УДК 372 016:53

Владимир Анестиевич Плетюхов
д-р физ.-мат. наук, проф. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Vladimir Pletyukhov
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor of the Department of General and Theoretical Physics
at the Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: pletyukhov@yandex.by

ТЕНЗОРНАЯ МАССА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКЕ

Обсуждаются различные трактовки понятия массы в релятивистской динамике. Предлагается новый способ введения массы в СТО, который базируется на формулировке релятивистского уравнения движения в виде, аналогичном второму закону Ньютона. В данном подходе масса выступает как тензорная, а не скалярная величина. Тензор массы позволяет просто описать анизотропный характер инертных свойств релятивистского объекта.

Tensor Mass in the Relativistic Dynamics

In this work we discuss different interpretations of mass in the relativistic dynamics. A new way to introduce mass is proposed. Our way is based on the relativistic equation of motion expressed in the form of the Newton's second law. In this approach mass appears as a tensor, not as a scalar. The tensor mass allows us simply to describe anisotropic character of inert features of a relativistic object.

Введение

Идеи специальной теории относительности (СТО) настолько изменили физические представления о пространстве, времени, материи, энергии и движении, что их осмысление продолжается до настоящего времени. Одной из обсуждаемых тем является трактовка понятия массы в релятивистской динамике [1].

Коснемся кратко истории вопроса. В классической механике уравнение движения точечного тела имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon}) = \vec{F}, \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{1}$$

где m – масса, $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ – импульс тела. При этом, согласно Ньютону, m является инвариантной величиной, вследствие чего (1) можно переписать следующим образом:

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad (\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}). \tag{2}$$

Величина m в уравнении (2) выступает в качестве коэффициента пропорциональности между силой и ускорением, что позволяет придать ей наглядный физический смысл: масса характеризует способность тела приобретать определенное ускорение под действием данной силы, или, как обычно говорят, является мерой инертности тела. Таким образом, в классической механике указанные два свойства массы: инвариантность и мера инертности – «мирно сосуществуют» и рассматриваются в качестве основного определения массы как физического понятия.

Иначе обстоит дело в СТО. Трехмерное релятивистское уравнение движения имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=\vec{F} \qquad \left(\beta=\frac{\upsilon}{c}\right), \tag{3}$$

где m – та же самая инвариантная величина, которая фигурирует в классическом уравнении движения (1), (2). Нетрудно заметить, что в (3) величина m не является коэффициентом пропорциональности между силой и ускорением, т. е. уже не может служить в качестве меры инертности тела в вышесформулированном смысле (в смысле второго закона Ньютона). Следовательно, возникает естественный вопрос: что считать массой и какой смысл она должна иметь в релятивистском случае?

На протяжении нескольких десятилетий после создания СТО доминирующей в физическом сообществе была трактовка, согласно которой релятивистской массой считалась величина [2–4]:

$$M=\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{4}$$

Основанием служило то обстоятельство, что релятивистское уравнение (3) можно получить из (1) путем формальной замены $m \to M$. Величина m в данном подходе рассматривалась «всего лишь» как нерелятивистский предел массы M и называлась массой покоя. Отметим, что «концепция двух масс» (назовем ее так) имеет методологическое сходство с подходом, используемом в релятивистской кинематике, где различают релятивистскую длину l и собственную (инвариантную) длину l_0 стержня, релятивистский промежуток времени Δt и собственный (инвариантный) промежуток времени $\Delta\tau$ между событиями.

Вторая трактовка (назовем ее «концепцией одной массы»), которая получила распространение в последние десятилетия и практически вытеснила первую из научной и учебно-методической литературы, заключается в том, что в ней за основу берется свойство инвариантности массы. Поэтому рассматривается только одна классическая масса m и никаких других масс не вводится. Вопрос о мере инертности релятивистского тела, по существу, замалчивается как неактуальный. Инвариантная масса удобна для использования в физике микромира, поскольку может служить в качестве идентификационного признака элементарных частиц. Последнее обстоятельство и послужило, главным образом, причиной того, почему неинвариантная масса M была фактически исключена из понятийного аппарата релятивистской динамики.

На наш взгляд, обе вышеуказанные концепции обладают существенными недостатками, не позволяющими ни одну из них принять как истину в последней инстанции. В настоящей работе мы предложим трактовку релятивистской массы, которая, по нашему мнению, более полно и точно отражает физическое содержание как самого этого понятия, так и релятивистской динамики в целом.

Сначала о недостатках существующих подходов.

В концепции двух масс величина M (4) не сохраняет ни одного свойства, которые присущи понятию массы в ее исходном, классическом понимании. Эта величина не является ни инвариантом, ни, вообще говоря, мерой инертности в смысле второго закона Ньютона, поскольку релятивистское уравнение движения (3) нельзя представить в форме, аналогичной (2) (за исключением одного случая, о котором подробнее будет сказано ниже). Здесь фактически идет речь о сущностном переопределении понятия массы, или, иначе говоря, о подмене исходного понятия массы некоторым другим понятием. Одного лишь факта, что классическая масса m является нерелятивистским пределом величины M явно недостаточно, чтобы считать последнюю релятивистским преемником (обобщением) классической массы.

В концепции одной массы за основу, как уже отмечалось выше, берется свойство инвариантности. Но сама по себе инвариантность массы еще ничего не говорит о физическом смысле данного понятия. Поэтому предлагается в указанном качестве использовать соотношение

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4, \tag{5}$$

означающее, что из двух неинвариантных величин: энергии и импульса – можно составить инвариантную комбинацию

$$m = \frac{1}{c^2}\sqrt{E^2 - c^2 p^2}, \tag{6}$$

которая и раскрывает якобы смысл понятия массы в релятивистской динамике.

Однако если проследить происхождение формул (5), (6), то нетрудно видеть, что (5) представляет собой трехмерную форму записи ковариантного соотношения

$$P_\mu^2 = -m^2 c^2, \tag{7}$$

где $P_\mu = m\,U_\mu$ – четырехмерный импульс, $U_\mu = \dfrac{dx_\mu}{d\tau}$ – четырехмерная скорость, $d\tau$ – дифференциал собственного времени. Соотношение (7), в свою очередь, является тривиальным следствием кинематического тождества

$$U_\mu^2 = -c^2, \tag{8}$$

в котором масса m вообще не фигурирует. Если (8) умножить на m^2, затем в левой части полученного равенства «спрятать» m в обозначениях

$$mU_i = p_i, \qquad mU_4 = i\frac{E}{c}, \tag{9}$$

то мы придем к формуле (5). Таким образом, получается, что масса m определяется через понятия энергии и импульса, в которых она же сама фигурирует в качестве сомножителя. Попытка дать определение более фундаментального понятия через менее фундаментальные или понятия одинаковой степени фундаментальности неизбежно приводит к тавтологии, с чем мы и сталкиваемся в настоящем случае.

Для того чтобы вернуть массе в СТО физический смысл, снова обратимся к концепции двух масс, но модернизируем ее. Из того бесспорного факта, что величина M (4) не может, вообще говоря, служить мерой инертности релятивистского тела, вовсе не следует, что в СТО ей нельзя найти подходящую замену.

Возьмем производную в левой части уравнения (3):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) &= \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \frac{m\vec{\upsilon}\left(\vec{\upsilon}, \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right)}{c^2\left(1-\beta^2\right)^{3/2}} = \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1 + \frac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}}{c^2\left(1-\beta^2\right)}\right)\vec{a} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1 + \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}}{\left(1-\beta^2\right)}\right)\vec{a}\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\vec{\beta}=\frac{\vec{\upsilon}}{c}$, $\left(\vec{\upsilon},\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right)=\left(\vec{\upsilon},\vec{a}\right)$ – скалярное произведение; $\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon},\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}$ – прямое (диадное) произведение векторов. Если представить векторы $\vec{F}$ и $\vec{a}$ в виде столбцов

$$\vec{F}=\begin{pmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{pmatrix},\qquad \vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\tag{11}$$

то диада $\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}$ представляет собой матрицу

$$\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}=\begin{pmatrix}\beta_1^2 & \beta_1\beta_2 & \beta_1\beta_3\\ \beta_2\beta_1 & \beta_2^2 & \beta_2\beta_3\\ \beta_3\beta_1 & \beta_3\beta_2 & \beta_3^2\end{pmatrix}.\tag{12}$$

В преобразованиях (10) использовано свойство диады

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b},\vec{c}).\tag{13}$$

С учетом (10) уравнение (3) принимает вид

$$\vec{F}=\mu\vec{a},\tag{14}$$

где $\vec{F}$ и $\vec{a}$ – трёхмерные вектор-столбцы (11), μ – матрица 3×3 вида

$$\mu=\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1+\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}}{1-\beta^2}\right).\tag{15}$$

В индексных обозначениях будем соответственно иметь:

$$F_i=\mu_{ij}a_j,\tag{16}$$

где

$$\mu_{ij}=\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\delta_{ij}+\frac{\beta_i\beta_j}{1-\beta^2}\right)\tag{17}$$

и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Уравнения (14), (16) можно обратить:

$$\vec{a}=\mu^{-1}\vec{F},\qquad a_i=\mu_{ij}^{-1}F_j,\tag{18}$$

где обратная матрица μ^{-1} имеет вид

$$\mu^{-1}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m}\left(1-\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}\right),\qquad \mu_{ij}^{-1}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m}\left(\delta_{ij}-\beta_i\beta_j\right).\tag{19}$$

Очевидно, что именно тензор-матрица μ, выступающая в качестве «коэффициента пропорциональности» между векторами силы и ускорения, адекватно отражает смысл понятия «мера инертности» в релятивистской динамике. Тензорный характер массы означает, что инертность релятивистского тела не является изотропным свойством. Ускорение тела зависит не только от абсолютных значений силы и скорости, но и от угла между ними в данный момент времени. Кроме того, направления силы и ускорения, вообще говоря, не совпадают. Указанная неизотропность обусловлена тем, что движущееся тело создает в пространстве выделенное направление, совпадающее с направлением скорости тела в данный момент времени.

Особый интерес представляют два частных случая, когда направление ускорения совпадает с направлением силы.

Один из них имеет место, когда $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{\upsilon}$. Тогда тензорное уравнение (18) при учете (19) принимает вид

$$\vec{a} = \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{m} \vec{F} . \tag{20}$$

В этом случае мерой инертности является скалярная величина (скалярная матрица)

$$\frac{m}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}, \tag{21}$$

называемая продольной массой [5, с. 45–48].

В случае, когда $\vec{F} \perp \vec{\upsilon}$, имеем

$$\vec{a} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m} \vec{F}, \quad \text{или } \vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{a} . \tag{22}$$

Коэффициент пропорциональности между силой $\vec{F}$ и ускорением $\vec{a}$ в (22), который естественно назвать поперечной массой [5], совпадает с выражением (4). Следовательно, величина M (4), которая некогда «претендовала» на универсальную роль релятивистской массы, на самом деле является «всего лишь» поперечной, но все-таки массой.

Что касается атрибута массы как меры полной энергии релятивистского тела, ситуация выглядит следующим образом. Смысл формулы

$$E = MC^2 \tag{23}$$

не сводится к тривиальному переобозначению одной и той же с точки зрения физического содержания величины (энергии). Эта формула устанавливает связь между *различными* величинами – полной энергией релятивистского тела и его инертной поперечной массой. Так что соотношение (23) является все-таки законом природы, пусть и не настолько фундаментальным, как это считалось во времена Эйнштейна. Обычно же приводимая в рамках концепции одной массы связь

$$E_0 = mc^2$$

представляет собой всего лишь предельный случай закона (23).

Заключение

В классической механике масса инвариантна и является мерой инертности тела. В СТО эти свойства классической массы, которые служат фактически ее определением, становятся несовместными. Если отдать приоритет первому свойству, то в релятивистской механике в качестве единственной массы надо принять инвариантную классическую массу m. Тогда она выступает в роли «врожденного» физического признака материального объекта и в данном качестве удобна для идентификации элементарных частиц. Масса служит также мерой запаса энергии покоящегося тела. При таком подходе теряется исходный смысл массы как меры инертности, вследствие чего становится проблемной трактовка физического содержания этого понятия. Отсылка к формулам (5), (6) не только не решает проблему, а запутывает ее еще больше.

Если же во главу угла поставить свойство классической массы как меры инертности, то в релятивистском случае в качестве массы следует принять тензорную массу m_{ij} (17). Тензорная масса адекватно отображает инертные свойства релятивистского тела, в т. ч. их анизотропный характер. Инвариантная масса m (со всеми присущими ей атрибутами) в данном подходе также сохраняется в статусе нерелятивистского предела массы m_{ij}. Находит свою нишу здесь и величина M (4) как поперечная масса и мера запаса полной релятивистской энергии тела.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Окунь, Л. Б. «Релятивистская кружка» [Электронный ресурс] / Л. Б. Окунь. – Режим доступа: arXiv:1010.5400 [physics.pop–ph] 26 Oct 2010.

2. Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике : в 9 т. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Изд. 2-е. – М. : Мир, 1966–1967. – Т. 2. – 1967. – 168 с.

3. Бергман, П. Г. Введение в теорию относительности / П. Г. Бергман. – М. : Инлитгиз, 1947. – 380 с.

4. Левич, В. Г. Курс теоретической физики : в 2 т. / В. Г. Левич. – М. : Наука, 1969. – Т. 1. – 912 с.

5. Эйнштейн, А. Собрание научных трудов : в 4 т. / А. Эйнштейн. – М. : Наука, 1965. – Т. 1. – 700 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 23.12.2020