УДК 517.925

И.Г. Кожух

СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА С ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Дается определение динамической системы с ограниченными решениями, исследуется поведение траекторий одной ограниченной системы Льенара и ограниченной квадратичной системы с инвариантной прямой. Доказаны теоремы о возможных состояниях равновесия рассматриваемой системы, а также об условиях существования предельных циклов, их кратности и расположения на фазовой плоскости.

Рассмотрим динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \frac{dy}{dt} = Q(x,y), \tag{1}$$

где $P(x,y), Q(x,y)$ – аналитические функции, определенные в некоторой области действительной плоскости R^2.

Будем называть систему (1) ограниченной, если все ее траектории при $t > 0$ являются ограниченными. Множество таких систем включает в себя в качестве правильного подмножества диссипативные системы, т.е. такие системы, единственными стационарными состояниями которых могут быть состояния покоя и для которых выполняется условие $\Phi\dot{q} \le 0$, где Φ есть линейная функция скорости $\Phi = -b\dot{q}$. Отметим также, что периодические движение в диссипативных системах невозможны, т.к. энергия при движении системы всегда убывает.

Из ограниченности системы следует, в отдельных случаях, существование предельного цикла, например, для уравнения Ван-дер-Поля и Релея[1], или его единственность [5]. В ряде случаев существенной является и ограниченность системы в некоторой конечной области, в частности, при выяснении характера резонансного движения спутников планет.

В настоящей статье исследуется поведение траекторий ограниченной системы Льенара и ограниченной квадратичной системы с инвариантной прямой

$$\dot{x} = y - f(x), \dot{y} = g(x), \tag{2}$$

где $f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k x^k$, $g(x) = x + \sum_{k=1}^{n} g_k x^k$, и f_k, q_k – действительные числа, $f_n \ne 0$.

Очевидно [1], что система (1) будет ограниченной, если для нее бесконечность неустойчива или при больших значениях величины $x^2 + y^2$ все ее траектории замкнуты. Если же на экваторе сферы Пуанкаре у ограниченной системы имеются состояния равновесия, то к ним не могут стремиться полутраектории при $t \to +\infty$. Например, у таких систем в бесконечности не может быть состояний равновесия с эллиптической областью и т.п.

<u>Лемма 1.</u> Система (2) является ограниченной тогда и только тогда, когда n – нечетное число, $f_n > 0$, а особенности на концах оси Oy не имеют полутраекторий, стремящихся к ним при $t \to +\infty$.

Доказательство. Замена $x = \frac{1}{z}, y = \frac{u}{z}, dt = z^{n-1} d\tau$ приводит к системе

$$\begin{cases} x'_\tau = f_n z + f_{n-1} z^2 + \ldots + f_1 z^n - z^n u, \\ u'_\tau = f_n u - g_n + f_{n-1} uz + \ldots + f_1 z^{n-1} u - z^{n-1} u^2 - q_{n-1} z - \ldots - q_2 z^{n-2} - z^{n-1}. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное состояние равновесия в точке $z=0, u=\frac{q_n}{f_n}$ типа простого узла. Отсутствие траекторий, стремящихся к этой особенности при $t \to +\infty$, возможно лишь при четном $n-1$ и $f_n>0$. При этом учитываем, что ограниченные системы могут обладать узлом в бесконечности только в том случае, если замена $dt = z^{n-1} d\tau$ такова, что число $n-1$ – четное. Поэтому, как показано в [3], ограниченные квадратичные системы имеют в бесконечности единственное состояние равновесия типа седло-узла. Другая особенность этой системы в бесконечности находится на концах оси ординат. Ее исследованием завершается доказательство леммы.

Отметим также, что при $\sum_{k=2}^{n} g_k^2 = 0$ для ограниченной системы (2) концы оси Oy являются сёдлами. В одном частном случае достаточные условия диссипативности для уравнения Льенара найдены в [4].

Теорема 1. Ограниченная система (2) с простыми состояниями равновесия в конечной части плоскости при $n=3$ не имеет центров.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что система (2) имеет в конечной части плоскости либо единственное состояние равновесия в точке $O(0,0)$, либо три в точках $O, S\left(\frac{1}{g_3 x_0}, y_2\right)$ и $N(x_0, y_3)$. При доказательстве достаточно рассмотреть для определенности точку O (0,0).

Пусть эта точка является центром. Тогда из равенства нулю двух первых ляпуновских величин следует, что $3f_3 = 2f_2 g_2$, $f_2 g_2 g_3 = 0$. Если $f_2 = 0$ или $g_2 = 0$, то $f_3 = 0$, а, значит, согласно лемме 1 система является неограниченной. Если же $g_3 = 0$, $g_2 \neq 0$, то в конечной части плоскости эта система имеет два простых состояния равновесия, одно из которых – седло. Согласно теореме Пуанкаре и доказанной выше лемме 1 заключаем, что и в этом случае система (2) является неограниченной. Теорема доказана.

Предельные циклы ограниченной системы (2), если они существуют, при $n=3$ могут охватывать либо одно из состояний равновесия в точках O или N, либо все три состояния равновесия в точках O, S и N. При $3 f_1 f_3 > f_2^2$ предельные циклы и петли сепаратрисы седла отсутствуют согласно критерию Дюлака.

Если система (2) при $n=3$ имеет в конечной части плоскости единственную особенность в точке O, то у нее существует хотя бы один предельный цикл, например, при $f_1 < 0$. В случае $g_2 = g_3 = 0$ этот цикл – единственный [3]. При $f_1 = 0$, $g_2^2 + g_3^2 > 0$, $2 f_2 g_2 > 3 f_3$ начало координат есть неустойчивый фокус первой степени негрубости. Следовательно, существует хотя бы один предельный цикл, окружающий точкуO, а общее число предельных циклов, с учетом их кратности, при этом нечетно. При переходе $f_1 = 0$ к $f_1 > 0$ указанный выше фокус переходит в грубый устойчивый, из которого рождается грубый предельный цикл. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Существуют ограниченные системы (2) с единственным состоянием равновесия в конечной части плоскости при $n=3$, имеющие по крайней мере два предельных цикла с учетом их кратности. Общее число предельных циклов при этом четное.

Рассмотрим теперь квадратичную систему с инвариантной прямой, которую, не теряя общности, можно считать заданной уравнением $x=0$. Предельные циклы могут существовать только тогда, когда она приводится к виду

$$\dot{x} = xy,\ \dot{y} = \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij} x^i y^j, \tag{3}$$

где, a_{ij} – действительные числа. Опуская различные вырожденные случаи, будем полагать, что система (3) имеет единственную особенность в бесконечности.

Пусть
$$a_{01}a_{11} \neq 0 \tag{4}$$
т. к. в противном случае, согласно критерию Дюлака, эта система не имеет предельных циклов.

Аналогично лемме 1 доказывается лемма 2.

Лемма 2. Для ограниченности системы (3) с единственной особенностью в бесконечности необходимо и достаточно выполнения условий

$$a_{02} = 0,\ a_{01} < 0,\ 4a_{20} < -1. \tag{5}$$

Учитывая, что $a_{01} < 0,\ a_{11} \neq 0$, с помощью невырожденного преобразования систему (3) можно привести к случаю, когда

$$a_{01} = -1,\ a_{11} = 1. \tag{6}$$

При выполнении условий (5) и (6) преобразованная система имеет на оси Oy единственное состояние равновесия, которое является простым устойчивым узлом при $a_{00} < 0$ и простым седлом при $a_{00} > 0$, причем ω-сепаратрисы этого седла лежат на прямой $x = 0$, а по одной α-сепаратрисе находятся в плоскостях $x < 0$ и $x > 0$. Согласно критерию Дюлака эта система в полуплоскости $x < 0$ не имеет предельных циклов.

Теорема 3.Пусть выполнены условия (5) и (6). Тогда при $a_{00} > 0$ существуют системы вида (3), фокус которых окружен нечетнократным предельным циклом, а при $a_{00} < 0$ существуют системы вида (3) с петлей сепаратрисы седла.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 2.

Замечание. Состояние равновесия системы (3), удовлетворяющее условиям (5) и (6) с парой чисто мнимых корней характеристического уравнения может быть только фокусом первой степени негрубости. В частности, такая система не имеет центров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости // Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтовии. – Наука, 1976. – 496 с.
2. Dickson, R.J. Bounded quadratic systems in the planet / R.J. Dickson, Z.M Perko // Journ of Differential Equations – 1970. – Vol. 7, № 2. – P. 251–273.
3. Lins, A. On Lienard's equation / A. Lins, W. Mels, C.C. Pugh // Lect. Notes Math. – 1977. – Vol. 597 – P. 335–357.
4. Kroopnick, A.J. Note on bounded L^P solutions of generalized Lienard equation / A.J. Kroopnick // Pacific Journ of Mathematica. – 1981. – Vol. 94, №1. –P. 171–175.
5. Столяров, В.В. Об исследовании одной динамической системы / В.В. Столяров // Сб. «Управление, надежность, навигация». – Саранск, 1981.– С. 56–59.
6. Кожух, И.Г. Качественное исследование одного класса динамических систем на плоскости: / дисс. … канд. физ.-мат. наук. / И.Г. Кожух. – Минск, 1981. – С.118.

***I.G. Kozhuk* Lienard System with Limited Solutions**

The behavior of the trajectory of the Lienard limited and restricted quadratic system with an invariant line is studied. The theorems on the possible equilibrium states of the systems as well as the existence of multiplicity of limited cycles are proved.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 11.03.14