УДК 513.82

Александр Андреевич Юдов[1], Елена Валерьяновна Арабчик[2],
Дмитрий Станиславович Арабчик[3], Елена Вячеславовна Кисилюк[4]
[1]канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]учитель математики и информатики гимназии г. Пружаны
[3]учитель математики и информатики СШ № 5 г. Пружаны
[4]преподаватель-стажер каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Aleksandr Yudov[1], Yelena Arabchik[2], Dmitrij Arabchik[3], Yelena Kisilyuk[4]
[1]PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,
Assistant Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling
at the Brest State A. S. Pushkin University
[2]Teacher of Mathematics and Computer Science of the Gymnasium of Pruzhany
[3]Teacher of Mathematics and Computer Science of the Secondary School nr 5 of Pruzhany
[4]Rainee Teacher of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
at the Brest State A. S. Pushkin University
e-mail:modelmath@brsu.brest.by

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА L_5

Целью исследования является классификация однородных редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства L_5 и всех их редуктивных дополнений, вычисление тензоров кривизны и кручения инвариантных аффинных связностей, найденных редуктивных однородных пространств.

Differential Geometry of Homogeneous Spaces with Structure Group – the Lie Group of Motions of the Space L_5

The aim of the study is to classify homogeneous reductive spaces with a fundamental group – the Lie group of motions of the space L_5 and all their reductive complements, to calculate the curvature and torsion tensors of invariant affine connections, found reductive homogeneous spaces.

Введение

Геометрия однородных пространств является объектом исследования многих отечественных и зарубежных ученых уже на протяжении более ста лет. В этой области работали Э. Картан, Г. Вейль, П. К. Рашевский, К. Номидзу, Ш. Кобаяси, В. И. Ведерников, А. С. Феденко, И. В. Белько, В. Балащенко, С. Г. Кононов, А. А. Юдов и др. Среди однородных пространств особенно важные применения находит теория редуктивных однородных пространств с различными структурными группами, в частности, с группами Ли движений (псевдо)евклидовых пространств различной размерности.

В работе исследуются однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений пространства L_5.

1. Классификация редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства L_5

Определение 1. Однородное пространство H / G_i называется редуктивным, если алгебра Ли $\overline{H}$ группы Ли *H* распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G_i}\,, \tag{1}$$

причем подпространство m инвариантно относительно $ad\overline{G_i}$, где $ad\overline{G_i}$ – присоединенное представление алгебры Ли $\overline{G_i}$.

Рассмотрим однородное пространство H / S_1, где S_1 – подгруппа Ли группы Ли H вращений пятимерного лоренцева пространства, имеющая алгебру Ли $\overline{S_1} = \{i_{13}\}$, где

$$i_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения системы инвариантности по способу, описанному выше, будем сводить задачу к рассмотрению 10 случаев:

$$1^0. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2, ..., X_9\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{17}, \\ X_2 &= i_9 + \mu i_{17}, \\ X_3 &= i_{12} + \vartheta i_{17}, \\ X_4 &= i_{16} + \sigma i_{17}, \\ X_5 &= i_{14} + s i_{17}, \\ X_6 &= i_{19} + t i_{17}, \\ X_7 &= i_8 + p i_{17}, \\ X_8 &= i_{10} + q i_{17}, \\ X_9 &= i_{13} + r i_{17}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_{13}$, получим

$$\begin{aligned}
&[a, X_1] = [a, i_7] + \lambda[a, i_{17}] = -i_9,\\
&[a, X_2] = [a, i_9] + \mu[a, i_{17}] = i_7,\\
&[a, X_3] = [a, i_{12}] + \vartheta[a, i_{17}] = i_{16},\\
&[a, X_4] = [a, i_{16}] + \sigma[a, i_{17}] = -i_{12},\\
&[a, X_5] = [a, i_{14}] + s[a, i_{17}] = -i_{19},\\
&[a, X_6] = [a, i_{19}] + t[a, i_{17}] = i_{14},\\
&[a, X_7] = [a, i_8] + p[a, i_{17}] = 0,\\
&[a, X_8] = [a, i_{10}] + q[a, i_{17}] = 0,\\
&[a, X_9] = [a, i_{13}] + r[a, i_{17}] = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1,..., X_9$:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(i_7 + \lambda i_{17}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{17}) + \gamma_1(i_{12} + \vartheta i_{17}) + \delta_1(i_{16} + \sigma i_{17}) + \omega_1(i_{14} + s i_{17}) + \varepsilon_1(i_{19} + t i_{17}) +\\
&+\phi_1(i_8 + p i_{17}) + \eta_1(i_{10} + q i_{17}) + \psi_1(i_{13} + r i_{17}) = \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{12} + \delta_1 i_{16} + \omega_1 i_{14} +\\
&+\varepsilon_1 i_{19} + \phi_1 i_8 + \eta_1 i_{10} + \psi_1 i_{13} + i_{17}(\alpha_1\lambda + \beta_1\mu + \gamma_1\vartheta + \delta_1\sigma + \omega_1 s + \varepsilon_1 t + \phi_1 p + \eta_1 q + \psi_1 r).
\end{aligned} \tag{4}$$

Сравнивая формулу (4) с первой формулой (3), получим:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = -1, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \omega_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \varphi_1 = 0, \eta_1 = 0, \psi_1 = 0, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (4) со второй формулой (3) получим:

$$\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 0, \varepsilon_2 = 0, \varphi_2 = 0, \eta_2 = 0, \psi_2 = 0, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (4) с третьей формулой (3), получим:

$$\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 0, \delta_3 = 1, \omega_3 = 0, \varepsilon_3 = 0, \varphi_3 = 0, \eta_3 = 0, \psi_3 = 0, \sigma = 0.$$

Сравнивая формулу (4) с четвертой формулой (3), получим:

$$\alpha_4 = 0, \beta_4 = 0, \gamma_4 = -1, \delta_4 = 0, \omega_4 = 0, \varepsilon_4 = 0, \varphi_4 = 0, \eta_4 = 0, \psi_4 = 0, \vartheta = 0.$$

Сравнивая формулу (4) с пятой формулой (3), получим:

$$\alpha_5 = 0, \beta_5 = 0, \gamma_5 = 0, \delta_5 = 0, \omega_5 = 0, \varepsilon_5 = -1, \varphi_5 = 0, \eta_5 = 0, \psi_5 = 0, t = 0.$$

Сравнивая формулу (4) с шестой формулой (3), получим:

$$\alpha_6 = 0, \beta_6 = 0, \gamma_6 = 0, \delta_6 = 0, \omega_6 = 1, \varepsilon_6 = 0, \varphi_6 = 0, \eta_6 = 0, \psi_6 = 0, s = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям. Таким образом, в случае 1^0 система инвариантности имеет вид:

$$\mu = 0, \lambda = 0, \sigma = 0, \vartheta = 0, t = 0, s = 0.$$

В итоге получили, что векторы $X_1,..., X_9$ имеют вид:

$$X_1 = i_7,$$
$$X_2 = i_9,$$
$$X_3 = i_{12},$$
$$X_4 = i_{16},$$
$$X_5 = i_{14},$$
$$X_6 = i_{19},$$
$$X_7 = i_8 + pi_{17},$$
$$X_8 = i_{10} + qi_{17},$$
$$X_9 = i_{13} + ri_{17}.$$

Из условия линейной независимости следует, что $r \neq 0$. Таким образом, получаем редуктивное дополнение в виде

$$X_1 = i_7,$$
$$X_2 = i_9,$$
$$X_3 = i_{12},$$
$$X_4 = i_{16},$$
$$X_5 = i_{14},$$
$$X_6 = i_{19},$$
$$X_7 = i_8 + pi_{17},$$
$$X_8 = i_{10} + qi_{17},$$
$$X_9 = i_{13} + ri_{17}.$$

Аналогично рассматриваются случаи $2^0 - 10^0$:

$$2^0. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2, ..., X_9\}$ задается векторами:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= i_7 + \lambda i_{13}, \\
X_2 &= i_9 + \mu i_{13}, \\
X_3 &= i_{12} + \vartheta i_{13}, \\
X_4 &= i_{16} + \sigma i_{13}, \\
X_5 &= i_{14} + s i_{13}, \\
X_6 &= i_{19} + t i_{13}, \\
X_7 &= i_8 + p i_{13}, \\
X_8 &= i_{10} + q i_{13}, \\
X_9 &= i_{17}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_{13}$, получим

$$
\begin{aligned}
[a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{13}] = -i_9, \\
[a, X_2] &= [a, i_9] + \mu [a, i_{13}] = i_7, \\
[a, X_3] &= [a, i_{12}] + \vartheta [a, i_{13}] = i_{16}, \\
[a, X_4] &= [a, i_{16}] + \sigma [a, i_{13}] = -i_{12}, \\
[a, X_5] &= [a, i_{14}] + s [a, i_{13}] = -i_{19}, \\
[a, X_6] &= [a, i_{19}] + t [a, i_{13}] = i_{14}, \\
[a, X_7] &= [a, i_8] + p [a, i_{13}] = 0, \\
[a, X_8] &= [a, i_{10}] + q [a, i_{13}] = 0, \\
[a, X_9] &= [a, i_{17}] = 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1, ..., X_9$:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 (i_7 + \lambda i_{13}) + \beta_1 (i_9 + \mu i_{13}) + \gamma_1 (i_{12} + \vartheta i_{13}) + \delta_1 (i_{16} + \sigma i_{13}) + \omega_1 (i_{14} + s i_{13}) + \varepsilon_1 (i_{19} + t i_{13}) + \\
&+ \phi_1 (i_8 + p i_{13}) + \eta_1 (i_{10} + q i_{13}) + \psi_1 i_{17} = \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{12} + \delta_1 i_{16} + \omega_1 i_{14} + \\
&+ \varepsilon_1 i_{19} + \phi_1 i_8 + \eta_1 i_{10} + \psi_1 i_{17} + i_{13} (\alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu + \gamma_1 \vartheta + \delta_1 \sigma + \omega_1 s + \varepsilon_1 t + \phi_1 p + \eta_1 q).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Сравнивая формулу (7) с первой формулой (6), получим:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = -1, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \omega_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \varphi_1 = 0, \eta_1 = 0, \psi_1 = 0, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (7) со второй формулой (6), получим:

$$\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 0, \varepsilon_2 = 0, \varphi_2 = 0, \eta_2 = 0, \psi_2 = 0, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (7) с третьей формулой (6), получим:

$$\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 0, \delta_3 = 1, \omega_3 = 0, \varepsilon_3 = 0, \varphi_3 = 0, \eta_3 = 0, \psi_3 = 0, \sigma = 0.$$

Сравнивая формулу (7) с четвертой формулой (6), получим:

$$\alpha_4 = 0, \beta_4 = 0, \gamma_4 = -1, \delta_4 = 0, \omega_4 = 0, \varepsilon_4 = 0, \varphi_4 = 0, \eta_4 = 0, \psi_4 = 0, \vartheta = 0.$$

Сравнивая формулу (7) с пятой формулой (6), получим:

$$\alpha_5 = 0, \beta_5 = 0, \gamma_5 = 0, \delta_5 = 0, \omega_5 = 0, \varepsilon_5 = -1, \varphi_5 = 0, \eta_5 = 0, \psi_5 = 0, t = 0.$$

Сравнивая формулу (7) с шестой формулой (6), получим:

$$\alpha_6 = 0, \beta_6 = 0, \gamma_6 = 0, \delta_6 = 0, \omega_6 = 1, \varepsilon_6 = 0, \varphi_6 = 0, \eta_6 = 0, \psi_6 = 0, s = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.
Таким образом, в случае 2^0 система инвариантности имеет вид:

$$\mu = 0, \lambda = 0, \sigma = 0, \vartheta = 0, t = 0, s = 0.$$

В итоге получили, что векторы $X_1, ..., X_9$ имеют вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7, \\ X_2 &= i_9, \\ X_3 &= i_{12}, \\ X_4 &= i_{16}, \\ X_5 &= i_{14}, \\ X_6 &= i_{19}, \\ X_7 &= i_8 + p i_{13}, \\ X_8 &= i_{10} + q i_{13}, \\ X_9 &= i_{17} + r i_{13}. \end{aligned}$$

Из условия линейной независимости следует, что $r \neq 0$. Таким образом, получаем редуктивное дополнение в виде

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7, \\ X_2 &= i_9, \\ X_3 &= i_{12}, \\ X_4 &= i_{16}, \\ X_5 &= i_{14}, \\ X_6 &= i_{19}, \\ X_7 &= i_8 + p i_{13}, \\ X_8 &= i_{10} + q i_{13}, \\ X_9 &= i_{17} + r i_{13}. \end{aligned}$$

$$3^0. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2, ..., X_9\}$ задается векторами:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = i_7 + \lambda i_{10},\\
&X_2 = i_9 + \mu i_{10},\\
&X_3 = i_{12} + \vartheta i_{10},\\
&X_4 = i_{16} + \sigma i_{10},\\
&X_5 = i_{14} + s i_{10},\\
&X_6 = i_{19} + t i_{10},\\
&X_7 = i_8 + p i_{10},\\
&X_8 = i_{13},\\
&X_9 = i_{17}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_{13}$, получим

$$
\begin{aligned}
&[a, X_1] = [a, i_7] + \lambda[a, i_{10}] = -i_9,\\
&[a, X_2] = [a, i_9] + \mu[a, i_{10}] = i_7,\\
&[a, X_3] = [a, i_{12}] + \vartheta[a, i_{10}] = i_{16},\\
&[a, X_4] = [a, i_{16}] + \sigma[a, i_{10}] = -i_{12},\\
&[a, X_5] = [a, i_{14}] + s[a, i_{10}] = -i_{19},\\
&[a, X_6] = [a, i_{19}] + t[a, i_{10}] = i_{14},\\
&[a, X_7] = [a, i_8] + p[a, i_{10}] = 0,\\
&[a, X_8] = [a, i_{13}] = 0,\\
&[a, X_9] = [a, i_{17}] = 0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1, \ldots, X_9$:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1(i_7 + \lambda i_{10}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{10}) + \gamma_1(i_{12} + \vartheta i_{10}) + \delta_1(i_{16} + \sigma i_{10}) + \omega_1(i_{14} + s i_{10}) + \varepsilon_1(i_{19} + t i_{10}) +\\
&+\phi_1(i_8 + p i_{10}) + \eta_1 i_{13} + \psi_1 i_{17} = \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{12} + \delta_1 i_{16} + \omega_1 i_{14} +\\
&+\varepsilon_1 i_{19} + \phi_1 i_8 + \eta_1 i_{13} + \psi_1 i_{17} + i_{10}(\alpha_1\lambda + \beta_1\mu + \gamma_1\vartheta + \delta_1\sigma + \omega_1 s + \varepsilon_1 t + \phi_1 p).
\end{aligned} \tag{10}
$$

Сравнивая формулу (10) с первой формулой (9), получим:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = -1, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \omega_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \varphi_1 = 0, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (10) со второй формулой (9), получим:

$$\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 0, \varepsilon_2 = 0, \varphi_2 = 0, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с третьей формулой (9), получим:

$$\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 0, \delta_3 = 1, \omega_3 = 0, \varepsilon_3 = 0, \varphi_3 = 0, \sigma = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с четвертой формулой (9), получим:

$$\alpha_4 = 0, \beta_4 = 0, \gamma_4 = -1, \delta_4 = 0, \omega_4 = 0, \varepsilon_4 = 0, \varphi_4 = 0, \vartheta = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с пятой формулой (9), получим:

$$\alpha_5 = 0, \beta_5 = 0, \gamma_5 = 0, \delta_5 = 0, \omega_5 = 0, \varepsilon_5 = -1, \varphi_5 = 0, t = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с шестой формулой (9), получим:

$$\alpha_6 = 0, \beta_6 = 0, \gamma_6 = 0, \delta_6 = 0, \omega_6 = 1, \varepsilon_6 = 0, \varphi_6 = 0, s = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям. Таким образом, в случае 3^0 система инвариантности имеет вид:

$$\mu = 0, \lambda = 0, \sigma = 0, \vartheta = 0, t = 0, s = 0.$$

В итоге получили, что векторы $X_1, ..., X_9$ имеют вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7, \\ X_2 &= i_9, \\ X_3 &= i_{12}, \\ X_4 &= i_{16}, \\ X_5 &= i_{14}, \\ X_6 &= i_{19}, \\ X_7 &= i_8 + pi_{10}, \\ X_8 &= i_{10}, \\ X_9 &= i_{13}. \end{aligned}$$

$$4^0. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2, ..., X_9\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_8, \\ X_2 &= i_9 + \mu i_8, \\ X_3 &= i_{12} + \vartheta i_8, \\ X_4 &= i_{16} + \sigma i_8, \\ X_5 &= i_{14} + s i_8, \\ X_6 &= i_{19} + t i_8, \\ X_7 &= i_{10}, \\ X_8 &= i_{13}, \\ X_9 &= i_{17}. \end{aligned} \tag{11}$$

Сравнивая соответствующие формулы из таблицы коммутаторов с рассматриваемой линейной комбинацией векторов $\{X_1,\ldots,X_9\}$, получаем систему инвариантности, которая имеет вид:

$$\mu = 0, \lambda = 0, \sigma = 0, \vartheta = 0, t = 0, s = 0.$$

В итоге получили, что векторы $X_1,\ldots,X_9$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
X_1 &= i_7,\\
X_2 &= i_9,\\
X_3 &= i_{12},\\
X_4 &= i_{16},\\
X_5 &= i_{14},\\
X_6 &= i_{19},\\
X_7 &= i_8,\\
X_8 &= i_{10},\\
X_9 &= i_{13}.
\end{aligned}$$

$$5^0.\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17}
\end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2,\ldots, X_9\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned}
X_1 &= i_7 + \lambda i_{19},\\
X_2 &= i_9 + \mu i_{19},\\
X_3 &= i_{12} + \vartheta i_{19},\\
X_4 &= i_{16} + \sigma i_{19},\\
X_5 &= i_{14} + s i_{19},\\
X_6 &= i_8,\\
X_7 &= i_{10},\\
X_8 &= i_{13},\\
X_9 &= i_{17}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Сравнивая соответствующие формулы из таблицы коммутаторов с рассматриваемой линейной комбинацией векторов $\{X_1,\ldots,X_9\}$, получаем систему инвариантности, которая имеет вид:

$$\mu = 0, \lambda = 0, \sigma = 0, \vartheta = 0, t = 0, s = 0.$$

В итоге получили, что векторы $X_1, ..., X_9$ имеют вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7, \\ X_2 &= i_9, \\ X_3 &= i_{12}, \\ X_4 &= i_{16}, \\ X_5 &= i_{14}, \\ X_6 &= i_{19}, \\ X_7 &= i_8, \\ X_8 &= i_{10}, \\ X_9 &= i_{13}. \end{aligned}$$

$$6^0. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2, ..., X_9\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{14}, \\ X_2 &= i_9 + \mu i_{14}, \\ X_3 &= i_{12} + \vartheta i_{14}, \\ X_4 &= i_{16} + \sigma i_{14}, \\ X_5 &= i_{19}, \\ X_6 &= i_8, \\ X_7 &= i_{10}, \\ X_8 &= i_{13}, \\ X_9 &= i_{17}. \end{aligned} \tag{13}$$

Сравнивая соответствующие формулы из таблицы коммутаторов с рассматриваемой линейной комбинацией векторов $\{X_1,\ldots,X_9\}$, получаем систему инвариантности, которая имеет вид:

$$\mu = 0, \lambda = 0, \sigma = 0, \vartheta = 0, t = 0, s = 0.$$

В итоге получили, что векторы $X_1,...,X_9$ имеют вид:

$$X_1 = i_7,$$
$$X_2 = i_9,$$
$$X_3 = i_{12},$$
$$X_4 = i_{16},$$
$$X_5 = i_{14},$$
$$X_6 = i_{19},$$
$$X_7 = i_8,$$
$$X_8 = i_{10},$$
$$X_9 = i_{13}.$$

$$7^0. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2,..., X_9\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{16}, \\ X_2 &= i_9 + \mu i_{16}, \\ X_3 &= i_{12} + \vartheta i_{16}, \\ X_4 &= i_{16}, \\ X_5 &= i_{19}, \\ X_6 &= i_8, \\ X_7 &= i_{10}, \\ X_8 &= i_{13}, \\ X_9 &= i_{17}. \end{aligned} \tag{14}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_{13}$, получим

$$
\begin{aligned}
&[a, X_1] = [a, i_7] + \lambda[a, i_{16}] = -i_9 - \lambda i_{12},\\
&[a, X_2] = [a, i_9] + \mu[a, i_{16}] = i_7 - \mu i_{12},\\
&[a, X_3] = [a, i_{12}] + \vartheta[a, i_{16}] = i_{16} - \vartheta i_{12},\\
&[a, X_4] = [a, i_{16}] = -i_{12},\\
&[a, X_5] = [a, i_{14}] = -i_{19},\\
&[a, X_6] = [a, i_{19}] = i_{14},\\
&[a, X_7] = [a, i_8] = 0,\\
&[a, X_8] = [a, i_{10}] = 0,\\
&[a, X_9] = [a, i_{13}] = 0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1,..., X_9$:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1(i_7 + \lambda i_{16}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{16}) + \gamma_1(i_{12} + \vartheta i_{16}) + \delta_1 i_{14} - \omega_1 i_{19} + \varepsilon_1 i_8 + \phi_1 i_{10} + \eta_1 i_{13} + \psi_1 i_{17} = \alpha_1 i_7 +\\
&+\beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{12} + \delta_1 i_{14} + \omega_1 i_{19} + \varepsilon_1 i_8 + \phi_1 i_{10} + \eta_1 i_{18} + \psi_1 i_{17} + i_{16}(\alpha_1\lambda + \beta_1\mu + \gamma_1\vartheta).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Сравнивая формулу (23) с первой формулой (22), получим:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = -1, \gamma_1 = -\lambda, -\mu - \lambda\vartheta = 0.$$

Сравнивая формулу (23) со второй формулой (22), получим:

$$\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (23) с третьей формулой (22), получим:

$$\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 0, -\vartheta^2 = 1.$$

Система инвариантности противоречива.

$$
8^0.\begin{pmatrix}
1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17}
\end{pmatrix}
$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2,..., X_9\}$ задается векторами:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= i_7 + \lambda i_{12},\\
X_2 &= i_9 + \mu i_{12},\\
X_3 &= i_{16},\\
X_4 &= i_{14},\\
X_5 &= i_{19},\\
X_6 &= i_8,\\
X_7 &= i_{10},\\
X_8 &= i_{13},\\
X_9 &= i_{17}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_{13}$, получим

$$
\begin{aligned}
&[a, X_1] = [a, i_7] + \lambda[a, i_{12}] = -i_9 + \lambda i_{16},\\
&[a, X_2] = [a, i_9] + \mu[a, i_{12}] = i_7 + \mu i_{16},\\
&[a, X_3] = [a, i_{16}] = -i_{12},\\
&[a, X_4] = [a, i_{14}] = -i_{19},\\
&[a, X_5] = [a, i_{19}] = i_{14},\\
&[a, X_6] = [a, i_8] = 0,\\
&[a, X_7] = [a, i_{10}] = 0,\\
&[a, X_8] = [a, i_{13}] = 0,\\
&[a, X_9] = [a, i_{17}] = 0.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1,...,X_9$:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1\left(i_7 + \lambda i_{12}\right) + \beta_1\left(i_9 + \mu i_{12}\right) + \gamma_1 i_{16} + \delta_1 i_{14} - \omega_1 i_{19} + \varepsilon_1 i_8 + \phi_1 i_{10} + \eta_1 i_{13} + \psi_1 i_{17} = \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_9 + \\
&+\gamma_1 i_{16} + \delta_1 i_{14} + \omega_1 i_{19} + \varepsilon_1 i_8 + \phi_1 i_{10} + \eta_1 i_{18} + \psi_1 i_{17} + i_{12}\left(\alpha_1\lambda + \beta_1\mu\right).
\end{aligned} \tag{19}
$$

Сравнивая формулу (26) с первой формулой (25), получим:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = -1, \lambda = \gamma_1, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (26) со второй формулой (25), получим:

$$\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (26) с третьей формулой (25), получим:

$$\alpha_3\lambda + \beta_3\mu = -1.$$

Система инвариантности противоречива.

$$9^0. \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2, ..., X_9\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_9, \\ X_2 &= i_{12}, \\ X_3 &= i_{16}, \\ X_4 &= i_{14}, \\ X_5 &= i_{19}, \\ X_6 &= i_8, \\ X_7 &= i_{10}, \\ X_8 &= i_{13}, \\ X_9 &= i_{17}. \end{aligned} \tag{20}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_{13}$, получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_9] = -i_9 + \lambda i_7, \\ [a, X_2] &= [a, i_9] = i_7, \\ [a, X_3] &= [a, i_{12}] = i_{16}, \\ [a, X_4] &= [a, i_{16}] = -i_{12}, \\ [a, X_5] &= [a, i_{14}] = -i_{19}, \\ [a, X_6] &= [a, i_{19}] = i_{14}, \\ [a, X_7] &= [a, i_8] = 0, \\ [a, X_8] &= [a, i_{10}] = 0, \\ [a, X_9] &= [a, i_{13}] = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1, ..., X_9$:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 (i_7 + \lambda i_9) + \beta_1 i_{12} + \gamma_1 i_{16} + \delta_1 i_{14} - \omega_1 i_{19} + \varepsilon_1 i_8 + \phi_1 i_{10} + \eta_1 i_{13} + \psi_1 i_{17} = \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_{12} + \gamma_1 i_{16} + \\ &+ \delta_1 i_{14} + \omega_1 i_{19} + \varepsilon_1 i_8 + \phi_1 i_{10} + \eta_1 i_8 + \psi_1 i_{17} + i_9 \alpha_1 \lambda. \end{aligned} \tag{22}$$

Сравнивая формулу (4.29) с первой формулой (4.28), получим:

$$\lambda\alpha_1 = -1, \alpha_1 = \lambda, \lambda^2 = -1.$$

Получили противоречие.

$$10^0. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2, ..., X_9\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_9, \\ X_2 &= i_{12}, \\ X_3 &= i_{16}, \\ X_4 &= i_{14}, \\ X_5 &= i_{19}, \\ X_6 &= i_8, \\ X_7 &= i_{10}, \\ X_8 &= i_{13}, \\ X_9 &= i_{17}. \end{aligned} \tag{23}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_{13}$, получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_9] = i_7, \\ [a, X_2] &= [a, i_{12}] = i_{16}, \\ [a, X_3] &= [a, i_{16}] = -i_{12}, \\ [a, X_4] &= [a, i_{14}] = -i_{19}, \\ [a, X_5] &= [a, i_{19}] = i_{14}, \\ [a, X_6] &= [a, i_8] = 0, \\ [a, X_7] &= [a, i_{10}] = 0, \\ [a, X_8] &= [a, i_{13}] = 0, \\ [a, X_9] &= [a, i_{17}] = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1, ..., X_9$:

$$\alpha_1 i_9 + \beta_1 i_{12} + \gamma_1 i_{16} + \delta_1 i_{14} - \omega_1 i_{19} + \varepsilon_1 i_8 + \varphi_1 i_{10} + \eta_1 i_{13} + \psi_1 i_{17} \tag{25}$$

Сравнивая формулу (25) с первой формулой (24), получим: $0=1$. Система инвариантности противоречива.

В итоге получим следующие инвариантные подпространства:

$$
\begin{array}{lll}
X_1 = i_7, & X_1 = i_7, & X_1 = i_7, \\
X_2 = i_9, & X_2 = i_9, & X_2 = i_9, \\
X_3 = i_{12}, & X_3 = i_{12}, & X_3 = i_{12}, \\
X_4 = i_{16}, & X_4 = i_{16}, & X_4 = i_{16}, \\
X_5 = i_{14}, & X_5 = i_{14}, & X_5 = i_{14}, \\
X_6 = i_{19}, & X_6 = i_{19}, & X_6 = i_{19}, \\
X_7 = i_8, & X_7 = i_8 + pi_{10}, & X_7 = i_8 + pi_{13}, \\
X_8 = i_{10}, & X_8 = i_{10}, & X_8 = i_{10} + qi_{13}, \\
X_9 = i_{13}. & X_9 = i_{13}. & X_9 = i_{17} + ri_{13}.
\end{array}
$$

2. Тензоры кривизны и кручения канонической связности на редуктивных однородных пространствах

Будем вычислять тензоры кривизны и кручения канонической связности на редуктивных однородных пространствах с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства L_5.

Свойства тензора кривизны и кручения канонической связности характеризуется следующей теоремой.

Теорема 1 [1, с. 180, теорема 2.6]. Пусть P есть G-инвариантная структура на редуктивном однородном пространстве G/H с разложением $\overline{G}=\overline{H}+m$. Для тензора кручения T и тензора кривизны R канонической связности в P мы имеем:

(1) $T(X,Y)_0 = -[X,Y]_m$ для $X,Y \in m$.

(2) $(R(X,Y)Z)_0 = -[[X,Y]_{\overline{H}}, Z]$ для $X,Y,Z \in m$.

(3) $\nabla T = 0$.

(4) $\nabla R = 0$.

Тензоры кривизны и кручения играют важную роль при исследовании свойств данной связности, поскольку они определяют связность с помощью структурных формул Э. Картана. Воспользуемся теоремой 1 и получим формулы для тензоров кривизны и кручения соответствующей канонической связности в исследуемых редуктивных однородных пространствах.

Рассмотрим группу Ли S_1 с алгеброй Ли $\overline{S_1} = \{i_{13}\}$, которая является подгруппой Ли группы Ли G движений пятимерного пространства Лоренца.

Рассмотрим редуктивное однородное пространство H/S_1, которое имеет редуктивное разложение $\overline{H} = \overline{S_1} + m$, где

$$m = \{i_7, i_9, i_{12}, i_{16}, i_8 + si_{13}, i_{10}, i_{14}, i_{17}, i_{19}\}.$$

Выберем в редуктивном дополнении m базис:

$$e_1 = i_7, e_2 = i_9, e_3 = i_{12}, e_4 = i_{16}, e_5 = i_8 + si_{13}, e_6 = i_{10}, e_7 = i_{14}, e_8 = i_{17}, e_9 = i_{19}.$$

Тогда согласно теореме 1 тензоры кручения получим по формуле $T(X,Y)_0 = -[X,Y]_m$ для $X,Y \in m$, а тензоры кривизны – по формуле

$(R(X,Y)Z)_0 = -[[X,Y]_{\overline{H}}, Z]$ для $X,Y,Z \in m$. Таким образом, координату T^i_{jk} тензора кручения получим как i-ю координату разложения вектора $-[e_j, e_k]_m$, по базису $B = \{i_7, i_9, i_{12}, i_{16}, i_8 + si_{13}, i_{10}, i_{14}, i_{17}, i_{19}\}$ редуктивного дополнения m. Координату $R^i_{jk,l}$ тензора кривизны получим как i-ю координату разложения вектора $-[[e_j, e_k]_{\overline{G_i}}, e_l]$ по базису B редуктивного дополнения m.

Производя соответствующие вычисления, получаем теорему.

Теорема 2. Для канонической связности редуктивного однородного пространства H/S_1 тензор кручения имеет только следующие, отличные от нуля, координаты:

$$T^7_{1,6} = -1,\ T^6_{7,5} = -1,\ T^9_{2,6} = -1,\ T^6_{2,9} = -1,\ T^7_{3,8} = -1,\ T^9_{4,8} = 1,\ T^8_{4,9} = -1,\ T^8_{5,6} = -1,$$
$$T^9_{5,7} = s,\ T^{11}_{5,8} = -1, T^7_{5,9} = -s,\ T^9_{4,8} = 1,\ T^8_{4,9} = -1,\ T^8_{5,6} = -1,$$

при этом тензор кручения кососимметричен по нижним индексам.

Теорема 3. Для канонической связности редуктивного однородного пространства H/S_1 тензор кривизны имеет только следующие, отличные от нуля, координаты:

$$R^2_{6,8,1} = 1, R^1_{6,8,2} = -1, R^4_{6,8,3} = -1, R^3_{6,8,4} = 1, R^9_{6,8,7} = 1, R^7_{6,8,9} = -1,$$

при этом тензор кривизны кососимметричен по первым двум нижним индексам.

Заключение

В работе решены следующие задачи:

1) исследованы канонические связности на полученных редуктивных однородных пространствах;

2) вычислены тензоры кривизны и кручения инвариантных аффинных связностей найденных редуктивных пространств.

Результаты работы могут быть применены для решения аналогичных задач в других евклидовых пространствах, а также в научно-исследовательской работе по дифференциальной геометрии и в теоретической физике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 413 с.

2. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцевых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1 (126). – С. 13–22.

3. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М. : Наука, 1967. – 664 с.

4. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.

5. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.02.2021