УДК 539.12

***Антон Васильевич Бурый*[1]*, Алина Валентиновна Ивашкевич*[2]**
[1]аспирант 3-го года обучения центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
[2]мл. науч. сотрудник центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики Института физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
***Anton Bury*[1]*, Alina Ivashkevich*[2]**
[1]3-d Year Postgraduate Student of the Center for Fundamental Interactions and Astrophysics of the B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus
[2]Junior Researcher of the Center for Fundamental Interactions and Astrophysics of the B. I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: anton.buryy.97@mail.ru[1]; ivashkevich.alina@yandex.by[2]

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 2 В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследуется нерелятивистское уравнение для частицы со спином 2 в присутствии внешнего однородного магнитного поля. Выведенное ранее из 39-компонентного матричного уравнения Федорова нерелятивистское уравнение напоминает уравнение для нерелятивистской частицы со спином 1/2, но при этом волновая функция имеет пять компонент вместо двух, и матрица третьей проекции спина не диагональная. Над волновой функцией совершается линейное преобразование, такое что матрица третьей проекции спина становится диагональной $S_3 = diag(-1,-2,0,+1,+2)$. В результате обобщенное уравнение паулиевского типа сводится к пяти независимым уравнениям с однотипной структурой; их решения строятся в терминах вырожденных гипергеометрических функций и приводят к пяти сериям энергетических уравнений осцилляторного типа с различающимися частотами.

Ключевые слова: *частица со спином 2, нерелятивистское приближение, однородное магнитное поле, точные решения, спектры энергии.*

Nonrelativistic Spin 2 Particle in Magnetic Field

In the paper, we study the nonrelativistic equation for spin 2 particle in presence of external uniform magnetic field. The recently derived nonrelativistic equation for such a particle is similar to the Pauli equation, but the relevant wave functions consists of 5 components, ant the all three spin matrices are not diagonal. We perform the needed linear transformation over the wave function, so that in the new basis the third projection becomes diagonal, $S_3 = diag(-1,-2,0,+1,+2)$. In this way, the problem in the external uniform magnetic field reduces to 5 independent independent Scrödinger-like equation equations with the same mathematical structure. Their solutions are constructed in terms of the confluent hypergeometric functions, and 5 series of energy levels are found, they look as oscillator spectra with different frequencies.

Key words: *spin 2 particle, no onrelativistic approximation, uniform magnetic field, exact solutions, energy spectra.*

Введение

Задача о частице в магнитном поле является классической для квантовой механики. Первыми были решены уравнение Шредингера и релятивистское уравнение Дирака [1–3]. Значительно позже были найдены решения релятивистского уравнения Даффина – Кеммма для частицы со спином 1, в т. ч. и при наличии у векторной частицы дополнительных характеристик: поляризуемости, аномального магнитного и электрического квадрупольного моментов, кроме того, при учете геометрии трехмерных пространств постоянной кривизны [4–13]. В настоящей работе мы обращаемся к исследованию в магнитном поле уравнения для частицы со спином 2. Исходным является введенное Ф. И. Федоровым [14] матричное 39-компонентное уравнение 1-го порядка [15–19]. В частности, в [19] были найдены решения этого уравнения во внешнем однородном магнитном поле; анализ оказался достаточно сложным, в частности релятивистские спектры энергии получаются, как корни алгебраического уравнения 7-го порядка, пять корней которого дают физически интерпретируемые спектры энергий.

К сожалению, их анализ возможен только численными методами. В работе [20] из 39-компонентного матричного уравнения Федорова было выведено нерелятивистское уравнение, которое напоминает уравнение для нерелятивистской частицы со спином 1/2, но при этом волновая функция имеет пять компонент. В настоящей работе построены решения этой более простой системы уравнений с учетом внешнего магнитного поля.

В работе [20] было выведено нерелятивистское уравнение для частицы со спином 2:

$$iD_0\Psi = -\frac{1}{2M}(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2)\Psi - \frac{ie}{2M}(F_{23}S_1 + F_{31}S_2 + F_{12}S_3)\Psi; \qquad (1)$$

волновая функция имеет пять компонент, явный вид спиновых матриц следующий:

$$\Psi = \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{vmatrix}, S_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}, S_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}, S_3 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

символ D_a обозначает $D_a = \partial_a + ieA_a, a = 0,1,2,3$. Для спиновых матриц выполняются коммутационные соотношения

$$S_1S_2 - S_2S_1 = S_3, \quad S_2S_3 - S_3S_2 = S_1, \quad S_3S_1 - S_1S_3 = S_2. \qquad (2)$$

1. Диагонализация матрицы проекции спина S_3

Для анализа уравнения в присутствии магнитного поля матрицу третьей проекции спина S_3 удобно иметь диагональной.

Для этого над волновой функций необходимо совершить линейное преобразование

$$S_3\Psi = \bar{\Psi}, \quad \Psi' = U\Psi, \quad \bar{\Psi}' = U\bar{\Psi}, \quad US_3U^{-1}\Psi = \bar{\Psi}',$$

которое диагонализирует матрицу S_3:

$$US_3U^{-1} = \Lambda \quad \Rightarrow \quad US_3 = \Lambda U, \quad \Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

С учетом обозначений

$$U = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{vmatrix}, \quad S_3 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

для элементов матрицы U находим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&2x_{12} = \lambda_1 x_{11}, -2x_{11} = \lambda_1 x_{12}, x_{14} = \lambda_1 x_{13}, -x_{13} = \lambda_1 x_{14}, -x_{11} = \lambda_1 x_{15},\\
&2x_{22} = \lambda_2 x_{21}, -2x_{21} = \lambda_2 x_{22}, x_{24} = \lambda_2 x_{23}, -x_{23} = \lambda_2 x_{24}, -x_{21} = \lambda_2 x_{25},\\
&2x_{32} = \lambda_3 x_{31}, -2x_{31} = \lambda_3 x_{32}, x_{34} = \lambda_3 x_{33}, -x_{33} = \lambda_3 x_{34}, -x_{31} = \lambda_3 x_{35},\\
&2x_{42} = \lambda_4 x_{41}, -2x_{41} = \lambda_4 x_{42}, x_{44} = \lambda_4 x_{43}, -x_{43} = \lambda_4 x_{44}, -x_{41} = \lambda_4 x_{45},\\
&2x_{52} = \lambda_5 x_{51}, -2x_{51} = \lambda_5 x_{52}, x_{54} = \lambda_5 x_{53}, -x_{53} = \lambda_5 x_{54}, -x_{51} = \lambda_5 x_{55}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь имеем 5 одинаковых подсистем для элементов каждой строки; при этом нужно помнить о том, что строки должны быть линейно независимы (ниже символ строки $a = 1,2,3,4,5$ опускаем).

Перепишем основную систему

$$2x_2 - \lambda x_1 = 0, -2x_1 - \lambda x_2 = 0, x_4 - \lambda x_3 = 0, -x_3 - \lambda x_4 = 0, -x_1 - \lambda x_5 = 0 \tag{5}$$

в матричной форме

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & . & . & . \\ -2 & -\lambda & . & . & . \\ . & . & -\lambda & 1 & . \\ . & . & -1 & -\lambda & . \\ -1 & . & . & . & -\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Приравниваем определитель матрицы к нулю $\lambda(\lambda^2+1)(\lambda^2+4) = 0$; т. е. корни такие:

$$\lambda_1 = -2i, \quad \lambda_2 = -i, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = +i, \quad \lambda_5 = +2i. \tag{7}$$

При $\lambda_1 = -2i$ имеем уравнения (она описывают элементы первой строки)

$$2x_2 + 2ix_1 = 0, -2x_1 + 2ix_2 = 0, x_4 + 2ix_3 = 0, -x_3 + 2ix_4 = 0, -x_1 + 2ix_5 = 0;$$

их общее решение следующее

$$\lambda_1 = -2i, \quad x_2 = -ix_1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = -\frac{i}{2}x_1;$$

пусть $x_1 = +2i$, тогда 1-я строка состоит из элементов

$$\underline{\lambda_1 = -2i}, \quad x_1 = +2i, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1. \tag{8}$$

Рассматриваем вторую строку, при $\lambda_2 = -i$ система принимает вид

$$2x_2 + ix_1 = 0, -2x_1 + ix_2 = 0, x_4 + ix_3 = 0, -x_3 + ix_4 = 0, -x_1 + ix_5 = 0;$$

ее решение такое:

$$\lambda_2 = -i, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_4 = -ix_3, \quad x_5 = 0;$$

пусть $x_3 = i$, тогда 2-я строка состоит из элементов

$$\underline{\lambda_2 = -i}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = i, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим случай нулевого корня $\lambda_3 = 0$:

$$2x_2 - 0 \cdot x_1 = 0, - 2x_1 - 0 \cdot x_2 = 0, x_4 - 0 \cdot x_3 = 0, - x_3 - 0 \cdot x_4 = 0, - x_1 - 0 \cdot x_5 = 0;$$

т. е. $x_5 = 1$, тогда 3-я строка состоит из элементов

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1. \tag{10}$$

При $\lambda_4 = +i$ система принимает вид

$$2x_2 - ix_1 = 0, - 2x_1 - ix_2 = 0, x_4 - ix_3 = 0, - x_3 - ix_4 = 0, - x_1 - ix_5 = 0,$$

ее решение такое:

$$\lambda_4 = +i, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_4 = ix_3, \quad x_5 = 0;$$

пусть $x_3 = -i$, тогда 4-я строка состоит из элементов

$$\underline{\lambda_4 = +i}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -i, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 0. \tag{11}$$

При $\lambda_5 = +2i$ имеем уравнения

$$2x_2 - 2ix_1 = 0, - 2x_1 - 2ix_2 = 0, x_4 - 2ix_3 = 0, - x_3 - 2ix_4 = 0, - x_1 - 2ix_5 = 0,$$

их решение такое:

$$\lambda_5 = +2i, \quad x_2 = ix_1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = \frac{i}{2} x_1;$$

пусть $x_1 = -2i$, тогда 5-я строка состоит из элементов

$$\underline{\lambda_5 = +2i}, \quad x_1 = -2i, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1; \tag{12}$$

Таким образом, найдена следующая матрица преобразования:

$$\Psi' = U\Psi, \quad U = \begin{vmatrix} 2i & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 1 & 0 \\ -2i & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{vmatrix} -i/4 & 0 & 0 & 0 & i/4 \\ 1/4 & 0 & -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & -i/2 & 0 & i/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \tag{13}$$

убеждаемся, что выполняется необходимое равенство

$$US_3U^{-1} = \begin{vmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2i \end{vmatrix} = S_3'; \tag{14}$$

мнимую единицу на диагонали можно убрать, умножив спиновые матрицы на i.

2. Разделение переменных

Известно представление для векторного потенциала однородного магнитного поля:

$$A = \frac{1}{2} B \times r, \quad B = (0,0,B), \quad F_{12} = B, F_{23} = 0, F_{31} = 0;$$

отсюда после пересчета к цилиндрическим координатам получаем

$$A_t = 0, \quad A_r = 0, \quad A_x = 0, \quad A_\phi = -\frac{Br^2}{2}. \tag{15}$$

Исходное уравнение в случае такого поля упрощается (переходим к обычным единицам измерения; используем базис Ψ', в котором матрица S_3' диагональная; ниже дополнительный символ штриха опускаем)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2M} [\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial}{\partial \phi} + i\frac{e}{\hbar c} A_\phi)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}]\Psi - \frac{e\hbar}{2M} B S_3' \Psi, \tag{16}$$

где

$$S_3 = \begin{vmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2i \end{vmatrix}, \quad A_\phi = -\frac{Br^2}{2}.$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2M} [\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial}{\partial \phi} - i\frac{eB}{\hbar c}\frac{r^2}{2})^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}]\Psi + \frac{e\hbar B}{2M} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +2 \end{vmatrix} \Psi.$$

Введем обозначения:

$$\frac{eB}{\hbar c} = b, \quad \frac{e\hbar}{2M} B = \mu_0,$$

тогда предыдущее уравнение записывается короче:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2M} [\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial}{\partial \phi} - i\frac{br^2}{2})^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}]\Psi + \mu_0 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +2 \end{vmatrix} \Psi. \tag{17}$$

Поскольку матрица смешивания в уравнении (17) диагональна, то отдельные компоненты волновой функции $\Psi'_\alpha, \alpha = 1,...,5$ будут подчиняться независимым уравнениям с одинаковой структурой:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_\alpha = -\frac{\hbar^2}{2M}[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial}{\partial\phi}-i\frac{br^2}{2})^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}]\Psi_\alpha+\mu_\alpha\Psi_\alpha, \qquad (18)$$

где $\mu_\alpha=\mu_0\lambda_\alpha, \lambda_\alpha=-2,-1,0,+1,+2.$

Достаточно решить уравнение для одного случая (дальше индекс α опускаем):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2M}[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial}{\partial\phi}-i\frac{br^2}{2})^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}]\Psi+\mu\Psi. \qquad (19)$$

Решения уравнения (19) ищем в виде $\Psi = e^{-i\frac{mt}{\hbar}}e^{im\phi}e^{ikz}f(r),$ при этом из (19) получаем

$$mf = -\frac{\hbar^2}{2M}[\frac{d^2}{dr^2}f+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}f-\frac{1}{r^2}(m-\frac{br^2}{2})^2f-k^2f]+\mu f. \qquad (20)$$

С использованием обозначения $\frac{2M(m-\mu)}{\hbar^2}=E$ уравнение записывается так:

$$[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}(m-\frac{br^2}{2})^2+E-k^2]f=0. \qquad (21)$$

Перейдем к новой переменной:

$$\frac{br^2}{2}=x, \quad r=\sqrt{\frac{2x}{b}}, \quad \frac{d}{dr}=\sqrt{2bx}\frac{d}{dx}, \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}=b\frac{d}{dx}, \qquad \frac{d^2}{dr^2}=2bx\frac{d^2}{dx^2}+b\frac{d}{dx}$$

тогда получаем

$$[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}-\frac{1}{4x^2}(m-x)^2+\frac{1}{2bx}(E-k^2)]f=0. \qquad (22)$$

Исследуем поведение решений около точки $x=0$:

$$[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}-\frac{m^2}{4x^2}]f\approx 0, \quad f: \ x^A, \quad A^2-\frac{m^2}{4}\approx 0 \ \Rightarrow \ A=\pm\frac{|m|}{2};$$

для описания связанных состояний пригодно только решение $A=\frac{|m|}{2}$.

Исследуем поведение решений на бесконечности

$$[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}-\frac{1}{4}]f\approx 0, \quad f: \ e^{Bx}, \quad B^2-\frac{1}{4}\approx 0 \ \Rightarrow \ B=\pm\frac{1}{2}; \qquad (23)$$

для описаний конечных на бесконечности решений нужно использовать значение $B=-1/2$. Получим решение во всей области переменной x. Исходим из подстановки $f(x)=x^Ae^{Bx}F(x)$:

$$F''(x)+(\frac{2A+1}{x}+2B)F'(x)+$$
$$+\left((A^2-\frac{m^2}{4})\frac{1}{x^2}+(2AB+\frac{E-k^2}{2b}+B+\frac{m}{2})\frac{1}{x}+B^2-\frac{1}{4}\right)F(x)=0.$$

Накладываем ограничения $A^2 - \dfrac{m^2}{4} = 0, \quad B^2 - \dfrac{1}{4} = 0$; они совпадают с найденными ранее при получении асимптотик. С учетом этих ограничений уравнение упрощается (умножаем его на x; полагаем $B = -1/2, A = +|m|/2$)

$$xF''(x) + (|m|+1-x)F'(x) - \left(-\frac{m-1-|m|}{2} - \frac{E-k^2}{2b}\right)F(x) = 0. \tag{24}$$

По структуре оно совпадает с уравнением вырожденного гипергеометрического типа:

$$\begin{gathered} x\frac{d^2}{dx^2}F(x) + (c-x)\frac{d}{dx}F(x) - aF(x) = 0, \\ c = |m|+1, \quad a = -\frac{m-1-|m|}{2} - \frac{E-k^2}{2b}. \end{gathered} \tag{25}$$

Условие полиномиальности решений $a = -n, n = 0,1,2,3,...$ дает уравнение

$$\frac{|m|-m+1}{2} - \frac{E-k^2}{2b} = -n \quad \Rightarrow \quad E - k^2 = 2b(n + \frac{|m|-m+1}{2}). \tag{26}$$

Учтем выражения для используемых параметров параметров:

$$E = \frac{2M\epsilon}{\hbar^2} - \frac{2M\mu_i}{\hbar^2}, \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2M}B, \quad b = \frac{eB}{\hbar c};$$

тогда из (26) получаем формуле для пяти серий энергетических уровней:

$$\epsilon - \frac{p^2}{2M} = \frac{e\hbar B}{Mc}(n + \frac{|m|-m+1}{2}) + \mu_i, \quad \mu_i = \{-2, -1, 0, 1, 2\}\frac{e\hbar}{2M}B. \tag{27}$$

Заключение

Выведенное ранее из 39-компонентного уравнения Федорова нерелятивистское уравнение в присутствии внешнего однородного магнитного поля напоминает уравнение для нерелятивистской частицы со спином 1/2, но волновая функция имеет пять компонент вместо двух, и матрица третьей проекция спина не диагональная.

Над волновой функцией совершается такое линейное преобразование, чтобы матрица третьей проекции спина стала диагональной $S_3 = diag(-1, -2, 0, +1, +2)$. В результате обобщенное уравнение паулиевского типа сводится к пяти независимым уравнениям с однотипной структурой; их решения строятся в терминах вырожденных гипергеометрических функций и приводят к пяти сериям энергетических уравнений осцилляторного типа с различающимися частотами ω.

Возможным обобщением этой системы является уравнение для частицы со спином 2, обладающей аномальным магнитным моментом [19]; релятивистское уравнение для такой частицы в формализме уравнений 1-го порядка включает 50 уравнений, и получение нерелятивистского приближения является непростой задачей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Rabi, I. I. Das freie Electron in Homogenen Magnetfeld nach der Diraschen Theorie / I. I. Rabi // Z. Phys. – 1928. – Vol. 49. – P. 507–511.

2. Landau, L. Diamagnetismus der Metalle / L. Landau // Ztshr. Phys. – 1930. – Vol. 64. – P. 629–637.

3. Plesset, M. S. Relativistic wave mechanics of the electron deflected by magnetic field / M. S. Plesset // Phys. Rev. – 1931. – Vol. 12. – P. 1728–1731.

4. Bogush, A. A. Schrödinger particle in magnetic and electric fields in Lobachevsky and Riemann spaces / A. A. Bogush, V. M. Red'kov, G. G. Krylov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2008. – Vol. 11, № 4. – P. 403–421.

5. Богущ, А. А. Квантовомеханическая частица в однородном магнитном поле на фоне пространства Лобачевского / А. А. Богущ, В. М. Редьков, Г. Г. Крылов // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 2. – С. 45–51.

6. Богущ, А. А. Квантовомеханическая частица в однородном магнитном поле в сферическом пространстве S_3 / А. А. Богуш, В. М. Редьков, Г. Г. Крылов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 2009. – № 2. – С. 57–63.

7. Кисель, В. В. О решениях уравнения Даффина – Кеммера для частицы со спином 1 в однородном магнитном поле / В. В. Кисель, Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков // Докл. НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 4. – С. 64–71.

8. Овсиюк, Е. М. О дираковской частице в однородном магнитном поле в пространстве Римана / Е. М. Овсиюк, В. В. Кисель, В. М. Редьков // Вес. Нац.акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 95–101.

9. Ovsiyuk, E. M. On a Dirac particle in an uniform magnetic field in 3-dimensional spaces of constant negative curvature curvature / E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov // NPCS. – 2012. – Vol. 15, nr 1. – P. 41–55.

10. Квантовая механика векторной частицы в магнитном поле на четырехмерной сфере / В. В. Кисель [и др.] // Науч.-техн. вед. СПбГПУ. Сер.: Физ.-мат. науки. Теорет. физика. – 2012. – № 1 (141). – С. 128–137.

11. Квантовая механика частицы со спином 1 и аномальным магнитным моментом в магнитном поле / В. В. Кисель [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 5. – С. 83–90.

12. Квантовая механика частицы со спином 1 и квадрупольным моментом во внешнем однородном магнитном поле / В. В. Кисель [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 18–27.

13. Квантовая механика частиц со спином во внешнем магнитном поле / Е. М. Овсиюк [и др.]. – Минск : Беларус. навука, 2017. – 515 с.

14. Федоров, Ф. И. К теории частицы со спином 2 / Ф. И. Федоров // Учен. зап. БГУ. Сер. физ.-мат. – 1951. – № 12. – С. 156–173.

15. Нерелятивистский предел в теории частицы со спином 2 / Е. М. Кисель [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 3. – С. 21–27.

16. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time, tetrad method / A. Ivashkevich [et al.] // Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2021. – Vol. 28. – P. 45–66.

17. Ивашкевич, А. В. Уравнение Федорова для поля со спином 2, учет псевдоримановой структуры пространства-времени / А. В. Ивашкевич, А. В. Бурый, В. М. Редьков // Вестн. Фонда фундам. исслед. – 2022. – № 4. – С. 48–60.

18. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time. II. Separating the variables in spherical coordinates / A. Ivashkevich [et al.] // Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2022. – Vol. 29. – P. 12–33.

19. Ivashkevich, A. V. Spin 2 particle, cylindric symmetry, projective operator method, external magnetic field / A. V. Ivashkevich [et al.] // Нелинейная динамика и приложения : Тр. XXVIII Междунар. семинара, Минск, 21–24 июня 2022 г. / редкол.: В. А. Шапоров

[и др.] ; под ред. В. А. Шапорова, А. Г. Трифонова. – Минск : Право и экономика, 2022. – С. 302–341.

20. Нерелятивистское приближение в 39-компонентной теории для частицы со спином 2 / А. В. Ивашкевич [и др.] // Изв. Коми науч. центра Урал. отд. Рос. акад. наук. Сер. «Физ.-мат. науки». – 2024 (в печати).

REFERENCES

1. Rabi, I. I. Das freie Electron in Homogenen Magnetfeld nach der Diraschen Theorie / I. I. Rabi // Z. Phys. – 1928.– Vol. 49. – P. 507–511.

2. Landau, L. Diamagnetismus der Metalle / L. Landau // Ztshr. Phys. – 1930. – Vol. 64. – P. 629–637.

3. Plesset, M. S. Relativistic wave mechanics of the electron deflected by magnetic field / M. S. Plesset // Phys. Rev. – 1931. – Vol. 12. – P. 1728–1731.

4. Bogush, A. A. Schrödinger particle in magnetic and electric fields in Lobachevsky and Riemann spaces / A. A. Bogush, V. M. Red'kov, G. G. Krylov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2008. – Vol. 11, № 4. – P. 403–421.

5. Bogush, A. A. Kvantovomiekhanichieskaja chastica v odnorodnom magnitnom polie na fonie prostranstva Lobachievskogo / A. A. Bogush, V. M. Ried'kov, G. G. Krylov // Dokl. NAN Bielarusi. – 2009. – T. 53, № 2. – C. 45–51.

6. Bogush, A. A. Kvantovomiekhanichieskaja chastica v odnorodnom magnitnom polie v sfierichieskom prostranstvie S_3 / A. A. Bogush, V. M. Ried'kov, G. G. Krylov // Vies. Nac. akad. navuk Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2009. – № 2. – S. 57–63.

7. Kisiel', V. V. O rieshenijakh uravnienija Daffina – Kiemmiera dlia chasticy so spinom 1 v odnorodnom magnitnom polie / V. V. Kisiel', Ye. M. Ovsijuk, V. M. Red'kov // Dokl. NAN Bielarusi. – 2010. – T. 54, № 4. – S. 64–71.

8. Ovsijuk, Ye. M. O dirakovskoj chastice v odnorodnom magnitnom polie v prostranstvie Rimana / Ye. M. Ovsijuk, V. V. Kisiel', V. M. Red'kov // Vies. Nac. akad. navuk Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2010. – № 4. – S. 95–101.

9. Ovsiyuk, E. M. On a Dirac particle in an uniform magnetic field in 3-dimensional spaces of constant negative curvature curvature / E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov // NPCS. – 2012. – Vol. 15, nr 1. – P. 41–55.

10. Kvantovaja miekhanika viektornoj chasticy v magnitnom polie na chietyriokhmiernoj sfierie / V. V. Kisiel' [i dr.] // Nauch.-tiekhn. vied. SPbGPU. Sier.: Fiz.-mat. nauki. Tieoriet. fizika. – 2012. – № 1 (141). – S. 128–137.

11. Kvantovaja miekhanika chasticy so spinom 1 i anomal'nym magnitnym momientom v magnitnom polie / V. V. Kisiel' [i dr.] // Dokl. NAN Bielarusi. – 2016. – T. 60, № 5. – C. 83–90.

12. Kvantovaja miekhanika chasticy so spinom 1 i kvadrupol'nym momientom vo vnieshniem odnorodnom magnitnom polie / V. V. Kisiel' [i dr.] // Probliemy fiziki, matiematiki i tiekhniki. – 2017. – № 3 (32). – S. 18–27.

13. Kvantovaja miekhanika chastic so spinom vo vnieshniem magnitnom polie / Ye. M. Ovsijuk [i dr.]. – Minsk : Bielarus. navuka, 2017. – 515 s.

14. Fiodorov, F. I. K tieorii chasticy so spinom 2 / F. I. Fiodorov // Uchion. zap. BGU. Sier. fiz.-mat. – 1951. – № 12. – S. 156–173.

15. Nierieliativistskij priediel v tieorii chasticy so spinom 2 / Ye. M. Kisiel' [i dr.] // Dokl. NAN Bielarusi.– 2015. – T. 59, № 3. – S. 21–27.

16. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time, tetrad method / A. Ivashkevich [et al.] // Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2021. – Vol. 28. – P. 45–66.

17. Ivashkievich, A. V. Uravnienije Fiodorova dlia polia so spinom 2, uchiot psievdo-rimanovoj struktury prostranstva-vriemieni / A. V. Ivashkievich, A. V. Buryj, V. M. Ried'kov // Viestn. Fonda fundam. isslied. – 2022. – № 4. – S. 48–60.

18. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time. II. Separating the variables in spherical coordinates / A. Ivashkevich [et al.] // Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2022. – Vol. 29. – P. 12–33.

19. Ivashkevich, A. V. Spin 2 particle, cylindric symmetry, projective operator method, external magnetic field / A. V. Ivashkevich [et al.] // Nieliniejnaja dinamika i prilozhenija : Tr. XXVIII Miezhdunar. sieminara, Minsk, 21–24 ijunia 2022 g. / riedkol.: V. A. Shaporov [i dr.] ; pod ried. V. A. Shaporova, A. G. Trifonova. – Minsk : Pravo i ekonomika, 2022. – S. 302–341.

20. Nierieliativistskoje priblizhenije v 39-komponientnoj tieorii dlia chasticy so spinom 2 / A. V. Ivashkievich [i dr.] // Izv. Komi nauch. centra Ural. otd. Ros. akad. nauk. Sier. «Fiz.-mat. nauki». – 2024 (v piechati).

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 28.02.2024