УДК 512.542

Екатерина Владимировна Зубей[1], Анна Юрьевна Кулеш[2], Александр Александрович Трофимук[3]
[1]*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*
[2]*магистрант физико-математического факультета Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*
[3]*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*

Yekaterina Zubei[1], Anna Kulesh[2], Aleksandr Trofimuk[3]
[1]*PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling at the Brest State A. S. Pushkin University*
[2]*Master's Student of the Faculty of Physics and Mathematics at the Brest State A. S. Pushkin University*
[3]*PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling at the Brest State A. S. Pushkin University*
e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru

ПРИЗНАКИ РАСШИРЕННОЙ СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ, ФАКТОРИЗУЕМОЙ ВЗАИМНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Говорят, что подгруппы A и B взаимно перестановочны, если $UB = BU$ и $AV = VA$ для всех $U \leq A$ и $V \leq B$. Здесь запись $Y \leq X$ означает, что Y – подгруппа группы X. Получены признаки расширенной сверхразрешимости группы $G = AB$, факторизуемой взаимно перестановочными сомножителями A и B.

Sufficient Conditions of Widely Supersolubility of Finite Group that is Factorized by Mutually Permutable Subgroups

The subgroups A and B of a group G are called mutually permutable if $UB = BU$ and $AV = VA$ for all $U \leq A$ and $V \leq B$. The notation $Y \leq X$ means that Y is a subgroup of X. The sufficient conditions of widely supersolubility of a group $G = AB$ that is factorized by two mutually permutable subgroups A and B, are obtained.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1]. Запись $Y \leq X$ означает, что Y – подгруппа группы X.

Подгруппы A и B группы G называются *взаимно перестановочными*, если A перестановочна со всеми подгруппами из B и B перестановочна со всеми подгруппами из A. М. Асаад и А. Шаалан установили сверхразрешимость группы $G = AB$ с взаимно перестановочными сверхразрешимыми подгруппами A и B при условии, что B нильпотентена [2, теорема 3.2], и в случае, когда коммутант G' нильпотентен [2, теорема 3.8]. Обзор результатов о взаимно перестановочных подгруппах по состоянию на 2010 г. содержится в монографии [3, разделы 4–5].

Согласно теореме Хупперта, сверхразрешимую группу можно определить как группу, в которой все максимальные подгруппы имеют простые индексы. Отсюда следует, что в сверхразрешимой группе G для каждой собственной подгруппы H существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G,\ |H_i : H_{i-1}| \in P,\ \forall i. \quad (1)$$

Поэтому вполне естественно следующее определение, предложенное в [4].

Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-*субнормальной* в G, если либо $H = G$, либо существует цепочка подгрупп (1). В работах [4; 5] изучен класс групп с $\mathbb{P}$-субнормальными силовскими подгруппами. Группа G называется *расширенно сверхразрешимой* (кратко w-*сверхразрешимой*), если любая примарная подгруппа группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G. Через $\mathrm{w}\mathrm{U}$ обозначается класс всех w-сверхразрешимых групп. Заметим, что класс U всех сверхразрешимых групп содержится в $\mathrm{w}\mathrm{U}$.

В настоящей работе получили развитие результаты работы [2] на расширенно сверхразрешимый случай. Доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть группа $G = AB$ является взаимно перестановочным произведением w-сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если корадикал $G^{\mathcal{A}}$ нильпотентен, то G w-сверхразрешима*;

(2) $G^{\mathrm{wU}} = (G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}}$;

(3) *если N – минимальная нормальная подгруппа в G, то подгруппы AN и BN w-сверхразрешимы*;

(4) *если B нильпотентна, то G w-сверхразрешима*;

(5) *если $(|A/A^{\mathcal{A}}|, |B/B^{\mathcal{A}}|) = 1$, то G w-сверхразрешима.*

Здесь N и $\mathcal{A}$ – формации всех нильпотентных групп и групп с абелевыми силовскими подгруппами соответственно.

Вспомогательные результаты

Приведем известные результаты, которые неоднократно будут использоваться в доказательствах. Группа называется сверхразрешимой, если порядки ее главных факторов являются простыми числами. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой, а группа с нормальной p'-холловой подгруппой называется p-нильпотентной.

Через G', $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в G p- и p'-подгруппы соответственно; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G; AãB – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [1; 6; 7].

Напомним, что класс F называется *замкнутым относительно фактор-групп*, или *гомоморфом*, когда выполняется требование: если $G \in \mathrm{F}$ и $N \lhd G$, то $G/N \in \mathrm{F}$. Класс F называется *замкнутым относительно подпрямых произведений*, когда выполняется требование: если $G/N_1 \in \mathrm{F}$ и $G/N_2 \in \mathrm{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathrm{F}$. *Формацией* называется класс, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений. Формация F называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathrm{F}$ следует, что $G \in \mathrm{F}$.

Пусть F – некоторая формация групп и G – группа. Тогда G^{F} – F-корадикал группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathrm{F}$. Произведение формаций F и H состоит из всех групп G, для которых $G^{\mathrm{H}} \in \mathrm{F}$, т. е. $\mathrm{FH} = \{G \in G | G^{\mathrm{H}} \in \mathrm{F}\}$. Будем считать, что $\mathrm{F}^2 = \mathrm{FF}$.

Всякая функция $f\colon \mathbb{P} \to \{\text{формации}\}$ называется локальным экраном. Формация F называется локальной, если существует локальный экран f, такой, что F совпадает с классом групп G таких, что $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K группы G и $p \in \pi(H/K)$, и обозначается через $\mathrm{F} = LF(f)$. В [5, гл. I, § 4]) доказано утверждение: *пусть f – локальный экран формации F. Группа G принадлежит F*

тогда и только тогда, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ *для любого* $p \in \pi(G)$. Здесь $F_p(G)$ – наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G. По [6, теорема IV.3.7], для локальной формации F всегда существует локальный экран f такой, что $\mathrm{F} = LF(f)$, $f(p) \subseteq \mathrm{F}$ и $f(p) = \mathrm{N}_p f(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Такой экран f называется максимальным внутренним локальным экраном формации F. По [6, теорема IV.4.6], всякая локальная формация является насыщенной формацией и наоборот.

Лемма 2.1. *Пусть* F *– насыщенная формация. Предположим, что группа* G *не принадлежит* F, *но* $G/K \in \mathrm{F}$ *для всех неединичных нормальных в* G *подгрупп* K. *Тогда* G *– примитивная группа.*

Доказательство. Если $\Phi(G) \neq 1$, то по условию $G/\Phi(G) \in \mathrm{F}$, а поскольку F – насыщенная формация, то $G \in \mathrm{F}$ – противоречие. Значит, $\Phi(G) = 1$. Если в группе G имеются две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2, то $N_1 \cap N_2 = 1$. По условию $G/N_1 \in \mathrm{F}$ и $G/N_2 \in \mathrm{F}$, а поскольку F – формация, то $G = G/(N_1 \cap N_2) \in \mathrm{F}$ – противоречие. Значит группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N. Так как $\Phi(G) = 1$, то существует максимальная подгруппа M, не содержащая подгруппу N. Ясно, что $G = MN$. Если $Core_G M \neq 1$, то из единственности минимальной нормальной подгруппы N следует, что $N \subseteq Core_G M$ и $G = MN = M$ – противоречие. Поэтому $Core_G M = 1$ и G – примитивная группа с примитиватором M.

Лемма 2.2 ([8, теорема II.3.2]). *Пусть* G *– примитивная разрешимая группа и* M *– примитиватор группы* G. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\Phi(G) = 1$;

(2) *группа* G *содержит единственную минимальную нормальную подгруппу* N, *причем* $N = C_G(N)$ *и* $G = [N]M$;

(3) $N = F(G) = O_p(G)$ *для некоторого* $p \in \pi(G)$ *и* $O_p(M) = 1$.

Лемма 2.3 ([4, теорема 2.7, предложение 2.8, теорема 2.13]).

1. *Класс* wU *является насыщенной наследственной формацией.*

2. *Каждая* w*-сверхразрешимая группа имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.*

3. *Метанильпотентные и бипримарные подгруппы* w*-сверхразрешимой группы сверхразрешимы.*

4. *Если* $G \in \mathrm{wU}$, *то корадикал* $G^{\mathcal{A}}$ *нильпотентен.*

5. *Формация* $w\mathrm{U}$ *является локальной и имеет локальный экран* f *такой, что* $f(p) = (H \in \mathrm{Ы} | Syl(H) \in \mathrm{A}(p-1))$ *для любого простого* p.

Здесь $\mathrm{Ы}$ – формация всех разрешимых групп, а $\mathrm{A}(p-1)$ – формация всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$.

Лемма 2.4 ([9, лемма 2.16]). *Пусть* F *– насыщенная формация, содержащая* U *и* G *– группа с нормальной подгруппой* E *такой, что* $G/E \in \mathrm{F}$. *Если* E *циклическая, то* $G \in \mathrm{F}$.

Лемма 2.5 ([1, лемма 5.8; теорема 5.11]). *Пусть* F *и* H *– формации,* G *– группа и* K *– нормальная в* G *подгруппа. Тогда:*

(1) $(G/K)^{\mathrm{F}} = G^{\mathrm{F}}K/K$;

(2) $G^{\mathrm{FH}} = (G^{\mathrm{H}})^{\mathrm{F}}$;

(3) *если* $Y \leq X$ и F *– наследственная формация*, то $Y^{\mathrm{F}} \leq X^{\mathrm{F}}$;

(4) *если* $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{F}$, *то* $G^{\mathrm{F}} \leq G^{\mathrm{H}}$.

Доказательство. Утверждения (1) – (2) следуют из [1, лемма 5.8; теорема 5.11]. Проверим утверждение (3). Так как X^{F} нормальна в X, то YX^{F} – подгруппа группы X.

Тогда

$$Y/Y \cap X^{\mathrm{F}} \simeq YX^{\mathrm{F}}/X^{\mathrm{F}} \in \mathrm{F},$$

т. к. F – наследственная формация. Поэтому $Y^{\mathrm{F}} \leq Y \cap X^{\mathrm{F}} \leq X^{\mathrm{F}}$. Утверждение (4) очевидно.

Лемма 2.6 ([2, следствие 3.6]). *Пусть H и K – подгруппы группы G и $G = HK$. Предположим, что H и K взаимно перестановочны. Тогда группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, если H и K имеют силовские башни сверхразрешимого типа.*

Доказательство теоремы

1. По лемме 2.6, группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, а, значит, разрешима. Пусть группа G – контрпример наименьшего порядка.

Если N – неединичная нормальная в G подгруппа, то подгруппы AN/N и BN/N взаимно перестановочны по [3, лемма 4.1.10] и w-сверхразрешимы по лемме 2.3 (1). Так как по лемме 2.5

$$(G/N)^{\mathcal{A}} = G^{\mathcal{A}}N/N \simeq G^{\mathcal{A}}/G^{\mathcal{A}} \cap N,$$

то корадикал $(G/N)^{\mathcal{A}}$ нильпотентен и по индукции фактор-группа G/N w-сверхразрешима.

Пусть $W = G^{\mathcal{A}}$. Так как формация $\mathrm{w}\,\mathrm{U}$ насыщенная по лемме 2.3, то группа G примитивна по лемме 2.1. Поэтому по лемме 2.2 $\Phi(G) = 1$, $N = C_G(N) = F(G) = O_p(G) = W$ – единственная минимальная нормальная в G подгруппа.

Кроме того, $G = [N]M$, $M \in \mathcal{A}$, $N = P$ – силовская p-подгруппа группы G, где p – наибольшее из $\pi(G)$.

По [3, лемма 4.3.3(4)], $\{N \cap A, N \cap B\} = \{1, N\}$. Если $A \cap N = 1 = B \cap N$, то по [3, лемма 4.3.9], $|N| = p$ и группа $G \in \mathrm{w}\,\mathrm{U}$ по лемме 2.4 – противоречие. Если $N \leq A$ и $B \cap N = 1$, то по [3, лемма 4.3.3(5)], N нециклическая и $N \leq C_G(B)$. Тогда $B \leq C_G(N) = N$ и $G = AB = AN = A$ – противоречие.

Пусть $N \leq A \cap B$. Очевидно, что $F_p(A) = N = F_p(B)$. Следовательно $A/F_p(A) = A/N \in f(p) = (H \in \mathrm{Ы} | Syl(H) \in \mathrm{A}(p-1))$ по лемме 2.3 (5), т. к. A w-сверхразрешима. Аналогично получаем, что $B/N \in f(p)$. Заметим также, что $M = (A \cap N)(B \cap N)$. Так как $A \cap N \simeq A/N \in f(p)$ и $B \cap N \simeq B/N \in f(p)$, то $M \in f(p)$, поскольку по условию $M \in \mathcal{A}$. Так как $G/F_p(G) = G/N \simeq M \in f(p) = (H \in \mathrm{Ы} | Syl(H) \in \mathrm{A}(p-1))$, то следует, что G w-сверхразрешима – противоречие.

2. Если группа G w-сверхразрешима, то $G^{\mathrm{w}\,\mathrm{U}} = 1$ и $G^{\mathcal{A}}$ нильпотентна по лемме 2.3 (4). Следовательно, $G^{\mathrm{w}\,\mathrm{U}} = 1 = (G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}}$, и утверждение справедливо. Далее считаем, что группа G не является w-сверхразрешимой. Поскольку $\mathrm{w}\,\mathrm{U} \subseteq \mathrm{N}\mathcal{A}$, то

$$G^{(\mathrm{N}\mathcal{A})} = (G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}} \leq G^{\mathrm{w}\,\mathrm{U}}$$

по лемме 2.5 (2, 4). Проверим обратное включение. Для этого надо доказать, что фактор-группа $G/(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}}$ w-сверхразрешима. Из леммы 2.5 (1) получаем

$$(G/(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}})^{\mathcal{A}} = G^{\mathcal{A}}(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}}/(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}} = G^{\mathcal{A}}/(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}}$$

и $(G/(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}})^{\mathcal{A}}$ нильпотентна. Фактор-группа

$$G/(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}} = (A(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}}/(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}})(B(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}}/(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}},$$

$$A(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}}/(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}} \simeq A/A \cap (G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}},$$

$$B(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}}/(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}} \simeq B/B \cap (G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}},$$

поэтому по лемме 2.3 (1) подгруппы $A(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}}/(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}}$ и $B(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}}/(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}}$ w-сверхразрешимы, а по [3, лемма 4.1.10] они взаимно перестановочны. По п. 1 фактор-группа $G/(G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}}$ w-сверхразрешима и $G^{\mathrm{w}\,\mathrm{U}} \leq (G^{\mathcal{A}})^{\mathrm{N}}$.

3. По [3, лемма 4.3.3(4)], $\{N \cap A, N \cap B\} = \{1, N\}$. Если $N \leq A \cap B$, то $AN = A \in \mathrm{w}\,\mathrm{U}$ и $BN = B \in \mathrm{w}\,\mathrm{U}$. Если $A \cap N = 1 = B \cap N$, то по [3, лемма 4.3.9] $|N| = p$. Тогда $AN/N \simeq A \in \mathrm{w}\,\mathrm{U}$. По лемме 2.4 $AN \in \mathrm{w}\,\mathrm{U}$. Аналогично $BN \in \mathrm{w}\,\mathrm{U}$.

Если $N \leq A$ и $B \cap N = 1$, то $AN = A \in \mathrm{w}\,\mathrm{U}$. По [3, лемма 4.3.3(5)], N нециклическая и $N \leq C_G(B)$. Тогда $BN = B \times N$ и $BN \in \mathrm{w}\,\mathrm{U}$ по лемме 2.3.

4. По лемме 2.6, группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, а значит, разрешима. Пусть группа G – контрпример наименьшего порядка.

Если N – неединичная нормальная в G подгруппа, то подгруппы AN/N и BN/N взаимно перестановочны по [3, лемма 4.1.10], AN/N w-сверхразрешима по лемме 2.3 (1), а BN/N нильпотентна. По индукции G/N w-сверхразрешима. Так как формация $\mathrm{w}\,\mathrm{U}$ насыщенная по лемме 2.3 (1), то группа G примитивна по лемме 2.1. Поэтому по лемме 2.2 $\Phi(G) = 1$, $N = C_G(N) = F(G) = O_p(G)$ – единственная минимальная нормальная в G подгруппа. Кроме того, $G = [N]M$, $N = P$ – силовская p-подгруппа группы G, где p – наибольшее из $\pi(G)$.

По [3, лемма 4.3.3(4)], $\{N \cap A, N \cap B\} = \{1, N\}$. Если $A \cap N = 1 = B \cap N$, то по [3, лемма 4.3.9], $|N| = p$ и группа $G \in \mathrm{w}\,\mathrm{U}$ по лемме 2.4 – противоречие.

Если $N \leq B$, то B – p-группа, поскольку $N = C_G(N)$. Поэтому $N = B$, так как N – силовская p-подгруппа группы G. По п. 3, $G = AB = AN$ w-сверхразрешима.

Если $N \nleq B$, то $B \cap N = 1$ и $N \leq A$. По [3, лемма 4.3.3(5)], N нециклическая и $N \leq C_G(B)$. Тогда $B \leq C_G(N) = N$ и $G = AB = AN = A$ – противоречие.

5. Предположим, что теорема неверна и G – контрпример минимального порядка. По лемме 2.6, группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Если N – неединичная нормальная в G подгруппа, то AN/N и BN/N взаимно перестановочны по [3, лемма 4.1.10], $AN/N \simeq A/A \cap N$ и $\frac{BN}{N} \simeq \frac{B}{B} \cap N$, w-сверхразрешимы по лемме 2.3 (1). Из леммы 2.5 следует, что

$$(|(AN/N)/(AN/N)^{\mathcal{A}}|, |(BN/N)/(BN/N)^{\mathcal{A}}|) =$$
$$= (|AN/(AN)^{\mathcal{A}}N|, |BN/(BN)^{\mathcal{A}}N|) =$$
$$= (|AN/A^{\mathcal{A}}N|, |BN/B^{\mathcal{A}}N|) = (\frac{|A/A^{\mathcal{A}}|}{|S_1|}, \frac{|B/B^{\mathcal{A}}|}{|S_2|}),$$
$$S_1 = (A \cap N)/(A^{\mathcal{A}} \cap N), \qquad S_2 = (B \cap N)/(B^{\mathcal{A}} \cap N).$$

Так как $(|A/A^{\mathcal{A}}|, |B/B^{\mathcal{A}}|) = 1$, то

$$(|(AN/N)/(AN/N)^{\mathcal{A}}|, |(BN/N)/(BN/N)^{\mathcal{A}}|) = 1.$$

Фактор-группа $G/N = (AN/N)(BN/N)$ w-сверхразрешима по индукции.

Так как по лемме 2.3 (1) формация всех w-сверхразрешимых групп насыщена, то G – примитивная группа по лемме 2.1. Из леммы 2.2 следует, что $F(G) = N = G_p$ – единственная минимальная нормальная в G подгруппа, $N = C_G(N)$, p – наибольшее в $\pi(G)$.

Из п. 4 следует, что AN w-сверхразрешима. Если $AN = G$, то G w – сверхразрешима – противоречие. Поэтому в дальнейшем считаем, что AN и BN – собственные подгруппы в G.

По лемме 2.3 (4), $(AN)^{\mathcal{A}}$ нильпотентна. Так как $N = C_G(N)$, то $(AN)^{\mathcal{A}}$ – p-группа. Поскольку $AN/(AN)^{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$, то все силовские r-подгруппы из A абелевы,

$r \neq p$. Так как $A_p \leq G_p$, где A_p – силовская p-подгруппа из A, то $A \in \mathcal{A}$. Аналогично, $B \in \mathcal{A}$. Поэтому $A^{\mathcal{A}} = 1 = B^{\mathcal{A}}$ и $(|A|, |B|) = (|A/A^{\mathcal{A}}|, |B/B^{\mathcal{A}}|) = 1$. Очевидно, что G w-сверхразрешима – противоречие. Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
2. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
3. Ballester-Bolinches, A. Products finite groups / A. Ballester-Bolinches, R. Estaban-Romero, M. Asaad. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 2010. – 334 p.
4. Васильев, А. Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
5. Васильев, А. Ф. О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 21–27.
6. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
7. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. – 899 p.
8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Heidelberg ; Berlin : Springer-Verlag GmbH, 1967. – 796 p.
9. Skiba, A. N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 04.03.2021