УДК 517.977

Д.А. Будько

ТЕОРЕМА О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В ОБЛАСТИ ТРЕУГОЛЬНИКА ЛАГРАНЖА ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТЫРЁХ ТЕЛ

Рассматривается ограниченная круговая задача четырёх тел, сформулированная на основе треугольных решений Лагранжа. Обсуждаются вопросы устойчивости решений задачи типа положений равновесия, располагающихся в области треугольника Лагранжа. Предлагается простое доказательство неустойчивости таких решений для любых значений параметров на основе символьных преобразований, которое не использует численных расчётов. Проводится анализ квадратичной части функции Гамильтона, выводится необходимое и достаточное условие устойчивости положений равновесия в первом приближении в виде системы неравенств, и показывается, что в области треугольника Лагранжа одно из неравенств системы не выполняется. Таким образом, на основе теоремы Ляпунова делается вывод о неустойчивости положений равновесия, располагающихся в области треугольника Лагранжа. Приведенное доказательство является простым, полностью основано на символьных вычислениях и позволяет исследовать решения на устойчивость при любых значениях параметров задачи, ограничившись рассмотрением лишь первого приближения.

Введение

Задача n-тел заключается в изучении n материальных точек, движущихся в абсолютно пустом пространстве под действием сил взаимного притяжения, определяемых вторым законом Ньютона. Поэтому в общем случае модель задачи n-тел представляет собой систему $3n$ нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Ещё в конце XIX века Пуанкаре, Пенлеве, Брунсом и др. было доказано [1], что такие системы не могут быть проинтегрированы в конечном виде при $n \geq 3$. Поскольку решение задачи двух тел ($n = 2$) имеется, то следующей по сложности является так называемая ограниченная задача трёх тел [2]. В ограниченной задаче трёх тел считается, что два тела движутся согласно известному решению задачи двух тел. Третье тело обладает настолько малой массой, что не влияет на движение двух тел, а само движется под действием гравитации, создаваемой двумя телами. Даже исследование такой упрощённой модели, как ограниченная задача трёх тел, в плоской круговой постановке оказалось чрезвычайно сложным и затянулось более чем на 200 лет. При этом исследована устойчивость по Ляпунову простейших частных решений – стационарных – коллинеарных решений Эйлера и треугольных решений Лагранжа. Напомним [3], что треугольному решению Лагранжа соответствует равномерное движение трёх тел по круговым кеплеровским орбитам, при котором тела образуют равносторонний треугольник в любой момент времени.

Следует отметить, что конфигурации Эйлера и Лагранжа реализуются даже в Солнечной системе. Классическим примером треугольника Лагранжа является конфигурация, образованная Солнцем, Юпитером и одним из астероидов Троянской группы. Поскольку массы астероидов различны, можно выделить наиболее массивный астероид и считать, что именно он вместе с Солнцем и Юпитером образует треугольник Лагранжа. Тогда можно рассмотреть ограниченную задачу четырёх тел, где к перечисленным телам добавим астероид с пренебрежимо малой массой и будем исследовать его движение в поле тяготения трёх основных тел. Такая постановка задачи является простым и естественным обобщением известной ограниченной задачи трёх тел [4–7].

Рассмотрим ограниченную задачу четырёх тел, сформулированную на основе треугольных решений Лагранжа задачи трёх тел [4–7]. В рамках этой модели три тела P_0, P_1, P_2, обладающие в общем случае различными массами m_0, m_1, m_2, движутся согласно известному треугольному решению Лагранжа, а четвёртое тело P_3 имеет настолько малую массу, что не влияет на движение основных трёх тел, а само движется в гравитационном поле, создаваемом тремя телами. Исследовать движение четвёртого тела P_3 удобно во вращающейся системе координат, с центром в точке P_0, в которой тела P_0, P_1, P_2 фиксированы на плоскости Oxy в точках $(0,0)$, $(1,0)$ и $(1/2, \sqrt{3}/2)$. В литературе [1–3] равносторонний треугольник с вершинами P_0, P_1, P_2 принято называть треугольником Лагранжа. Выполняя стандартные вычисления и преобразования, можно показать, что гамильтониан системы имеет вид:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + p_x y - p_y x +$$

$$+ \frac{1}{1+\mu_1+\mu_2}\left(\mu_1 x + \frac{\mu_2}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_2 y - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \right. \tag{1}$$

$$\left. - \frac{\mu_1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}} - \frac{2\mu_2}{\sqrt{(2x-1)^2+(2y-\sqrt{3})^2+4z^2}} \right),$$

где p_x, p_y, p_z – импульсы, канонически сопряжённые координатам x, y, z, и массовые параметры задаются формулами

$$\mu_1 = m_1 / m_0, \ \mu_2 = m_2 / m_0.$$

Зная функцию Гамильтона, несложно выписать уравнения движения тела P_3 и показать, что все положения равновесия лежат в плоскости Oxy ($z = 0$). При этом соответствующие равновесные положения определяются двумя алгебраическими уравнениями, которые могут быть представлены в следующем виде

$$(y - x\sqrt{3})\left(\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 1 \right) - \mu_1 (y + \sqrt{3}(x-1))\left(\frac{1}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}} - 1 \right) = 0,$$

$$2y\left(\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 1 \right) + \tag{2}$$

$$+ \mu_2 (y + \sqrt{3}(x-1))\left(\frac{1}{((x-1/2)^2 + (y-\sqrt{3}/2)^2)^{3/2}} - 1 \right) = 0.$$

Каждое из уравнений (2) представляет собой кривую на плоскости Oxy при заданных значениях μ_1, μ_2. Поэтому каждому решению системы уравнений (2) соответствует точка пересечения двух кривых (рисунок 1).

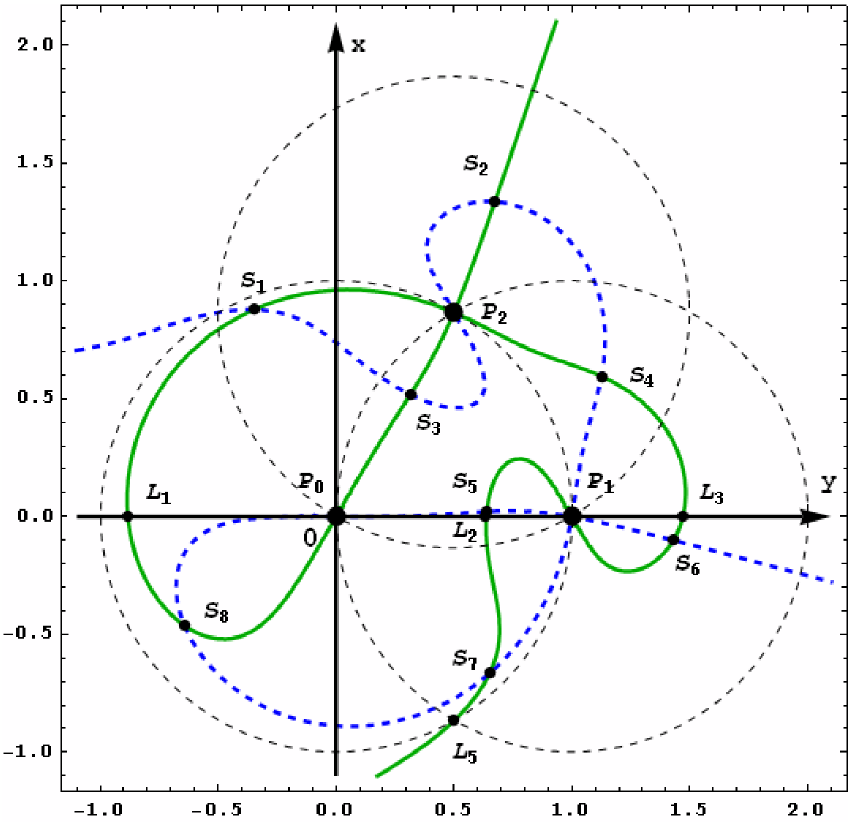

Рисунок 1 – Положения равновесия $S_1, S_2, \ldots S_8$ при $\mu_1 = 0.25,\ \mu_2 = 0.35$.

Отметим, что интерес к этой задаче был вызван ещё в 40-х годах прошлого века, когда в работах П. Педерсена [4] были выполнены первостепенные численные расчёты. Далее исследования по этой задаче проводили К. Симо [8], Р. Аренсторф [9], К. Мейер и Д. Шмидт [10; 11], Р. Мёкель и М. Хэмптон [12], Д. Маранхао и Я. Либрэ [13], Е. Леандро [14] и другие математики. При этом основное внимание в этих работах уделялось проблеме существования и поиска равновесных решений, определения условий выпуклости центральных конфигураций в этой задаче. Проблеме устойчивости равновесных решений посвящено небольшое количество работ, и рассмотрены только частные случаи ограниченной задачи четырёх тел, обладающих симметрией. Целостный анализ устойчивости по Ляпунову равновесных решений в строгой нелинейной постановке был проведён в [5]. Следует отметить, что доказательство устойчивости или неустойчивости равновесных решений в этих работах сопровождалось громоздкими символьными преобразованиями, численными расчётами и применением аппарата КАМ-теории (теория условно-периодических решений на многомерных торах).

В этой работе мы докажем неустойчивость некоторых равновесных решений без использования теорем КАМ-теории, ограничившись рассмотрением лишь квадратичной части разложения гамильтониана системы. А именно – будет показана неустойчивость равновесных решений, находящихся внутри треугольника Лагранжа, вершинами которого являются тела P_0, P_1, P_2. При этом математики [4–14] сходятся во мнении, что рассматриваемая ограниченная задача четырёх тел может иметь 8, 9 или 10 равновесных решений в зависимости от значений параметров $\mu_1,\ \mu_2$. Соответственно, в области треугольника Лагранжа может располагаться 2, 3 или 4 равновесных решения (рисунок 1).

Вопросам разработки символьно-численных алгоритмов для нахождения решений и проблеме бифуркации системы посвящены работы [6; 15; 16]. Случай, когда на четвёртое тело действуют не только плоские возмущения, но и возмущения, выводящие его из орбитальной плоскости тел (пространственная формулировка), описан в работах [17–19].

Анализ квадратичной части H_2 разложения гамильтониана

В окрестности равновесного решения (x_0, y_0) функция Гамильтона (1) может быть представлена в виде

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + \ldots \tag{3}$$

Первый член H_0 разложения функции Гамильтона по возмущениям является постоянной, которая не влияет на уравнения движения, и может быть отброшен. Член H_1 обнуляется в силу уравнений, определяющих равновесные решения. Поэтому первый отличный от нуля член в разложении (3) является квадратичным и имеет вид

$$H_2 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} - p_y\, x + p_x\, y + h_{20}\, x^2 + h_{11}\, x\, y + h_{02}\, y^2, \tag{4}$$

где коэффициенты $h_{20},\ h_{11},\ h_{02}$ определяются по формулам:

$$\begin{gathered}
h_{20} = \frac{-1}{2(1+\mu_1+\mu_2)}\left(\frac{2x_0^2 - y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}} + \right. \\
\left. + \mu_1 \frac{2(x_0-1)^2 - y_0^2}{((x_0-1)^2 + y_0^2)^{5/2}} + \mu_2 \frac{2(x_0 - 1/2)^2 - (y_0 - \sqrt{3}/2)^2}{((x_0-1/2)^2 + (y_0 - \sqrt{3}/2)^2)^{5/2}}\right), \\
h_{11} = \frac{-3}{(1+\mu_1+\mu_2)}\left(\frac{x_0 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}} + \right. \\
\left. + \mu_1 \frac{(x_0-1)y_0}{((x_0-1)^2 + y_0^2)^{5/2}} + \mu_2 \frac{(x_0-1/2)(y_0-\sqrt{3}/2)}{((x_0-1/2)^2 + (y_0-\sqrt{3}/2)^2)^{5/2}}\right), \\
h_{02} = \frac{1}{2(1+\mu_1+\mu_2)}\left(\frac{x_0^2 - 2y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}} + \right. \\
\left. + \mu_1 \frac{(x_0-1)^2 - 2y_0^2}{((x_0-1)^2 + y_0^2)^{5/2}} + \mu_2 \frac{(x_0-1/2)^2 - 2(y_0-\sqrt{3}/2)^2}{((x_0-1/2)^2 + (y_0-\sqrt{3}/2)^2)^{5/2}}\right).
\end{gathered} \tag{5}$$

Несложно выписать линеаризованные уравнения возмущенного движения (с функцией H_2), которые представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 + 2\lambda^2(1 + h_{20} + h_{02}) + 1 - 2h_{20} - h_{11}^2 - 2h_{02} + 4h_{20}h_{02} = 0.$$

Корнями этого уравнения являются характеристические показатели

$$\lambda_{1,3} = \pm i\sigma_1, \qquad \lambda_{2,4} = \pm i\sigma_2,$$

$$\sigma_{1,2} = \sqrt{1 + h_{20} + h_{02} \pm \sqrt{4h_{20} + h_{20}^2 + h_{11}^2 + 4h_{02} - 2h_{20}h_{02} + h_{02}^2}}.$$

Поскольку равновесные решения гамильтоновой системы могут быть устойчивыми только, если характеристические показатели являются различными чисто мнимыми числами, то необходимое и достаточное условие устойчивости в первом приближении эквивалентно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 1 - 2h_{20} - h_{11}^2 - 2h_{02} + 4h_{20}h_{02} > 0 \\ 1 + h_{20} + h_{02} > 0 \\ 4h_{20} + h_{20}^2 + h_{11}^2 + 4h_{02} - 2h_{20}h_{02} + h_{02}^2 > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема о неустойчивости равновесных решений

Докажем теорему о неустойчивости по Ляпунову всех равновесных решений, располагающихся в области треугольника Лагранжа, то есть в области, ограниченной неравенствами

$$0 < y < x\sqrt{3}, \quad y < \sqrt{3}(1 - x). \tag{7}$$

Для этого покажем, что второе неравенство из (6) не выполняется в области (7), то есть имеет место

$$1 + h_{20} + h_{02} < 0. \tag{8}$$

Подставим выражения для h_{20}, h_{02} (4) в неравенство (8)

$$1 + \frac{-1}{2(1+\mu_1+\mu_2)}\left(\frac{2x_0^2 - y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}} + \right.$$

$$\left. + \mu_1\frac{2(x_0-1)^2 - y_0^2}{((x_0-1)^2 + y_0^2)^{5/2}} + \mu_2\frac{2(x_0-1/2)^2 - (y_0-\sqrt{3}/2)^2}{((x_0-1/2)^2 + (y_0-\sqrt{3}/2)^2)^{5/2}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2(1+\mu_1+\mu_2)}\left(\frac{x_0^2 - 2y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}} + \right. \tag{9}$$

$$+\mu_1 \frac{(x_0-1)^2-2y_0^2}{((x_0-1)^2+y_0^2)^{5/2}}+\mu_2 \frac{(x_0-1/2)^2-2(y_0-\sqrt{3}/2)^2}{((x_0-1/2)^2+(y_0-\sqrt{3}/2)^2)^{5/2}}\Bigg)<0 .$$

Упрощая (9), получим

$$\frac{1}{2(1+\mu_1+\mu_2)}\left(\frac{1}{(x_0^2+y_0^2)^{3/2}}+\frac{\mu_1}{((x_0-1)^2+y_0^2)^{3/2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_2}{((x_0-1/2)^2+(y_0-\sqrt{3}/2)^2)^{3/2}}\right)>1,$$

и далее запишем в следующем виде:

$$\frac{1}{(x_0^2+y_0^2)^{3/2}}-1+\frac{\mu_1}{((x_0-1)^2+y_0^2)^{3/2}}-\mu_1+ \tag{10}$$

$$+\frac{\mu_2}{((x_0-1/2)^2+(y_0-\sqrt{3}/2)^2)^{3/2}}-\mu_2>1+\mu_1+\mu_2.$$

Уравнения (2) линейны относительно μ_1, μ_2, поэтому коэффициенты для параметров μ_1, μ_2, выраженные через x, y, имеют вид

$$\mu_1=-\frac{(\sqrt{3}x-y)\left(\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}-1\right)}{(\sqrt{3}(x-1)+y)\left(\dfrac{1}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}}-1\right)}, \tag{11}$$

$$\mu_2=-\frac{2y\left(\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}-1\right)}{(\sqrt{3}(x-1)+y)\left(\dfrac{1}{((x-1/2)^2+(y-\sqrt{3}/2)^2)^{3/2}}-1\right)}.$$

Подставляя выражения (11) только в левую часть неравенства (10), после некоторых преобразований получим

$$\frac{\sqrt{3}\left(1-\dfrac{1}{(x_0^2+y_0^2)^{3/2}}\right)}{\sqrt{3}(x_0-1)+y_0}>1+\mu_1+\mu_2. \tag{12}$$

Известно [2], что параметры μ_1, μ_2 должны быть достаточно малыми, чтобы треугольная конфигурация Лагранжа была устойчива в первом приближении, а именно

$$0<\mu_{1,2}<\frac{2}{25+3\sqrt{69}}\approx 0.0400642 \tag{13}$$

Далее, учитывая, что $\sqrt{3} > 1 + \mu_1 + \mu_2$, потому как параметры μ_1, μ_2 малы (13), усилим неравенство (12), поделив левую часть на $\sqrt{3}$, а правую – на $1 + \mu_1 + \mu_2$. Получим

$$\frac{1 - \dfrac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}}}{\sqrt{3}(x_0 - 1) + y_0} > 1. \tag{14}$$

Решая систему неравенств, состоящую из (7) и (14), получим (7). Таким образом, используя теорему Ляпунова о неустойчивости по первому приближению [20], делаем вывод о неустойчивости решений, находящихся в области треугольника Лагранжа.

Теорема. Все равновесные решения (x_0, y_0), принадлежащие области треугольника Лагранжа (7), являются неустойчивыми по Ляпунову.

Работа выполнена при финансовой поддержке Европейской комиссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре, А. Новые методы небесной механики / А. Пуанкаре // Избр. тр.: в 3 т. – М. : Наука, 1971. – Т. 1. – 771 с.; М.: Наука, 1972. – Т. 2. – С. 3–452.
2. Себехей, В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел / В. Себехей – М. : Наука, 1982. – 656 с.
3. Lagrange, J.L. Eissais sur le probleme de trios corps / J.L. Lagrange // Oeuvres complets. – Paris : Gauthier – Villars, 1876. – Vol. 6. – P. 162–178.
4. Pedersen, P. Librationspunkte im restringierten Vierkorperproblem / P. Pedersen // Danske vid. Selsk. Math.-Fys. – 1944. – Vol. 21, №6. – P. 1–80.
5. Budzko, D.A. On the stability of equilibrium positions in the circular restricted four-body problem / D.A. Budzko, A.N. Prokopenya // Lecture Notes in Computer Science. – Berlin, Heidelberg, 2011. – Vol. 6885 : Computer Algebra in Scientific Computing 2011. – P. 88–100.
6. Budzko, D.A. Symbolic-Numerical Analysis of Equilibrium Solutions in a Restricted Four-Body Problem / D.A. Budzko, A.N. Prokopenya // Programming and Computer Software. – 2010. – Vol. 36, N2. – P. 68–74.
7. Budzko, D.A. Linear stability analysis of equilibrium solutions of restricted planar four-body problem // Computer Algebra Systems in Teaching and Research: proc. of the 5th International Workshop CASTR’2009, Siedlce, Poland, 28–31 Jan. 2009 / University of Podlasie ; Eds.: L. Gadomski [and others]. – Siedlce, 2009. – P. 28–36.
8. Sim, C. Relative equilibrium solutions in the four body problem / C. Sim // Celest. Mech. – 1978. – Vol.18, №2. – P. 165–184.
9. Arenstorf, R.F. Central configurations of four bodies with one inferior mass / R.F. Arenstorf // Celest. Mech. – 1982. – Vol. 28. – P. 9–15.
10. Meyer, K. Bifurcation of a central configuration / K. Meyer // Celest. Mech. – 1987. – Vol. 40, №3–4. – P. 273–282.
11. Meyer, K. Bifurcations of relative equilibria in the 4- and 5-body problem / K. Meyer, D. Schmidt // Ergodic Theory Dyn. Syst. – 1988. – Vol. 8. – P. 215–225.
12. Hampton, M. Finiteness of relative equilibria of the four-body problem / M. Hampton, R. Moeckel // Invent. Math. – 2006. – Vol. 163, №2. – P. 289–312.

13. Maranhao, D. Ejection-collision orbits and invariant punctured tori in a restricted four-body problem / D. Maranhao, J. Llibre // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 1999. – Vol. 71, №1. – P. 1–14.
14. Leandro, E.S.G. On the central configurations of the planar restricted four-body problem / E.S.G. Leandro // Journal of Differential Equations. – 2006. – Vol. 226, №1. – P. 323–351.
15. Budzko, D.A., Prokopenya, A.N. Symbolic-Numeric Methods for Equilibrium Positions Search in the Restricted Four-Body Problem // Programming and Computer Software. – 2013. – № 2. – P. 30–37.
16. Budzko, D.A., Scherba, S.A. Symbolic-numeric analysis of restricted five-body problem using computer algebra// Programming and Computer Software. – 2014. – № 3. – P. 133–142.
17. Budzko, D.A., Prokopenya, A.N. Equilibrium Positions and Stability in the Spatial Circular Restricted Four-Body Problem // Classical and Celestial Mechanics: Selected Papers. – Siedlce, 2012. – P. 7–19.
18. Будько, Д.А. Положения относительного равновесия и анализ их устойчивости в пространственной круговой ограниченной задаче четырёх тел / Д.А. Будько, А.Н. Прокопеня // Вестник Брестского университета. Серия 4. – 2012. – №2. – С. 42–51.
19. Budzko, D.A., Prokopenya, A.N. Stability of Equilibrium Positions in the Spatial Circular Restricted Four-Body Problem // Lecture Notes in Computer Science. – Berlin, Heidelberg, 2012. – Vol. 7442 : Computer Algebra in Scientific Computing 2012. – P. 72–83.
20. Ляпунов, А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов; под ред. Г. Мюнтц. – Череповец : Меркурий-Пресс, 2000. – 386 с.

D.A. Budzko **Theorem On the Instability of Equilibrium Positions in the Domain of Lagrange's Triangle of Restricted Four-Body Problem**

The restricted circular four-body problem, formulated on the basis of triangular Lagrange's solutions, is considered. Problems on stability of equilibrium positions that are situated in the domain of Lagrange's triangle are discussed. We propose simple proof about instability of such solutions under any values of parameters using only symbolic transformations. Quadratic part of Hamiltonian function is analyzed and necessary and sufficient condition of stability of solutions is obtained in the form of system of inequalities. Then it is shown that one of the inequalities is not fulfilled in the domain of Lagrange's triangle. Finally using Lyapunov theorem we conclude about instability of equilibrium positions.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 21.03.14