УДК 517.927.21+519.642.6

Сергей Андреевич Марзан
канд. физ.-мат. наук, доц.,
доц. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Sergei Marzan
PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor, Assistant Professor
of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications
at the Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: marzanserg2@gmail.com

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ КАПУТО

Разработан модифицированный метод осреднения функциональных поправок приближенного решения задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто. Получены условия существования приближенного решения, а также оценка разности между точным и приближенным решением указанной задачи.

An Approximate Solution to the Cauchy Problem for a System Nonlinear Differential Equations with Derivatives Kaputo

A modified method of averaging functional corrections for the approximate solution of the Cauchy problem for a system of nonlinear differential equations with fractional Caputo derivatives is developed. Conditions for the existence of an approximate solution are obtained, as well as an estimate of the difference between the exact and approximate solution of the indicated problem.

Введение

Актуальной проблемой математического моделирования является проблема адекватности математических моделей исследуемым объектам. Объекты моделирования традиционно изучались посредством использования классического математического анализа, в частности аппарата интегро-дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных. В то же время поведение ряда объектов и процессов приводит к необходимости разрабатывать уточненные модели с привлечением математического анализа нецелых порядков. Последний основан на систематическом использовании понятий производных и интегралов, порядки которых не являются натуральными числами, а могут быть дробными, иррациональными или комплексными.

В теории дробного интегро-дифференцирования особое значение приобретают вопросы существования решений краевых задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с дробными производными в различных функциональных пространствах, которые достаточно полно исследованы в [1–3] для дробных производных Римана – Лиувилля. В то же время важный интерес для практического приложения теории дробного интегро-дифференцирования представляет определение производной дробного порядка по Капуто [4]:

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=\left(D_{a+}^{\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=o}^{n-1}\frac{(x-a)^{k}}{k!}f^{(k)}(a)\right]\right)(x), \tag{1}$$

где $\alpha \in C, \operatorname{Re}(\alpha)>0, n=[\operatorname{Re}(\alpha)]+1$ при $\alpha \notin \mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$, и $n=\alpha$ при $\alpha \in \mathbb{N}$, $D_{a+}^{\alpha}f$ – дробная производная Римана – Лиувилля [1].

Преимуществом определения дробной производной по Капуто является более естественное решение проблемы начальных условий при решении дифференциальных уравнений нецелых порядков. Условия существования единственных решений задач Коши для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений и их систем получены в [5–7].

С точки зрения приложений важной задачей является также разработка приближенных методов решения задач типа Коши и Коши для дифференциальных уравнений с дробными производными. Метод приближенного решения задачи типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Римана – Лиувилля предложен в [8], а задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто – в [9]. В то же время указанные методы не применимы для задач Коши для дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто порядков $0<\alpha<1$.

В настоящей работе предложена модификация метода осреднения функциональных поправок [10] приближенного решения задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто (1) порядков $0<\alpha_i<1$.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\left({}^cD_{a+}^{\alpha_i}y_i\right)(x)=f_i\left[x,y_1(x),\ldots,y_m(x)\right],\ 0<\alpha_i<1\quad(i=1,2,\ldots,m),\tag{2}$$

с начальными условиями

$$\left({}^cD_{a+}^{\alpha_i}y_i\right)(a)=b_i,\ b_i\in C\quad(i=1,2,\ldots,m).\tag{3}$$

Пусть функции $f_i:D\to\mathbb{R}$ непрерывны на множестве

$$D=\left\{(x,y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{R}^{m+1},x\in[a,b],\left|y_i-b_i\right|\le\mu_i,\mu_i>0,i=1,2,\ldots,m\right\},\tag{4}$$

где b_i определяются из начальных условий (3); при этом

$$\max_{(x,y_1,\ldots,y_m)}\left|f_i\left[x,y_1,\ldots,y_m\right]\right|=M_i<\infty\quad(i=1,2,\ldots,m).\tag{5}$$

Согласно [5] при выполнении условий (5) задача Коши (2) – (3) равносильна системе интегральных уравнений

$$y_i(x)=b_i+\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_a^x\frac{f_i\left[t,y_1(t),\ldots,y_m(t)\right]}{(x-t)^{1-\alpha_i}}dt\quad(i=1,2,\ldots,m).\tag{6}$$

Для построения приближенного решения системы уравнений (6) положим

$$y_{i1}(x)=b_i+\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_a^x\frac{f_i\left[t,p_{11},\ldots,p_{m1}\right]}{(x-t)^{1-\alpha_i}}dt\,,\tag{7}$$

$$p_{i1}=\frac{1}{h}\int_a^{a+h}y_{i1}(x)dx\quad(i=1,2,\ldots,m),\tag{8}$$

где $h>0$, $a+h\le b$. Подставляя выражения $y_{i1}(x)$ в (8), получим для определения p_{i1} систему уравнений

$$hp_{i1} = b_i h + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{f_i\left[t, p_{11}, \ldots, p_{m1}\right]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{9}$$

Предположим, что система (9) имеет решение $(p_{11}, \ldots, p_{m1})$ (условия существования и критерий выбора $p_{i1} \in \mathbb{R}$ будут рассмотрены позже), причем

$$\left| p_{i1} - b_i \right| < \mu_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Во втором приближении положим

$$y_{i2}(x) = b_i + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{f_i\left[t, y_{11}(t) + p_{12}, \ldots, y_{m1}(t) + p_{m2}\right]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt, \tag{10}$$

где

$$p_{i2} = \frac{1}{h} \int_a^h \delta_{i2}(x) dx, \quad \delta_{i2}(x) = y_{i2}(x) - y_{i1}(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{11}$$

На основании (7) и (10)

$$\delta_{i2}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{f_i\left[t, y_{11}(t) + p_{12}, \ldots, y_{m1}(t) + p_{m2}\right] - f_i\left[t, p_{11}, \ldots, p_{m1}\right]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt, \tag{12}$$

поэтому согласно (11) для определения p_{i2} получаем систему уравнений

$$hp_{i2} = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{f_i\left[t, y_{11} + p_{12}, \ldots, y_{m1} + p_{m2}\right] - f_i\left[t, p_{11}, \ldots, p_{m1}\right]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{13}$$

Продолжая таким же образом, в *s*-ом приближении положим

$$y_{is}(x) = b_i + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{f_i\left[t, y_{1s-1} + p_{1s}, \ldots, y_{ms-1} + p_{ms}\right]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt, \tag{14}$$

где $p_{is} = \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \delta_{is}(x) dx$, $\delta_{is}(x) = y_{is}(x) - y_{is-1}(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ s = 3, 4, \ldots)$.

В силу последнего равенства p_{is} определяются из системы уравнений

$$hp_{is} = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{f_i\left[t, y_{1s-1} + p_{1s}, \ldots, y_{ms-1} + p_{ms}\right]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{f_i\left[t, y_{1s-2} + p_{1s-1}, \ldots, y_{ms-2} + p_{ms-1}\right]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt. \tag{15}$$

В приближенной формуле, принятой за окончательную, можно положить h, равным расчетному значению $x - a$, или принять $h = b - a$.

Условия существования приближенного решения задачи Коши

Для установления условий существования приближенного решения задачи Коши (2) – (3) к условию (5) добавим дополнительное условие: липшицевость функции f_i относительно переменной y_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$:

$$\left|f_i\left[x,y_1,\ldots,y_i,\ldots,y_m\right]-f_i\left[x,y'_1,\ldots,y'_i,\ldots,y'_m\right]\right|\le L_i\left|y_i-y'_i\right|,\ L_i>0. \tag{16}$$

Теорема 1. Пусть $0<\alpha_i<1$, функции $f_i:D\to\mathbb{R}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ непрерывны на множестве D, определяемом условием (4), и удовлетворяют условиям (5) и (16). Пусть

$$\frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}<1,\ \frac{h^{\alpha_i}(\alpha_i+3)}{\Gamma(\alpha_i+2)}M_i\le\mu_i\quad(i=1,2,\ldots,m). \tag{17}$$

Тогда система уравнений (9) имеет единственное решение $(p_{11},\ldots,p_{m1})$, удовлетворяющее условию

$$\left|p_{i1}-b_i\right|<\mu_i, \tag{18}$$

а система уравнений (15) имеет единственное решение p_{is}, удовлетворяющее условию

$$\left|p_{is}\right|\le\frac{2h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}M_i,\ \left|y_{is-1}(x)+p_{is}-b_i\right|\le\mu_i\quad(i=1,2,\ldots,m;\ s=2,3,\ldots). \tag{19}$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$\Theta(c_i)=c_i-b_i-\frac{1}{h\Gamma(\alpha_i)}\int_a^{a+h}dx\int_a^x\frac{f_i\left[t,c_1,\ldots,c_m\right]}{(x-t)^{1-\alpha_i}}dt,$$

$$\Psi_s(c_i)=c_i-\frac{1}{h\Gamma(\alpha_i)}\int_a^{a+h}dx\int_a^x\frac{f_i\left[t,y_{1s-1}+c_1,\ldots,y_{ms-1}+c_m\right]}{(x-t)^{1-\alpha_i}}dt+$$

$$+\frac{1}{h\Gamma(\alpha_i)}\int_a^{a+h}dx\int_a^x\frac{f_i\left[t,y_{1s-2}+p_{1s-1},\ldots,y_{ms-2}+p_{ms-1}\right]}{(x-t)^{1-\alpha_i}}dt,\ y_{i0}=0\quad(i=1,2,\ldots,m;\ s=3,4,\ldots).$$

Учитывая (5) и (17), получим:

$$\Theta(-\mu_i+b_i)\le-\mu_i+\frac{M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}<0,\ \Theta(\mu_i+b_i)\ge\mu_i-\frac{M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}>0\quad(i=1,2,\ldots,m).$$

Значит, система уравнений $\Theta(c_i)=0$ $(i=1,2,\ldots,m)$ имеет решение $(p_{11},\ldots,p_{m1})$, удовлетворяющее условию (18). Покажем, что это решение, удовлетворяющее условию $-\mu_i+b_i\le p_{i1}\le\mu_i+b_i$, единственное.

Предположим, что существует еще одно решение $(p'_{11},\ldots,p'_{m1})$ системы уравнений $\Theta(c_i)=0$ $(i=1,2,\ldots,m)$, удовлетворяющее условию (18). Тогда

$$\left|p'_{i1}-p_{i1}\right|=\frac{1}{h\Gamma(\alpha_i)}\left|\int_a^{a+h}dx\int_a^x\frac{f_i\left[t,p'_{11},\ldots,p'_{m1}\right]-f_i\left[t,p_{11},\ldots,p_{m1}\right]}{(x-t)^{1-\alpha_i}}dt\right|\le\frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}\left|p'_{i1}-p_{i1}\right|,$$

откуда $\dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}\ge 1$, что противоречит условию (17).

Согласно (7) и (5) $\left|y_{i1}-b_i\right|\le\dfrac{M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}$, откуда

$$b_i - \frac{M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)} \le y_{i1} \le b_i + \frac{M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}, \tag{20}$$

а в силу (17)

$$\frac{M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)} \le \mu_i - \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)} \quad (i=1,2,\ldots,m). \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что

$$b_i - \mu_i + \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)} \le y_{i1}(x) \le b_i + \mu_i - \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)},$$

$$b_i - \mu_i \le y_{i1}(x) + \left|\frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}\right| \le b_i + \mu_i \quad (i=1,2,\ldots,m).$$

Кроме того,

$$\Psi_2\left(-\frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}\right) = -\frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)} -$$

$$-\frac{1}{h\Gamma(\alpha_i)}\int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{f_i\left[t, y_{11} - \frac{2M_1 h^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+2)}, \ldots, y_{m1} - \frac{2M_m h^{\alpha_m}}{\Gamma(\alpha_m+2)}\right] - f_i\left[t, p_{11}, \ldots, p_{m1}\right]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \le$$

$$\le -\frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)} + \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)} = 0 \quad (i=1,2,\ldots,m),$$

и аналогично

$$\Psi_2\left(\frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}\right) \ge \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)} - \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)} = 0 \quad (i=1,2,\ldots,m).$$

Следовательно, система уравнений $\Psi_2(c_i) = 0 \quad (i=1,2,\ldots,m)$ имеет единственное решение $(p_{12},\ldots,p_{m2})$, удовлетворяющее условию $|p_{i2}| \le \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}$, так что $|y_{i1}(x) + p_{i2} - b_i| \le \mu_i$.

Как и выше, непосредственно проверяется, что решение $(p_{12},\ldots,p_{m2})$ – единственное, удовлетворяющее условию $-\frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)} \le p_{i2} \le \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)} \quad (i=1,2,\ldots,m)$. Вообще, если

$$|y_{is-2}(x) + p_{is-1} - b_i| \le \mu_i \quad (s=3,4,\ldots),$$

то таким же образом непосредственно устанавливается, что

$$|y_{is-1}(x) - b_i| \le \frac{M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}; \ -\mu_i + b_i \le y_{is-1} + \left|\frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}\right| \le \mu_i + b_i$$

и что существует единственное решение системы уравнений $\Psi_s(c_i)=0$, удовлетворяющее условию (19). Теорема доказана.

Пусть на отрезке $[a;a+h]$

$$\left|y_{i1}(x)-p_{i1}\right|\le\delta_i,\ \ \delta_i>0, \tag{22}$$

$$\varepsilon_i=\frac{L_ih^{\alpha_i}(\alpha_i+2)}{\Gamma(\alpha_1+2)-L_ih^{\alpha_1}}<1\ \ (i=1,2,\ldots,m). \tag{23}$$

Теорема 2. Пусть $0<\alpha_i<1$, функции $f_i:D\to\mathbb{R}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и выполняются неравенства (22), (23). Тогда каждая из последовательностей функций (14) равномерно сходится на отрезке $[a;a+h]$ к функции y_i соответственно, при этом $(y_1,\ldots,y_m)$ является решением задачи Коши (2) – (3).

Доказательство. Из (13) на основании условий (16) и (22) имеем:

$$\left|p_{i2}\right|\le\frac{L_i}{h\Gamma(\alpha_i)}\int_a^{a+h}dx\int_a^x\frac{\left|y_i(t)+p_{i2}-p_{i1}\right|}{(x-t)^{1-\alpha_i}}dt\le$$

$$\le\frac{L_i\left|p_{i2}\right|}{h\Gamma(\alpha_i)}\int_a^{a+h}dx\int_a^x\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha_i}}+\frac{L_i\delta_i}{h\Gamma(\alpha_i)}\int_a^{a+h}dx\int_a^x\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha_i}}=\frac{L_i\left|p_{i2}\right|h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}+\frac{L_i\delta_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}\ \ (i=1,2,\ldots,m),$$

откуда

$$\left|p_{i2}\right|\le\frac{\dfrac{L_i\delta_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}}{1-\dfrac{L_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}}=\delta_i\frac{\varepsilon_i-\dfrac{L_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}}{1+\dfrac{L_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}}\ \ (i=1,2,\ldots,m), \tag{24}$$

где ε_i определяется равенством (23).

Из (12) на основании неравенств (16), (22) и (24) получим:

$$\left|\delta_{i2}(x)\right|\le\frac{L_i}{\Gamma(\alpha_i)}\int_a^x\frac{\left|y_i(t)+p_{i2}-p_{i1}\right|}{(x-t)^{1-\alpha_i}}dt\le\frac{L_i\delta_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}+\frac{\dfrac{L_i\delta_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}}{1-\dfrac{L_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}}\frac{L_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}=$$

$$=\frac{L_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}\left(\delta_i+\frac{\dfrac{L_i\delta_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}}{1-\dfrac{L_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}}\right)=\frac{\dfrac{L_i\delta_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}}{1-\dfrac{L_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}}\ \ (i=1,2,\ldots,m),$$

поэтому

$$\left|\delta_{i2}(x)\right|+\left|p_{i2}\right|\le\delta_i\varepsilon_i\ \ (i=1,2,\ldots,m). \tag{25}$$

Исходя из (15) при $s=3$ с учетом (16) имеем:

$$\left|p_{i3}\right|\le\frac{L_i}{h\Gamma(\alpha_i)}\int_a^{a+h}dx\int_a^x\frac{\left|\delta_{i2}(t)+p_{i3}-p_{i2}\right|}{(x-t)^{1-\alpha_i}}dt$$

и из неравенства (25) получаем:

$$\left|p_{i3}\right| \le \frac{\delta_i \dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}}{1-\dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}}\varepsilon_i \quad (i=1,2,\ldots,m).$$

Тогда

$$\left|\delta_{i3}(x)\right| \le \frac{L_i}{\Gamma(\alpha_i)}\int_a^x \frac{\left|\delta_{i2}(t)+p_{i3}-p_{i2}\right|}{(x-t)^{1-\alpha_i}}dt \le \frac{\delta_i \dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}}{1-\dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}}\varepsilon_i,$$

поэтому $\left|\delta_{i3}(x)\right|+\left|p_{i3}\right| \le \delta_i\varepsilon_i^2 \quad (i=1,2,\ldots,m)$.

Вообще, если

$$\left|p_{is-1}\right| \le \frac{\delta_i \dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}}{1-\dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}}\varepsilon_i^{s-3}, \quad \left|\delta_{is-1}(x)\right| \le \frac{\delta_i \dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}}{1-\dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}}\varepsilon_i^{s-3},$$

то

$$\left|\delta_{is-1}(x)\right|+\left|p_{is-1}\right| \le \delta_i\varepsilon_i^{s-2},$$

и из (15) следует оценка:

$$\left|p_{is}\right| \le \frac{\delta_i \dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}}{1-\dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}}\varepsilon_i^{s-2} = \delta_i \frac{\varepsilon_i - \dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}}{1+\dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}}\varepsilon_i^{s-2} \quad (i=1,2,\ldots,m;\ s=3,4,\ldots).$$

Тогда

$$\left|\delta_{is}(x)\right| \le \frac{\delta_i \dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}}{1-\dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+2)}}\varepsilon_i^{s-2} \quad (i=1,2,\ldots,m;\ s=3,4,\ldots).$$

Следовательно, в силу неравенства (23) при $s\to+\infty$ функция y_{is} на отрезке $[a;a+h]$ равномерно стремится к предельному значению y_i $(i=1,2,\ldots,m)$, причем $(y_1,\ldots,y_m)$ является решением системы уравнений (6). Теорема доказана.

Оценка модуля разности точного и приближенного решения задачи Коши

Теорема 3. Пусть $0<\alpha_i<1$, функции $f_i : D\to\mathbb{R}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда функции (14) приближают решение $(y_1,\ldots,y_m)$ задачи Коши (2) – (3) на отрезке $[a;a+h]$ так, что выполняются неравенства

$$\left|y_i(x)-y_{is}(x)\right| \le \frac{\delta_i\eta_i}{1-\dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}}\left(1-\frac{2L_i h^{\alpha_i}\left(1-\eta_i^{s-1}\right)}{\Gamma(\alpha_i+1)+L_i h^{\alpha_i}}\right)\varepsilon_i^s,$$

где

$$\eta_i = \frac{\Gamma(\alpha_i+2) - L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)(\alpha_i+2)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Доказательство. Используя (7), (8) и неравенство (16), получим:

$$\left|y_i(x) - y_{i1}(x)\right| = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{\left| f_i\left[t, y_1, \ldots, y_m\right] - f_i\left[t, p_{11}, \ldots, p_{m1}\right]\right|}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \le$$

$$\le \frac{L_i}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{\left|y_i - y_{i1}\right| + \left|y_{i1} - p_{i1}\right|}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \le \delta_i \frac{\dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}}{1 - \dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{26}$$

Из (10) и (16) следует, что

$$\left|y_i(x) - y_{i2}(x)\right| = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{\left| f_i\left[t, y_1, \ldots, y_m\right] - f_i\left[t, y_{11} + p_{12}, \ldots, y_{m1} + p_{m2}\right]\right|}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \le$$

$$\le \frac{L_i}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{\left|y_i - y_{i1}\right| + \left|p_{i2}\right|}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{27}$$

В силу (24) и (27)

$$\left|y_i(x) - y_{i2}(x)\right| \le \left(\delta_i \frac{\dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}}{1 - \dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}} + \delta_i \frac{\varepsilon_i - \dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}}{1 - \dfrac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}} \right) \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)} =$$

$$= \frac{\delta_i L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1) + L_i h^{\alpha_i}} \left(1 + \frac{2 L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1) - L_i h^{\alpha_i}} \eta_i \right) \varepsilon_i,$$

где

$$\eta_i = \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)\varepsilon_i} = \frac{\Gamma(\alpha_i+2) - L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)(\alpha_i+2)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Так как согласно (6), (14) и (16)

$$\left|y_i(x) - y_{is}(x)\right| \le \frac{L_i}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{\left|y_i - y_{is-1} - p_{is}\right|}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \le \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)} \left(\left|y_i - y_{is-1}\right| + \left|p_{is}\right|\right),$$

то из (19) и неравенства

$$\left|y_i(x) - y_{is-1}(x)\right| \le \delta_i \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1) + L_i h^{\alpha_i}} \left(1 + \frac{2 L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1) - L_i h^{\alpha_i}} \eta_i^{s-2} \right) \varepsilon_i^{s-2}$$

следует, что

$$\left|y_i(x) - y_{is}(x)\right| \le \delta_i \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1) + L_i h^{\alpha_i}} \left(1 + \frac{2 L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1) - L_i h^{\alpha_i}} \eta_i^{s-1} \right) \varepsilon_i^{s-1} =$$

$$=\frac{\delta_i\eta_i}{1+\dfrac{L_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}}\left(1+\frac{2L_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)-L_ih^{\alpha_i}}\eta_i^{s-1}\right)\varepsilon_i^s=$$

$$=\frac{\delta_i\eta_i}{1-\dfrac{L_ih^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}}\left(1-\frac{2L_ih^{\alpha_i}\left(1+\eta_i^{s-1}\right)}{\Gamma(\alpha_i+1)+L_ih^{\alpha_i}}\right)\varepsilon_i^s\quad(i=1,2,\ldots,m).$$

Теорема доказана.

Численный пример. Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\left({}^cD_{0+}^{\frac{1}{2}}y_1\right)(x)=y_1(x)-xy_2(x)+\dfrac{8}{3\sqrt{\pi}},\\ \left({}^cD_{0+}^{\frac{1}{2}}y_2\right)(x)=xy_1(x)-x^2y_2(x)+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}},\end{cases}\quad y_1(0)=0,\; y_2(0)=0,\; x\in\left[0,\frac{1}{100}\right],\qquad(28)$$

точное решение которой $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=x$.

В результате реализации рассмотренного выше метода посредством программного пакета Mathematica, уже во втором приближении получим приближенное решение $\left(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2\right)$ задачи (28):

$$\tilde{y}_1(x)=\left(\sqrt{x}\left(3150\sqrt{\pi}x^2+120x^{\frac{5}{2}}\left(8x^2-21\right)-70x^2\left(45\sqrt{\pi}+4\sqrt{x}\left(4x^2-15\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+9x^{\frac{3}{2}}\left(525\pi-64x^3+20\sqrt{\pi x}\left(8x^2-35\right)\right)\right)\right):\left(9\left(525\pi-64x^3+20\sqrt{\pi x}\left(8x^2-35\right)\right)\right),$$

$$\tilde{y}_2(x)=\left(x\left(-56x^{\frac{5}{2}}\left(45\sqrt{\pi}+4\sqrt{x}\left(4x^2-15\right)\right)+9\left(525\pi-64x^2+20\sqrt{\pi x}\left(8x^2-35\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+20x^{\frac{5}{2}}\left(105\sqrt{\pi}+4\sqrt{x}\left(8x^2-21\right)\right)\right)\right):\left(9\left(525\pi-64x^3+20\sqrt{\pi x}\left(8x^2-35\right)\right)\right).$$

В таблице 1 и таблице 2 приведены значения точных и приближенных решений, а также их разности в отдельных точках отрезка $\left[0,\frac{1}{100}\right]$.

Таблица 1

x	0	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01
$y_1(x)$	0	$4\cdot10^{-6}$	$1,6\cdot10^{-5}$	$3,6\cdot10^{-5}$	$6,4\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-4}$
$\tilde{y}_1(x)$	0	$4,000094\cdot10^{-6}$	$1,60076\cdot10^{-5}$	$3,6026\cdot10^{-5}$	$6,40621\cdot10^{-5}$	$1,00122\cdot10^{-4}$
$y_1(x)-\tilde{y}_1(x)$	0	$-9,3694\cdot10^{-10}$	$-7,6051\cdot10^{-9}$	$-2,5959\cdot10^{-8}$	$-6,2126\cdot10^{-8}$	$-1,2238\cdot10^{-7}$

Таблица 2

x	0	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01
$y_2(x)$	0	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01
$\tilde{y}_2(x)$	0	$1,9999\cdot10^{-3}$	$3,9999\cdot10^{-3}$	$5,9999\cdot10^{-3}$	$7,9999\cdot10^{-3}$	$9,9999\cdot10^{-3}$
$y_2(x)-\tilde{y}_2(x)$	0	$1,6693\cdot10^{-11}$	$1,8271\cdot10^{-10}$	$7,3524\cdot10^{-10}$	$1,9653\cdot10^{-9}$	$4,19914\cdot10^{-9}$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.

2. Килбас, А. А. Задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка в весовом пространстве непрерывных функций / А. А. Килбас, С. А. Марзан // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 5. – С. 20–24.

3. Марзан, С. А. Системы нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка в весовых пространствах непрерывных функций / С. А. Марзан // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика, математика, информатика. – 2004. – № 1. – С. 63–68.

4. Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent / M. Caputo // Geophis. J. Astronom. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529–539.

5. Килбас, А. А. Нелинейное дифференциальное уравнение с дробной производной Капуто в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций / А. А. Килбас, С. А. Марзан // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 1. – С. 82–86.

6. Марзан, С. А. Существование и единственность решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с производной Капуто комплексного порядка / С. А. Марзан // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 2. – С. 87–93.

7. Марзан, С. А. Разрешимость задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с производной Капуто комплексного порядка / С. А. Марзан // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2020. – № 1. – С. 65–73.

8. Килбас, А. А. Аппроксимационный метод решения одного класса дифференциальных уравнений дробного порядка / А. А. Килбас, С. А. Марзан // Вес. Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2004. – № 3. – С. 5–9.

9. Марзан, С. А. Итеративный метод приближенного решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто / С. А. Марзан // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2015. – № 2. – С. 79–87.

10. Лучка, А. Ю. Теория и применение метода осреднения функциональных поправок / А. Ю. Лучка. – Киев : Наук. думка, 1969. – 315 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 04.03.2021