эрмита–Биркгофа*

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = L_n(x) + \frac{\Omega_n(x) e^{-\lambda_{n+1} x_j} D_{n+1}(f; x_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)}, \qquad (4)$$

где

$$L_n(x) = \frac{1}{\tilde{g}_n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i g_n(x, x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) f(x_i),$$

$$\Omega_n(x) = \frac{(-1)^n}{\tilde{g}_n} g_{n+1}(x, x_0, x_1, \dots, x_n),$$

удовлетворяет условиям (1).

Доказательство. Так как по лемме 1 при $k = i$

$$g_n(x_k, x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = (-1)^i g_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = (-1)^i \tilde{g}_n,$$

а при $k \ne i$ по лемме 2 имеем $g_n(x_k, x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$, то $L_n(x_k) = f(x_k)$ при $k = 0, 1, \dots, n$. Аналогично, по лемме 2 при тех же значениях k, справедливы равенства $\Omega_n(x_k) = 0$. Таким образом, выполняется первая группа условий (1).

Многочлен $\Omega_n(x)$ представим в виде $\Omega_n(x) = e^{\lambda_{n+1} x} + \Phi_n(x)$, где $\Phi_n(x)$, а также многочлен $L_n(x)$ являются конечными линейными комбинациями слагаемых вида $\alpha_k e^{\lambda_k x}$ $(k = 0, 1, \dots, n)$, где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ – некоторые действительные числа. Так как $D_{n+1}\left(e^{\lambda_k x}\right) = 0$ при $k = 0, 1, \dots, n$, то $D_{n+1}\Phi_n(x) = D_{n+1} L_n(x) = 0$, и в силу того, что $D_{n+1}\left(e^{\lambda_{n+1} x}\right) = \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n) e^{\lambda_{n+1} x}$, будем иметь $D_{n+1}\left(\tilde{L}_{n+1}; x_j\right) = D_{n+1}(f; x_j)$, т. е. последнее равенство в (1) также выполняется. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим линейный случай экспоненциального интерполирования. Пусть x_0 и x_1 – узлы интерполирования и в этих узлах известны значения $f(x_0)$, $f(x_1)$ функции $f(x)$, а также в одном из узлов x_j известно значение оператора $D_2(f; x_j)$, где $D_2 f(x) = D(D - \lambda_1) f(x)$. Также пусть заданы действительные числа $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Тогда формула (4) при $n = 1$ примет вид

$$\widetilde{L}_2(x) = L_1(x) + \frac{\Omega_1(x) e^{-\lambda_2 x_j} D_2(f; x_j)}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

где

$$L_1(x) = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_1}}{e^{\lambda_1 x_0} - e^{\lambda_1 x_1}} f(x_0) + \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_0}}{e^{\lambda_1 x_1} - e^{\lambda_1 x_0}} f(x_1),$$

$$\Omega_1(x) = e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_2 x_0} + \frac{(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_0})(e^{\lambda_2 x_0} - e^{\lambda_2 x_1})}{e^{\lambda_1 x_1} - e^{\lambda_1 x_0}}.$$

Заметим, что $\Omega_1(x_k) = 0$ при $k = 0,1,$ а многочлен $L_1(x)$ может быть представлен в виде

$$L_1(x) = f(x_0) + \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 x_0}}{e^{\lambda_1 x_1} - e^{\lambda_1 x_0}} [f(x_1) - f(x_0)].$$

Отметим, что ряд интерполяционных формул других типов для функций, а также для операторов в общих линейных, гильбертовых и функциональных пространствах получен в [10, 11].

Построим представление остаточного члена для полинома (4). Приведем обобщенную теорему Ролля [12]. Пусть $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ – некоторая чебышевская система функций. Рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$\widehat{L}_{n+1} f(x) \equiv (D - b_n) \cdots (D - b_0) f(x) \equiv (D - b_n) \widehat{L}_n f(x),$$

такой, что функции $\varphi_k(x)$ $\left(k = \overline{0,n}\right)$ являются решениями дифференциального уравнения $\widehat{L}_{n+1} f(x) = 0,$ а любое другое решение этого уравнения может быть представлено как линейная комбинация функций $\varphi_k(x).$ Тогда если функции $b_0(x), b_1(x), \ldots, b_n(x)$ аналитические в интервале (a,b) и если $f(x)$ также аналитическая и обращается в нуль $n+2$ раз с учетом кратности, то $\widehat{L}_{n+1} f(x)$ обращается в нуль на этом интервале по крайней мере один раз.

Теорема 2. *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема* $n+2$ *раз в интервале* $(a,b),$ *то остаточный член* $R_{n+1}(x) = f(x) - \widetilde{L}_{n+1}(x)$ *формулы* (4) *имеет вид*

$$R_{n+1}(x) = \frac{\Omega_n(x)(\xi - x_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)} \frac{d}{dx} \left\{ e^{-\lambda_{n+1} x} D_{n+1}(f; x) \right\} \Bigg|_{x=\eta}, \tag{5}$$

где $\xi, \eta \in [a; b].$

Доказательство. Пусть $x \in [a,b],$ $x \neq x_k$ $\left(k = \overline{0,n}\right).$ Обозначим $K = \frac{f(x) - L_n(x)}{\Omega_n(x)},$ и пусть $\psi(u) = f(u) - L_n(u) - K\Omega_n(u).$ Тогда будем иметь

$$D_{n+1}(\psi; u) = D_{n+1}(f; u) - K\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n) e^{\lambda_{n+1} u}.$$

Применим далее обобщенную теорему Ролля. Так как $\psi(x_0) = \psi(x_1) = \ldots = \psi(x_n) = \psi(x) = 0,$ и в нашем случае $\varphi_k(x) = e^{\lambda_k x},$ $b_i(x) = \lambda_i,$ $\widehat{L}_{n+1}(f; x) \equiv D_{n+1}(f; x),$ то функция $D_{n+1}(\psi; x)$ имеет, по крайней мере, один нуль ξ на отрезке $[a,b]$: $D_{n+1}(\psi; \xi) = 0,$ откуда $K = \frac{e^{-\lambda_{n+1} \xi} D_{n+1}(f; \xi)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)},$ и следовательно,

$$f(x)-L_n(x)=K\Omega_n(x)=\frac{\Omega_n(x)e^{-\lambda_{n+1}\xi}D_{n+1}(f;\xi)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}.$$

Окончательно имеем

$$R_{n+1}(x)=f(x)-\widetilde{L}_{n+1}(x)=$$

$$=\frac{\Omega_n(x)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}\left(D_{n+1}(f;\xi)e^{-\lambda_{n+1}\xi}-D_{n+1}(f;x_j)e^{-\lambda_{n+1}x_j}\right)=$$

$$=\frac{\Omega_n(x)(\xi-x_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}\frac{d}{dx}\left\{D_{n+1}(f;x)e^{-\lambda_{n+1}x}\right\}\Big|_{x=\eta},$$

где $\xi,\eta\in[a;b]$. Теорема 2 доказана.

Преобразуем правую часть (5).

$$R_{n+1}(x)=\frac{\Omega_n(x)(\xi-x_j)e^{-\lambda_{n+1}\eta}}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}\left(\frac{d}{dx}D_{n+1}(f;x)\Big|_{x=\eta}-\lambda_{n+1}D_{n+1}(f;\eta)\right). \qquad (6)$$

Введем обозначения: $M_{n+1}=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|D_{n+1}f(x)\right|$, $B_{n+1}=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|\frac{d}{dx}D_{n+1}f(x)\right|$, $C_n=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|\Omega_n(x)\right|$, $\gamma_{n+1}=\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$.

Теорема 3. *Оценка погрешности формулы* (4) *для любого* $x\in[a,b]$ *имеет вид*

$$\left|f(x)-\widetilde{L}_{n+1}(x)\right|\le\frac{(b-a)C_ne^{-\lambda_{n+1}a}}{\gamma_{n+1}}\left[B_{n+1}+\lambda_{n+1}M_{n+1}\right]. \qquad (7)$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что справедливы следующие неравенства: $\left|\xi-x_j\right|\le b-a$, $e^{-\lambda_{n+1}\eta}\le e^{-\lambda_{n+1}a}$, $\xi,\eta\in[a,b]$. Учитывая данные неравенства и (6), получим оценку (7).

Применение и точность интерполяционной формулы (4) проиллюстрируем на конкретном примере.

Пример. Пусть $f(t)=\sin e^t$. Рассмотрим частные случаи формулы (4) при $n=1,2,3,4$. Учитывая свойства функции $f(t)$, построим интерполяционные полиномы на неравномерных сетках. Для данного конкретного случая соответствующие системы узлов будут такими

1) $t_0^1=0{,}279$; $t_1^1=1{,}71$; $t_j^1=t_1^1$;

2) $t_0^2=1{,}248$; $t_1^2=1{,}644$; $t_2^2=1{,}908$; $t_j^2=t_0^2$;

3) $t_0^3=0{,}071$; $t_1^3=1{,}274$; $t_2^3=1{,}656$; $t_3^3=1{,}883$; $t_j^3=t_2^3$;

4) $t_0^4=0{,}453$; $t_1^4=0{,}968$; $t_2^4=1{,}38$; $t_3^4=1{,}857$; $t_4^4=1{,}985$; $t_j^4=t_3^4$.

Тогда интерполяционные многочлены примут вид

$$\widetilde{L}_2(t)=1{,}350-0{,}2449e^{1{,}7t}+0{,}004374e^{3{,}7t},$$

$$\widetilde{L}_3(t)=1{,}079-0{,}2241e^{4{,}1t}+0{,}199e^{4{,}3t}-0{,}01476e^{4{,}9t},$$

$$\widetilde{L}_4(t)=-0{,}7893+1{,}914e^{0{,}8t}-0{,}8199e^{3{,}2t}+0{,}9813e^{3{,}7t}-0{,}4588e^{3{,}9t},$$

$$\widetilde{L}_5(t)=0{,}43185+1{,}3006e^{2{,}4t}-1{,}4190e^{3{,}3t}+$$

$$+2{,}1562e^{4{,}2t}-1{,}6309e^{4{,}3t}+0{,}0017349e^{5{,}7t}.$$

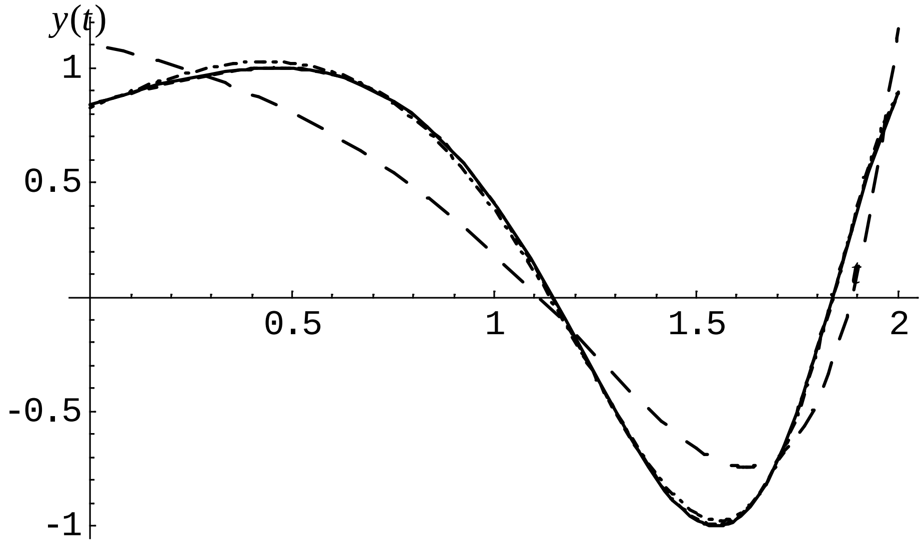

Рисунок 1

Точность приближения функции $f(t)$ многочленами $\tilde{L}_2(t)$, $\tilde{L}_4(t)$ и $\tilde{L}_5(t)$ изображается на графике (рисунок 1). Сплошной линией изображена интерполируемая функция $f(t)$, штриховой – $\tilde{L}_2(t)$, штрих-пунктирной – $\tilde{L}_4(t)$, пунктирной – $\tilde{L}_5(t)$.

Интерполяционные многочлены $\tilde{L}_4(t)$ и $\tilde{L}_5(t)$ более точно описывают поведение функции $f(t)$ на данном отрезке. Нормы невязок между функцией $f(t)$ и интерполяционными многочленами равны

$$\left\| f(t) - \tilde{L}_2(t) \right\|_{C[0,2]} = \max_{t\in[0,2]} \left| f(t) - \tilde{L}_2(t) \right| = 0{,}3133; \quad \left\| f(t) - \tilde{L}_3(t) \right\|_{C[0,2]} = 0{,}2010;$$

$$\left\| f(t) - \tilde{L}_4(t) \right\|_{C[0,2]} = 0{,}02887; \quad \left\| f(t) - \tilde{L}_5(t) \right\|_{C[0,2]} = 0{,}005469.$$

С увеличением степени интерполяционного многочлена вида (4) в данном конкретном случае точность приближения повышается.

Интерполирование функций матричного аргумента. Рассмотрим сначала интерполяционную формулу Эрмита–Биркгофа первого порядка, построенную на основе экспоненциальных матричных функций вида $\varphi_k(A) = e^{\lambda_k A}$ $(k = 0,1,2)$, $A = A(t) \in X$, $t \in X$, где $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ – заданные действительные числа, а X – множество квадратных матриц.

Пусть $F(z)$, $z \in \mathbb{C}$ – целая функция, $A_k = A_k(t) \in X$ $(k = 0,1)$ – матричные узлы интерполирования, в которых известны значения $F(A_k)$ функции $F(A)$ и в одном из узлов – значение $D_2(F; A_j)$ дифференциального оператора вида

$$D_2F(A) = (D - \lambda_1) DF(z)\big|_{z=A}, \; D = \frac{d}{dz}. \tag{8}$$

Для функции вида $B_1F(A)B_2$, где B_1 и B_2 – некоторые фиксированные матрицы из множества X, значение оператора (8) вычисляется по формуле

$$D_2(B_1F(A)B_2; A) = B_1D_2F(A)B_2.$$

Теорема 4. *Если матрица* $[e^{\lambda_1 A_0} - e^{\lambda_1 A_1}]$ *обратима, то для интерполяционного многочлена*

$$\widetilde{L}_2(A) = L_1(A) + \frac{\Omega_1(A)e^{-\lambda_2 A_j} D_2(F; A_j)}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}, \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered} L_1(A) = [e^{\lambda_1 A} - e^{\lambda_1 A_1}][e^{\lambda_1 A_0} - e^{\lambda_1 A_1}]^{-1} F(A_0) + \\ + [e^{\lambda_1 A} - e^{\lambda_1 A_0}][e^{\lambda_1 A_1} - e^{\lambda_1 A_0}]^{-1} F(A_1), \\ \Omega_1(A) = e^{\lambda_2 A} - e^{\lambda_2 A_0} + [e^{\lambda_1 A} - e^{\lambda_1 A_0}][e^{\lambda_1 A_1} - e^{\lambda_1 A_0}]^{-1}[e^{\lambda_2 A_0} - e^{\lambda_2 A_1}], \end{gathered} \tag{10}$$

выполняются условия $\widetilde{L}_2(A_k) = F(A_k)$ $(k = 0,1)$; $D_2(\widetilde{L}_2; A_j) = D_2(F; A_j)$, *где* $j = 0$ *или* $j = 1$.

Если матрицы A_0 *и* A_1 *перестановочны, то формула* (9) *точна для многочленов вида*

$$P_2(A) = B + e^{\lambda_1 A}C + e^{\lambda_2 A}G, \tag{11}$$

где B, C, G *– любые фиксированные матрицы из* X.

Доказательство. Действительно, совпадение полинома $\widetilde{L}_2(A)$ и интерполируемой функции $F(A)$ в узлах A_0 и A_1 следует из того, что $L_1(A_k) = F(A_k)$ и $\Omega_1(A_k) = 0$ при $k = 0,1$. Так как $D_2(e^{\lambda_k A}) \equiv 0$ $(k = 0,1)$, а $D_2(e^{\lambda_2 A}) = \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_2 A}$, то получим, что $D_2(\widetilde{L}_2; A_j) = D_2(F; A_j)$.

Докажем инвариантность формулы (9) относительно многочленов вида (11). Так как для $F(A) = B$ и $F(A) = e^{\lambda_1 A}C$, при условии перестановочности матриц A_0 и A_1, выполняются тождества $L_1(A) \equiv F(A)$ и $D_2 F(A) \equiv 0$, то для этих функций $\widetilde{L}_2(A) \equiv F(A)$. Далее, в силу того, что $D_2 F(A) = \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_2 A}G$ для функции $F(A) = e^{\lambda_2 A}G$, то, учитывая перестановочность узлов, после несложных вычислений приходим к соотношению

$$\begin{gathered} \widetilde{L}_2(A) = \left(e^{\lambda_1 A}[e^{\lambda_2 A_0} - e^{\lambda_2 A_1}] + [e^{\lambda_1 A_0 + \lambda_2 A_1} - e^{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_0}]\right) \times \\ \times [e^{\lambda_1 A_0} - e^{\lambda_1 A_1}]^{-1} G + \Omega_1(A)G = e^{\lambda_2 A}G \equiv F(A). \end{gathered}$$

Таким образом, формула (9) точна для многочленов вида (11). Теорема 4 доказана.

Рассмотрим далее обобщенный вариант аналогичной задачи интерполирования для случая трех узлов и матричных многочленов относительно системы функций $\varphi_k(A) = e^{\lambda_k A}$ $(k = 0,1,2,3)$, $A = A(t) \in X$, $t \in \mathbb{C}$, где $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, а X – множество квадратных матриц.

Пусть, как и ранее, $F(z)$, $z \in \mathbb{C}$ – целая функция, $A_k = A_k(t) \in X$ $(k = 0,1,2)$ – матричные узлы интерполирования, в которых известны значения $F(A_k)$ функции $F(A)$, определенной на множестве X, и в одном из них – значение $D_3(F; A_j)$ дифференциального оператора вида

$$D_3 F(A) = (D - \lambda_2)(D - \lambda_1)DF(z)\big|_{z=A}, \ D = \frac{d}{dz},$$

причем $D_3(C_1 F(A) C_2) = C_1 D_3 F(A) C_2$, где C_1 и C_2 – некоторые фиксированные матрицы из X.

Введем функции $G_k(B_0, \ldots, B_k)$ от матричных переменных $B_0, \ldots, B_k \in X$ $(k = 1,2,3)$, определяемые равенствами

$$G_1(B_0,B_1)=e^{\lambda_1 B_1}-e^{\lambda_1 B_0};$$
$$G_2(B_0,B_1,B_2)=-G_1(B_1,B_2)e^{\lambda_2 B_0}+G_1(B_0,B_2)e^{\lambda_2 B_1}-G_1(B_0,B_1)e^{\lambda_2 B_2};$$
$$G_3(B_0,B_1,B_2,B_3)=G_2(B_1,B_2,B_3)e^{\lambda_3 B_0}-G_2(B_0,B_2,B_3)e^{\lambda_3 B_1}+$$
$$+G_2(B_0,B_1,B_3)e^{\lambda_3 B_2}-G_2(B_0,B_1,B_2)e^{\lambda_3 B_3}. \quad (12)$$

Теорема 5. *Если матрица* $G=G_2(A_0,A_1,A_2)$ *обратима, то интерполяционный многочлен Эрмита-Биркгофа*

$$\tilde{L}_3(A)=L_2(A)+\frac{\Omega_2(A)e^{-\lambda_3 A_j}D_3(F;A_j)}{\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}, \quad (13)$$

где $L_2(A)=G^{-1}\big(G_2(A,A_1,A_2)F(A_0)-G_2(A,A_0,A_2)F(A_1)+G_2(A,A_0,A_1)F(A_2)\big)$, $\Omega_2(A)=G^{-1}G_3(A,A_0,A_1,A_2)$, *удовлетворяет условиям*

$$\tilde{L}_3(A_k)=F(A_k)\ (k=0,1,2);\quad D_3(\tilde{L}_3;A_j)=D_3(F;A_j).$$

Если матрицы A, A_0, A_1 *и* A_2 *попарно перестановочны, то формула* (13) *точна для многочленов вида*

$$P_3(A)=C_0+e^{\lambda_1 A}C_1+e^{\lambda_2 A}C_2+e^{\lambda_3 A}C_3, \quad (14)$$

где C_0, C_1, C_2, C_3 *– произвольные фиксированные матрицы из множества X.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что при $i=0,1,2$ выполняются соотношения $G_2(A_i,A_1,A_2)=\delta_{i0}G$, $G_2(A_i,A_0,A_2)=-\delta_{i1}G$, $G_2(A_i,A_0,A_1)=\delta_{i2}G$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Отсюда следует, что $L_2(A_k)=F(A_k)$ и $\Omega_2(A_k)=0$ при $k=0,1,2$. Следовательно в узлах A_0, A_1 и A_2 многочлен $\tilde{L}_3(A)$ совпадает с функцией $F(A)$.

Многочлены $L_2(A)$ и $\Omega_2(A)$ можно представить в виде

$$L_2(A)=B_0+G^{-1}e^{\lambda_1 A}B_1+\sum_{k=0}^{2}B_{k+2}e^{\lambda_2 A}F(A_k),$$
$$\Omega_2(A)=e^{\lambda_3 A}+\tilde{B}_0+G^{-1}e^{\lambda_1 A}\tilde{B}_1+\sum_{k=1}^{3}\tilde{B}_{2k}e^{\lambda_2 A}\tilde{B}_{2k+1},$$

где B_k, $\tilde{B}_\nu$ $(k=0,1,\dots,4;\ \nu=0,1,\dots,7)$ – некоторые фиксированные матрицы из множества X. Поэтому, так как $D_3(e^{\lambda_k A})\equiv 0$ при $k=1,2,$ то $D_3L_2(A)\equiv 0$ и $D_3\Omega_2(A)=D_3(e^{\lambda_3 A})=\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)e^{\lambda_3 A}$, откуда следует, что $D_3(\tilde{L}_3;A_j)=D_3(F;A_j)$.

Используя рекуррентные соотношения (12), покажем, что формула (13) точна для многочленов вида (14). Для функции $F(A)=C_0$ будем иметь

$$L_2(A)=L_2(C_0;A)=G^{-1}\big(G_2(A,A_1,A_2)-G_2(A,A_0,A_2)+G_2(A,A_0,A_1)\big)C_0=G^{-1}\times$$
$$\times\Big(\big(-G_1(A_1,A_2)+G_1(A_0,A_2)-G_1(A_0,A_1)\big)e^{\lambda_2 A}-\big(G_1(A,A_2)-G_1(A,A_1)\big)e^{\lambda_2 A_0}+$$
$$+\big(G_1(A,A_2)-G_1(A,A_0)\big)e^{\lambda_2 A_1}-\big(G_1(A,A_1)-G_1(A,A_0)\big)e^{\lambda_2 A_2}\Big)C_0=G^{-1}\times$$
$$\times\Big(-G_1(A_1,A_2)e^{\lambda_2 A_0}+G_1(A_0,A_2)e^{\lambda_2 A_1}-G_1(A_0,A_1)e^{\lambda_2 A_2}\Big)C_0=G^{-1}GC_0=C_0.$$

В то же время при $F(A)=e^{\lambda_k A}C_k$ $(k=1,2,3)$ справедливы равенства

$$L_2(A)=L_2(e^{\lambda_k A}C_k;A)=G^{-1}\Big(e^{\lambda_1 A_1}e^{\lambda_2 A}e^{\lambda_k A_0}-e^{\lambda_1 A_2}e^{\lambda_2 A}e^{\lambda_k A_0}+e^{\lambda_1 A_2}e^{\lambda_2 A_1}e^{\lambda_k A_0}-$$
$$-e^{\lambda_1 A}e^{\lambda_2 A_1}e^{\lambda_k A_0}+e^{\lambda_1 A}e^{\lambda_2 A_2}e^{\lambda_k A_0}-e^{\lambda_1 A_1}e^{\lambda_2 A_2}e^{\lambda_k A_0}-e^{\lambda_1 A_0}e^{\lambda_2 A}e^{\lambda_k A_1}+$$
$$+e^{\lambda_1 A_2}e^{\lambda_2 A}e^{\lambda_k A_1}-e^{\lambda_1 A_2}e^{\lambda_2 A_0}e^{\lambda_k A_1}+e^{\lambda_1 A}e^{\lambda_2 A_0}e^{\lambda_k A_1}-e^{\lambda_1 A}e^{\lambda_2 A_2}e^{\lambda_k A_1}+$$
$$+e^{\lambda_1 A_0}e^{\lambda_2 A_2}e^{\lambda_k A_1}+e^{\lambda_1 A_0}e^{\lambda_2 A}e^{\lambda_k A_2}-e^{\lambda_1 A_1}e^{\lambda_2 A}e^{\lambda_k A_2}+e^{\lambda_1 A_1}e^{\lambda_2 A_0}e^{\lambda_k A_2}-$$
$$-e^{\lambda_1 A}e^{\lambda_2 A_0}e^{\lambda_k A_2}+e^{\lambda_1 A}e^{\lambda_2 A_1}e^{\lambda_k A_2}-e^{\lambda_1 A_0}e^{\lambda_2 A_1}e^{\lambda_k A_2}\Big)C_k.$$

Тогда, учитывая попарную перестановочность матриц A, A_0, A_1 и A_2, при $k=1,2$ получим

$$L_2(e^{\lambda_k A}C_k;A)=G^{-1}\Big(-\Big(e^{\lambda_1 A_2}-e^{\lambda_1 A_1}\Big)e^{\lambda_2 A_0}+\Big(e^{\lambda_1 A_2}-e^{\lambda_1 A_0}\Big)e^{\lambda_2 A_1}-$$
$$-\Big(e^{\lambda_1 A_1}-e^{\lambda_1 A_0}\Big)e^{\lambda_2 A_2}\Big)e^{\lambda_k A}C_k=G^{-1}Ge^{\lambda_k A}C_k=e^{\lambda_k A}C_k.$$

Далее, так как $D_3\Big(e^{\lambda_k A}C_k\Big)=D_3\Big(e^{\lambda_k A}\Big)C_k=\lambda_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)e^{\lambda_k A}C_k$, то $D_3\Big(e^{\lambda_k A}C_k\Big)\equiv 0$ при $k=0,1,2$, а

$$D_3\Big(e^{\lambda_3 A}C_3\Big)=\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)e^{\lambda_3 A}C_3. \tag{15}$$

Следовательно, для функции $F(A)=C_0+e^{\lambda_1 A}C_1+e^{\lambda_2 A}C_2$ выполняется тождество $\tilde{L}_3(A)\equiv F(A)$. Используя последнее равенство в (12) и формулу (15), для $F(A)=e^{\lambda_3 A}C_3$ будем иметь

$$\tilde{L}_3(A)=L_2(A)+\Omega_2(A)=G^{-1}\Big(G_2(A,A_1,A_2)e^{\lambda_3 A_0}-G_2(A,A_0,A_2)e^{\lambda_3 A_1}+$$
$$+G_2(A,A_0,A_1)e^{\lambda_3 A_2}+G_2(A_0,A_1,A_2)e^{\lambda_3 A}-G_2(A,A_1,A_2)e^{\lambda_3 A_0}+$$
$$+G_2(A,A_0,A_2)e^{\lambda_3 A_1}-G_2(A,A_0,A_1)e^{\lambda_3 A_2}\Big)C_3=G^{-1}Ge^{\lambda_3 A}C_3=e^{\lambda_3 A}C_3.$$

Таким образом, формула (13) точна для многочленов вида (14). Теорема 5 доказана.

Рассмотрим далее на множестве квадратных матриц X аналогичный вариант интерполяционной задачи для случая произвольного числа узлов $A_0,A_1,\dots,A_n\in X$ и матричных многочленов относительно системы функций $\varphi_k(A)=e^{\lambda_k A}$, $A\in X$ $(k=0,1,\dots,n+1)$, где $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}$ – заданные действительные числа, удовлетворяющие условию $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_{n+1}$.

В данном случае в качестве оператора $D_{n+1}F(A)$ берется матрично-дифференциальный оператор

$$D_{n+1}F(A)=(D-\lambda_n)\cdots(D-\lambda_2)(D-\lambda_1)DF(z)\big|_{z=A},\ D=\frac{d}{dz}. \tag{16}$$

При этом значение оператора (16) для матричной функции $\Phi(A)$ вида $\Phi(A)=C_1F(A)C_2$, где C_1 и C_2 – некоторые фиксированные матрицы, а $F(z)$, $z\in\mathbb{C}$ – целая функция, вычисляется по правилу $D_{n+1}\Phi(A)=C_1D_{n+1}F(A)C_2$.

Ранее мы рассмотрели матричные функции $G_k(B_0,\dots,B_k)$ $(k=1,2,3)$, задаваемые равенствами (12). Доопределим данные функции в общем случае при $k=n$ по формуле

$$G_n(B_0,B_1,\dots,B_n)=$$

$$= (-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k G_{n-1}(B_0,\dots,B_{k-1},B_{k+1},\dots,B_n)e^{\lambda_n B_k} \quad (n=1,2,\dots). \tag{17}$$

При этом будем считать, что $G_0(B_k) = -I$ $(k = 0,1,\dots,n)$, где I – единичная матрица.

Приведем две леммы, которые будут использованы при доказательстве теоремы.

Лемма 3. *При перестановке любых двух соседних аргументов* B_k, B_{k+1} *местами функция* $G_n(B_0, B_1,\dots,B_n)$ *меняет знак на противоположный:*

$$G_n(B_0,B_1,\dots,B_{k-1},B_{k+1},B_k,B_{k+2},\dots,B_n) = -G_n(B_0,B_1,\dots,B_k,B_{k+1},\dots,B_n).$$

Лемма 4. *Для любых матриц* $B_0,B_1,\dots,B_{n-1}$ *из множества X и любых i и n* $(0\le i\le n-1,\ n\ge 1)$ *справедливо равенство*

$$G_n(B_i,B_0,B_1,\dots,B_{n-1}) = 0.$$

Доказательства данных лемм полностью повторяют доказательства лемм 1 и 2, если в них заменить скалярные переменные $y_0, y_1,\dots,y_n$ матрицами $B_0,B_1,\dots,B_n$ и вместо скалярных функций $g_n(y_0,y_1,\dots,y_n)$ рассматривать матричные функции $G_n(B_0,B_1,\dots,B_n)$.

Теорема 6. *Если матрица* $\tilde{G}_n = G_n(A_0,A_1,\dots,A_n)$ *обратима, то матричный многочлен*

$$\tilde{L}_{n+1}(A) = L_n(A) + \frac{\Omega_n(A)e^{-\lambda_{n+1}A_j}D_{n+1}(F;A_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}, \tag{18}$$

где

$$L_n(A) = \tilde{G}_n^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i G_n(A,A_0,A_1,\dots,A_{i-1},A_{i+1},\dots,A_n)F(A_i), \tag{19}$$

$$\Omega_n(A) = (-1)^n\tilde{G}_n^{-1}G_{n+1}(A,A_0,A_1,\dots,A_n), \tag{20}$$

удовлетворяет условиям

$$\tilde{L}_{n+1}(A_k) = F(A_k) \quad (k=0,1,\dots,n); \quad D_{n+1}\left(\tilde{L}_{n+1};A_j\right) = D_{n+1}\left(F;A_j\right). \tag{21}$$

Доказательство. Так как по лемме 3 при $k = i$

$$G_n(A_k,A_0,\dots,A_{i-1},A_{i+1},\dots,A_n) = (-1)^i G_n(A_0,A_1,\dots,A_n) = (-1)^i G_n,$$

а при $k\ne i$ по лемме 4 имеем $G_n(A_k,A_0,\dots,A_{i-1},A_{i+1},\dots,A_n) = 0,$ то $L_n(A_k) = F(A_k)$ при $k = 0,1,\dots,n.$ Аналогично (по лемме 4) при тех же значениях k справедливы равенства $\Omega_n(A_k) = 0.$ Таким образом, выполняется первая группа условий (21).

Многочлен $L_n(A)$ можно представить в виде

$$L_n(A) = B_0 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m_k} B_{k,\nu}e^{\lambda_k A}C_{k,\nu}, \tag{22}$$

где m_k – соответствующие натуральные числа, а B_0, $B_{k,\nu}$, $C_{k,\nu}$ – некоторые фиксированные матрицы из множества X. Из (17) и (20) следует, что $\Omega_n(A) = e^{\lambda_{n+1}A} + \Phi_n(A),$ где функция $\Phi_n(A)$ имеет представление вида (22).

Так как $D_{n+1}\left(e^{\lambda_k A}\right)\equiv 0$ при $k = 0,1,\dots,n,$ то $D_{n+1}L_n(A)\equiv D_{n+1}\Phi_n(A)\equiv 0.$ Поэтому в силу того, что $D_{n+1}\left(e^{\lambda_{n+1}A}\right) = \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1}-\lambda_n)e^{\lambda_{n+1}A},$ учитывая структуру многочлена (18), получим, что $D_{n+1}\left(\tilde{L}_{n+1}; A_j\right) = D_{n+1}(F; A_j)$, т. е. последнее условие в (21) также выполняется. Теорема 6 доказана.

Построим формулу, аналогичную (18), в которой оператор $D_{n+1}F(A)$ будет задаваться посредством дифференциалов Гато от функции $F(A)$, $A \in X$, дифференцируемой по Гато $n+1$ раз в узле $A_j \in X$. Рассмотрим матрично-дифференциальный оператор вида

$$\tilde{D}_{n+1}F(A) \equiv \tilde{D}_{n+1}F(A; H_{n+1}H_n \cdots H_1) =$$
$$= \left(D_{H_{n+1}} - \lambda_n H_{n+1}\right)\cdots\left(D_{H_3} - \lambda_2 H_3\right)\left(D_{H_2} - \lambda_1 H_2\right)D_{H_1}F(A), \tag{23}$$

где $D_{H_k}F(A) = \delta F[A; H_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ – первый дифференциал Гато от $F(A)$ в точке A по направлению $H_k \in X$. Легко убедиться, что на множестве перестановочных матриц решением уравнения $\tilde{D}_{n+1}F(A) = 0$ являются функции $\varphi_k(A) = e^{\lambda_k A}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, а также любая фиксированная матрица из множества X.

Теорема 7. *Если матрицы* $\tilde{G}_n = G_n(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *и* $H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$ *обратимы, то матричный многочлен*

$$\tilde{L}_{n+1}(A) = L_n(A) + \frac{\Omega_n(A)\left(H_{n+1}H_n \cdots H_1\right)^{-1} e^{-\lambda_{n+1}A_j}\,\tilde{D}_{n+1}(F; A_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1} - \lambda_n)}, \tag{24}$$

где $L_n(A)$ *и* $\Omega_n(A)$ *определяются по формулам* (19) *и* (20) *соответственно, совпадает в узлах* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *с функцией* $F(A)$. *Если матрица* A_j *и направления* $H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$ *попарно перестановочны, то многочлен* (24) *удовлетворят также условию*

$$\tilde{D}_{n+1}\left(\tilde{L}_{n+1}; A_j\right) = \tilde{D}_{n+1}\left(F; A_j\right). \tag{25}$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 6 следует, что $L_n(A_k) = F(A_k)$ и $\Omega_n(A_k) = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, n$. Тогда, учитывая структуру многочлена (24), получим, что в узлах A_0, $A_1, \ldots, A_n$ он совпадает с интерполируемой функцией $F(A)$.

Так как матрица A_j перестановочна с направлениями $H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$, то

$$D_{H_k}\varphi_\nu(A)\Big|_{A=A_j} = \delta\varphi_\nu[A_j; H_k] = \lambda_\nu e^{\lambda_\nu A_j} H_k \quad (k, \nu = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{26}$$

где $\varphi_\nu(A) = e^{\lambda_\nu A}$, откуда при условии попарной перестановочности указанных в теореме матриц следует, что

$$\tilde{D}_{n+1}\left(\varphi_\nu; A_j\right) = \lambda_\nu(\lambda_\nu - \lambda_1)\cdots(\lambda_\nu - \lambda_n)e^{\lambda_\nu A_j} H_{n+1}H_n \cdots H_1. \tag{27}$$

Таким образом, $\tilde{D}_{n+1}\left(\varphi_\nu; A_j\right) = 0$ при $\nu = 1, 2, \ldots, n$ и

$$\tilde{D}_{n+1}\left(\varphi_{n+1}; A_j\right) = \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1} - \lambda_n)e^{\lambda_{n+1}A_j} H_{n+1}H_n \cdots H_1.$$

Поэтому в силу указанных в доказательстве теоремы 6 представлений многочленов $L_n(A)$ и $\Omega_n(A)$ в виде линейных комбинаций матричных экспонент и учитывая структуру многочлена (24), получим равенство (25). Теорема 7 доказана.

Ряд других интерполяционных формул Эрмита–Биркгофа имеется в [2; 4; 5; 10; 11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жидков, Н.П. Линейные аппроксимации функционалов / Н.П. Жидков. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1977. – 262 с.

2. Ибрагимов, И.И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения / И.И. Ибрагимов. – М. : Наука, 1971. – 518 с.

3. Турецкий, А.Х. Теория интерполирования в задачах / А.Х. Турецкий. – Минск : Вышэйшая школа, 1968. – 320 с.

4. Янович, Л.А. Интерполяционные операторные многочлены Эрмита–Биркгофа в пространстве гладких функций / Л.А. Янович, М.В. Игнатенко // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 5. – С. 15–21.

5. Янович, Л.А. Специальный случай интерполяционной задачи Эрмита–Биркгофа для операторов в пространстве гладких функций / Л.А. Янович, М.В. Игнатенко // Актуальные проблемы современного анализа: сб. науч. тр. / Гродн. гос. ун-т им. Я. Купалы; отв. ред. Ю.М. Вувуникян. – Гродно, 2009. – С. 198–215.

6. Худяков, А.П. Интерполяционные многочлены типа Эрмита–Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций / А. П Худяко в // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 29–36.

7. Худяков, А.П. Явные формулы погрешностей для одного случая эрмитова интерполирования / А.П. Худяков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 1. – С. 13–21.

8. Yanovich, L.A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L.A. Yanovich, A.P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.

9. Худяков, А.П. Обобщенные интерполяционные эрмитова типа многочлены для функций матричной переменной / А.П. Худяков, Л.А. Янович // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 103–114.

10. Макаров, В.Л. Интерполирование операторов / В.Л. Макаров, В.В. Хлобыстов, Л.А. Янович. – К. : Наукова думка, 2000. – 407 с.

11. Makarov, Volodymyr L. Methods of Operator Interpolation / Volodymyr L. Makarov, Volodymyr V. Khlobystov, Leonid A. Yanovich. – К. : Праці Ін-ту математики НАН України, 2010. – Т. 83. – 517 с.

12. Хаусхолдер, А.С. Основы численного анализа / А.С. Хаусхолдер ; под ред. Л.А. Люстерника. – М. : Изд-во иностр. лит., 1956. – 320 с.

A.P. Hudyakov **The Generalized Exponential Interpolation Polynomials of Hermite–Birkhoff type for functions of scalar and matrix argument**

For functions of a scalar argument the generalized interpolation polynomial of Hermite–Birkhoff type with particular to functions with arbitrary exponents is constructed and researched. The explicit representation of error and its estimation are obtained. This formula is generalized to the case of functions of matrix argument. In particular cases the invariance of the interpolation formula with respect to exponential matrix polynomials is shown.