

УДК 512.542

С.А. Серая, А.А. Трофимук

О A_4 -СВОБОДНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ ГРУПП С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ИНДЕКСЫ НЕКОТОРЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Исследуется конечная A_4 -свободная нормальная подгруппа K группы G с индексами максимальных подгрупп, не содержащими K , равными простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел. В частности, установлено, что нильпотентная длина такой подгруппы не превышает 4, производная длина фактор-группы $K/\Phi(K)$ не превышает 5, p -длина подгруппы K не превышает 2 для всех простых p . Построены примеры, показывающие точность полученных оценок. В доказательствах использовались фрагменты теории формаций и вычисления в системе компьютерной алгебры GAP.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Напомним, что группа G называется A_4 -свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4 .

Пусть K – нормальная подгруппа группы G . В 2000 г. Л.А. Шеметков предложил рассмотреть строение нормальной разрешимой подгруппы группы с ограниченными примарными индексами максимальных подгрупп.

В работе [2, теорема 3.1] Л.А. Шеметков показал, что если индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K , равен простому числу, то подгруппа K сверхразрешима. Л.Я. Поляков [3, теорема 1] установил разрешимость нормальной подгруппы K группы G , у которой индекс каждой её максимальной подгруппы, не содержащей K , есть простое число либо квадрат простого числа. Если предположить, что в группе индексы максимальных подгрупп, не содержащих K , делятся еще и на кубы простых чисел, то группа может быть неразрешимой. Примером служит группа $PSL(2,7)$, индексы максимальных подгрупп которой равны 7 и 8.

Из утверждения М.В. Селькина [4, следствие 3.2.6] следует, что если в группе G все максимальные подгруппы, не содержащие нормальную подгруппу K , имеют примарные индексы, то либо группа K разрешима, либо $K/S(K)$ изоморфна простой группе $PSL(2,7)$. Здесь $S(K)$ – разрешимый радикал группы K .

Так как в $PSL(2,7)$ есть подгруппа, изоморфная A_4 , то A_4 -свободная нормальная подгруппа K группы G , у которой индекс любой максимальной подгруппы, не содержащей K , примарен, является разрешимой.

В работе [5] В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская получили оценки производной, нильпотентной и p -длины нормальной подгруппы K группы G , у которой индекс каждой её максимальной подгруппы, не содержащей K , есть простое число, квадрат простого числа или куб простого числа.

Следующая теорема даёт новую информацию о строении такой A_4 -свободной нормальной подгруппы K .

Теорема. Пусть K – A_4 -свободная нормальная подгруппа группы G с индексами максимальных подгрупп, не содержащими K , равными простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел. Тогда производная длина фактор-группы

$K/\Phi(K)$ не превышает 5, нильпотентная длина группы K не превышает 4, p -длина не превышает 2 для всех простых p .

Пример 1. С помощью компьютерной системы GAP построена группа $G = [E_{7,3}][[S]SL(2,3)]$, где S – экстраспециальная группа порядка 27. Ясно, что $|G| = 2^4 3^4 7^3$. В группе G существует нормальная A_4 -свободная подгруппа $K = [E_{7,3}][[S]Q_8]$ с единичной подгруппой Фраттини. Здесь Q_8 – группа кватернионов порядка 8. Индексы максимальных подгрупп группы G , не содержащих K , принадлежат множеству $\{4, 9, 343\}$, а производная длина подгруппы K равна 5. Значит оценка производной длины в теореме точная.

Следствие 1. Пусть K – A_4 -свободная нормальная подгруппа группы G с индексами максимальных подгрупп, не содержащими K , равными простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел $p \in \{2, 3, 5\}$. Тогда производная длина фактор-группы $K/\Phi(K)$ и нильпотентная длина группы K не превышает 3, 3-длина не превышает 2, p -длина не превышает 1 для всех простых $p \neq 3$.

Пример 2. Пусть E_{3^3} – элементарная абелева группа порядка 3^3 . A_4 -свободная группа $G = [E_{3^3}][[Z_{13}]Z_3]$ порядка 1053 с единичной подгруппой Фраттини, индексы максимальных подгрупп которой принадлежат множеству $\{3, 13, 27\}$, имеет производную длину равную 3, нильпотентную длину равную 3, 3-длина равную 2, 13-длина равную 1. Здесь Z_n – циклическая группа порядка n . Следовательно, оценки производной длины, нильпотентной длины и p -длины, полученные в следствии 1, являются точными.

Следствие 2. Пусть K – A_4 -свободная нормальная подгруппа группы G с индексами максимальных подгрупп, не содержащими K , равными простым числам или квадратам простых чисел. Тогда производная длина фактор-группы $K/\Phi(K)$ и нильпотентная длина группы K не превышает 3, 3-длина не превышает 2, p -длина не превышает 1 для всех простых $p \neq 3$.

Пример 3. Пусть E_{3^3} – элементарная абелева группа порядка 3^3 . Группа $G = [E_{3^3}]SL(2,3)$ порядка 648 имеет нормальную A_4 -свободную подгруппу $K = [E_{3^3}]Q_8$ с единичной подгруппой Фраттини. Индексы максимальных подгрупп группы G , не содержащих K , принадлежат множеству $\{3, 4, 9\}$. Производная длина группы K равна 3. Здесь Q_8 – группа кватернионов порядка 8. Следовательно, оценка производной длины, полученная в следствии 2, является точной.

В случае, когда $K = G$ получим целый ряд следствий.

Следствие 3. Пусть G – A_4 -свободная группа с индексами максимальных подгрупп, равными простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, нильпотентная длина группы G не превышает 4, p -длина не превышает 2 для всех простых p .

Следствие 4. Пусть G – A_4 -свободная группа с индексами максимальных подгрупп, равными простым числам или квадратам простых чисел. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ и нильпотентная длина группы G не превышает 3, 3-длина не превышает 2, p -длина не превышает 1 для всех простых $p \neq 3$.

1. Вспомогательные результаты

Пусть \mathfrak{F} – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – \mathfrak{F} -корадикал группы G , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{G} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций \mathfrak{F} и \mathfrak{G} состоит из всех групп G , для которых \mathfrak{G} -корадикал принадлежит формации \mathfrak{F} . Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных, абелевых и сверхразрешимых групп обозначают через \mathfrak{N} , \mathfrak{A} и \mathfrak{U} соответственно.

Для доказательства нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть \mathfrak{F} – формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно [6, с. 36] произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 2 ([7], лемма 9, лемма 10, лемма 11). **1.** Если H – подгруппа группы $GL(3,2)$, то $H \in \{1, GL(3,2), Z_2, Z_3, Z_7, Z_2 \times Z_2, Z_4, D_8, S_3, A_4, S_4, [Z_7]Z_3\}$. В частности, если H A_4 -свободна, то H метациклическая.

2. Если H – разрешимая подгруппа группы $GL(3,3)$ и $O_3(H) = 1$, то $H \cong Z_2 \times D$ или $H \cong D$, где D либо 2-группа производной длины не превосходящей 2, либо $D \in \{Z_{13}, A_4, S_4, [Z_{13}]Z_3, SL(2,3), GL(2,3)\}$. В частности, если H A_4 -свободна, то H метабелева.

3. Если H – разрешимая подгруппа группы $GL(3,5)$ и $O_5(H) = 1$, то $H \cong Z_2 \times D$, $H \cong Z_4 \times D$ или $H \cong D$, где D либо 2-группа производной длины не превосходящей 2, либо $D \in \{Z_3, Z_6, S_3, [Z_3]Z_4, Z_{12}, D_{12}, A_4, S_4, Z_4 \times S_3, Z_{24}, [Z_3]Z_8, Z_{31}, SL(2,3), [SL(2,3)]Z_2, [Z_4 \times Z_4]Z_3, [Z_{24}]Z_2, [Z_{31}]Z_3, [[Z_4 \times Z_4]Z_3]Z_2, [SL(2,3)]Z_4\}$. В частности, если H – неприводимая A_4 -свободная группа, то производная длина H не превышает 2.

Здесь S_n – симметрическая группа степени n .

Лемма 3 [7, лемма 7]. Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$.

Лемма 4 [1, теорема 2.8]. Пусть G – группа и H – ее подгруппа. Тогда факторгруппа $N_G(H)/C_G(H)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut } H$.

Лемма 5 [1, теорема 2.16]. **1.** Если H – группа простого порядка p , то группа всех автоморфизмов $\text{Aut } H$ циклическая порядка $p-1$.

2. Если H – циклическая группа, то группа $\text{Aut } H$ абелева.

Лемма 6 [7, лемма 12-13]. **1.** Если H – разрешимая A_4 -свободная подгруппа группы $GL(2, p)$, то H метабелева.

2. Если H – разрешимая A_4 -свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3, p)$, то $H \in \mathfrak{A}^4 \cap \mathfrak{A}^3$.

Кроме того, если $n \in \{2, 3\}$, $p > 3$ и $O_p(H) = 1$, то H – p' -группа.

Лемма 7 [8, лемма VI.6.9]. Пусть G – p -разрешимая группа. Тогда:

1. Если N – нормальная подгруппа группы G , то $l_p(G/N) \leq l_p(G)$;

2. Если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы группы G , то

$$l_p(G/N_1 \cap N_2) \leq \text{Max}\{l_p(G/N_1), l_p(G/N_2)\};$$

$$3. \quad l_p(G/\Phi(G)) = l_p(G).$$

Лемма 8. Если G – разрешимая группа и $F(G) = E_4 \neq G$, то $G \cong A_4$ или $G \cong S_4$.

Доказательство. Поскольку $F(G)$ – абелева подгруппа, то согласно теореме 4.22 [1] $C_G(F(G)) = F(G)$. Так как $\text{Aut}(F(G)) \cong GL(2,2) \cong S_3$, то либо $G/F(G) \cong Z_3$, либо $G/F(G) \cong S_3$. Если $G/F(G) \cong Z_3$, то $G \cong A_4$. Если $G/F(G) \cong S_3$, то $G \cong S_4$.

1. Доказательство теоремы

Применим индукцию по порядку подгруппы K . Покажем, что $K \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$. Пусть N – произвольная нормальная неединичная подгруппа группы G и M/N – максимальная подгруппа группы G/N , не содержащая нормальную подгруппу KN/N . Тогда очевидно, что M – максимальная подгруппа группы G , не содержащая подгруппу K . По условию теоремы индекс подгруппы M есть простое число, квадрат простого или куб простого числа. Так как $|G:M| = |G/K:M/K|$, то индекс максимальной подгруппы M/K в группе G/K есть простое число, квадрат простого или куб простого числа. Таким образом, условие теоремы наследуют все фактор-группы KN/N . Поэтому справедливо включение $KN/N \in \mathfrak{F}$.

Пусть N_1 и N_2 – минимальные нормальные подгруппы группы G . Тогда по индукции $K/K \cap N_1 \cong KN_1/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $K/K \cap N_2 \cong KN_2/N_2 \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} формация, то $K \cong K/K \cap N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$. Поэтому в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа.

Так как K – разрешимая подгруппа, то подгруппа Фраттини $\Phi(K)$ группы K является собственной подгруппой подгруппы Фиттинга $F = F(K)$ и $F = C_K(F)$. Так как F единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , то $\Phi(K) = 1$, F – элементарная абелева подгруппа и существует максимальная в группе G подгруппа M такая, что $G = [F]M$. Очевидно, что подгруппа M не содержит подгруппу F , а, значит, по условию имеет индекс в группе G равный простому числу, квадрату простого или кубу простого числа.

Предположим сначала, что индекс подгруппы M является простым числом, т.е. $|F| = |G:M| = p$. Тогда по лемме 4 и лемме 5 фактор-группа K/F является циклической группой, как группа автоморфизмов группы F простого порядка p . Ясно, что в этом случае справедливо включение $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $|F| = |G:M| = p^2$. Тогда по лемме 4 фактор-группа K/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе H группы $GL(2, p)$. В этом случае по лемме 6(1) подгруппа $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^2 \subset \mathfrak{F}$.

Осталось рассмотреть случай, когда $|F| = |G:M| = p^3$. По лемме 4 фактор-группа K/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе H группы $GL(3, p)$. Если K/F – неприводимая подгруппа, то по лемме 6(2) $K/F \in \mathfrak{U}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{U}^3$ и $K \in \mathfrak{F}$. Пусть K/F действует приводимо на F . Так как F – подгруппа Фиттинга группы K и $\Phi(K) = 1$, то F – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы K . Так как $|F| = p^3$, то возможны две ситуации: $F = F_1 \times F_2 \times F_3$ и $F = H_1 \times H_2$, где $|F_1| = |F_2| = |F_3| = |H_1| = p$, $|H_2| = p^2$. Если $F = F_1 \times F_2 \times F_3$, то по лемме 5 $K/C_K(F_i)$ –

циклическая группа и K/F абелева, как подгруппа группы $K/C_K(F_1) \times K/C_K(F_2) \times K/C_K(F_3)$. Поэтому $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{N} \subset \mathfrak{F}$. Если $F = H_1 \times H_2$, то по лемме 5 $K/C_K(H_1)$ – циклическая группа, а по лемме 6 (1) $K/C_K(H_2) \in \mathfrak{U}^2$. Теперь $K/F \in \mathfrak{U}^2$, как подгруппа группы $K/C_K(H_1) \times K/C_K(H_2)$. Поэтому $K \in \mathfrak{F}$.

Итак, в любом случае $K \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{N}^4$. По лемме 3 $K/\Phi(K) \in \mathfrak{U}^5$ и производная длина фактор-группы $K/\Phi(K)$ не превышает 5. Так как $K \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина K не превышает 4. Так как метанильпотентная группа имеет p -длину ≤ 1 , то p -длина подгруппы K не превышает 2.

2. Доказательство следствия 1

Применим индукцию по порядку подгруппы K . Покажем, что $K \square \mathfrak{N}\mathfrak{N}^2$.

Для случая, когда индекс максимальной подгруппы M , не содержащей K , является простым числом или квадратом простого числа, доказательство следствия 1 полностью повторяет доказательство теоремы.

Остается рассмотреть случаи, когда $|F| = |F(K)| = |G:M|$ равен либо 2^3 , либо 3^3 , либо 5^3 . Если $|F| = 2^3$ или $|F| = 3^3$, то по лемме 4 K/F изоморфна некоторой подгруппе либо полной линейной группы $GL(3,2)$, либо полной линейной группы $GL(3,3)$. Как в первом, так и во втором случае $K/F \in \mathfrak{U}^2$. Поэтому $K \square \mathfrak{N}\mathfrak{N}^2$.

Пусть $|F| = 5^3$. Тогда по лемме 4 фактор-группа K/F изоморфна некоторой подгруппе полной линейной группы $GL(3,5)$.

Если K/F – неприводимая подгруппа, то по лемме 2(3) $K/F \in \mathfrak{U}^2$ и $K \square \mathfrak{N}\mathfrak{N}^2$. Пусть K/F действует приводимо на F . Так как F – подгруппа Фиттинга группы K и $\Phi(K) = 1$, то F – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы K . Так как $|F| = 5^3$, то возможны две ситуации: $F = F_1 \times F_2 \times F_3$ и $F = H_1 \times H_2$, где $|F_1| = |F_2| = |F_3| = |H_1| = 5$, $|H_2| = 5^2$. Если $F = F_1 \times F_2 \times F_3$, то $K/C_K(F_i)$ – циклическая группа и K/F абелева, как подгруппа группы $K/C_K(F_1) \times K/C_K(F_2) \times K/C_K(F_3)$, поэтому $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}$. Если $F = H_1 \times H_2$, то по лемме 5 $K/C_K(H_1)$ – циклическая группа, а по лемме 6 (1) $K/C_K(H_2) \in \mathfrak{U}^2$. Теперь $K/F \in \mathfrak{U}^2$, как подгруппа группы $K/C_K(H_1) \times K/C_K(H_2)$. Поэтому $K \square \mathfrak{N}\mathfrak{N}^2$.

Итак, в любом случае $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}^2$. По лемме 3 $K/\Phi(K) \in \mathfrak{U}^3$. Тогда производная длина фактор-группы $K/\Phi(K)$ не превышает 3 и нильпотентная длина K не превышает 3.

Так как $K \in \mathfrak{N}^3$, то p -длина подгруппы K не превышает 2. Используя индукцию по порядку группы K , докажем, что p -длина не превышает 1 для всех простых $p \neq 3$.

Так как условие следствия наследуют все фактор-группы KN/N , то по лемме 7 можно считать, что $O_p(K) = \Phi(K) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Таким образом, подгруппа Фиттинга $F = F(K) = F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа порядка p^α , обладающая дополнением M в группе G , т. е. $G = [F]M$. Поскольку $|F| = |G:M|$ и M – максимальная подгруппа группы G , не содержащая подгруппу K , то $\alpha \leq 2$ при $p > 5$ или $\alpha \leq 3$ при $p = 2$ и $p = 5$. Так как $C_K(F) = F$, то $O_p(K/F) = 1$ и фактор-группа K/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(\alpha, p)$.

Если $|F| = p$, то по лемме 5 фактор-группа K/F является циклической группой порядка $p-1$ и p -длина группы K не превышает 1. Пусть $|F| = p^2$. Тогда для $p > 3$ по лемме 6 фактор-группа K/F является p' -группой, как группа изоморфная некоторой разрешимой подгруппе H группы $GL(2, p)$. В этом случае p -длина группы K не превышает 1.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 2^3$. Тогда K/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3, 2)$. Так как $O_2(K/F) = 1$, то из леммы 2(1) следует, что K/F – p' -группа и поэтому p -длина группы K не превышает 1.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 5^3$. Тогда K/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3, 5)$. Так как $O_5(K/F) = 1$, то из леммы 2(3) следует, что K/F – p' -группа и поэтому p -длина группы K не превышает 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа. – 2006. – 207 с.
2. Шеметков, Л.А. О конечных разрешимых группах / Л.А. Шеметков // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1968. – Т.32, №3. – С.533–559.
3. Поляков, Л.Я. О влиянии свойств максимальных подгрупп на разрешимость конечной группы / Л.Я. Поляков // Конечные группы: сб. – Минск, 1966. – С.89–97.
4. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 144 с.
5. Монахов, В.С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.
6. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука. – 1978. – 272 с.
7. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – Т. 52, № 5. – 2011. – С. 1123–1137.
8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.

S.A. Seraja, A.A. Trofimuk On A_4 -Free Normal Subgroups of Groups with Restrictions on Indexes of Some Maximal Subgroups

We study finite A_4 -free subgroup K of group G in which indexes of maximal subgroups that not contain K , are equal to prime numbers, squares of primes or cube of primes. In particular found that the nilpotent length of such groups does not exceed 4, the derived length of $K/\Phi(K)$ does not exceed 5, and p -length does not exceed 2 for all prime p . We construct examples showing the accuracy of the estimates. The proofs include fragments of the theory of formations and calculations in the system of computer algebra GAP