УДК 512.542

***Дмитрий Владимирович Грицук*[1], *Степан Васильевич Курилюк*[2],**
***Александр Александрович Трофимук*[3]**

[1]*канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики*
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]*магистрант физ.-мат. факультета*
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[3]*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования*
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

***Dmitrij Gritsuk*[1], *Stepan Kurilyuk*[2], *Aleksandr Trofimuk*[3]**

[1]*PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,*
Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
at the Brest State A. S. Pushkin University
[2]*Master's Student of the Faculty of Physics and Mathematics*
at the Brest State A. S. Pushkin University
[3]*PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,*
Assistant Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling
at the Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: dmitrygritsuk@gmail.com

О КОРАДИКАЛЕ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ, ФАКТОРИЗУЕМОЙ ВЗАИМНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Говорят, что подгруппы A и B взаимно перестановочны, если $UB = BU$ и $AV = VA$ для всех $U \leq A$ и $V \leq B$. Здесь запись $Y \leq X$ означает, что Y – подгруппа группы X. Установлено строение $\mathfrak{F}$-корадикала группы $G = AB$, факторизуемой взаимно перестановочными $\mathfrak{F}$-сомножителями A и B, где $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация такая, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Здесь $\mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп. В частности, $\mathfrak{F}$-корадикал такой группы содержится в нильпотентном корадикале коммутанта группы.

On the Residual of Finite Group that is Factorized by Mutually Permutable Subgroups

The subgroups A and B of a group G are called mutually permutable if $UB = BU$ and $AV = VA$ for all $U \leq A$ and $V \leq B$. The notation $Y \leq X$ means that Y is a subgroup of X. The structure of the $\mathfrak{F}$-residual of a group $G = AB$ that is factorized by two mutually permutable $\mathfrak{F}$-subgroups A and B, is established, where $\mathfrak{F}$ is a saturated formation such that $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Here $\mathfrak{U}$ is the formation of all supersoluble groups. In particular, the $\mathfrak{F}$-residual of such group G is contained in the nilpotent residual of the derived subgroup of G.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1]. Запись $Y \leq X$ означает, что Y – подгруппа группы X.

Подгруппы A и B группы G называются *взаимно перестановочными*, если A перестановочна со всеми подгруппами из B и B перестановочна со всеми подгруппами из A. М. Асаад и А. Шаалан в [2] первыми получили результаты о строении групп, представимых в виде произведения взаимно перестановочных подгрупп. В частности, ими доказана сверхразрешимость группы $G = HK$, у которой коммутант G' нильпотентен и подгруппы H и K сверхразрешимы [2, теорема 3.8].

Обзор результатов о взаимно перестановочных подгруппах по состоянию на 2010 г. содержится в монографии А. Баллестера-Болинше с соавторами [3, разделы 4–5].

В работе [4, теорема 2.1] В. С. Монахов установил, что сверхразрешимый корадикал факторизуемой группы $G = AB$ с взаимно перестановочными сверхразрешимыми сомножителями A и B совпадает с нильпотентным корадикалом взаимного коммутанта подгрупп A и B.

В настоящей статье результатов работы [4] получили развитие. Доказана следующая теорема.

Теорема 1.1 *Пусть* $G = AB$, *где* A *и* B *– взаимно перестановочные подгруппы группы* G.

1. *Пусть* F *– насыщенная формация, такая, что* $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{F}$. *Если подгруппы* A *и* B принадлежат F, то $G^{\mathrm{F}} \leq (G')^{\mathrm{N}}$.

2. *Пусть* $(|G{:}A|, |G{:}B|) = 1$. *Если* A *и* B *сверхразрешимы, то*

$$G^{\mathrm{U}} = G^{\mathrm{N}^2} \cap \mathrm{B}(G) = (G')^{\mathrm{N}} = [A, B]^{\mathrm{N}}.$$

Здесь $\mathrm{B}(G)$ – пересечение всех нормальных в G подгрупп, фактор-группы по которым примарны или бипримарны. Более точно, пусть p, q – простые числа и $\mathrm{S}_{\{p,q\}}$ – формация всех $\{p, q\}$-групп. Для группы G, $|\pi(G)| > 2$, введем следующее обозначение:

$$\mathrm{B}(G) = \bigcap_{\forall\{p,q\} \subseteq \pi(G)} G^{\mathrm{S}\{p,q\}}.$$

Если $|\pi(G)| \leq 2$, то считаем $\mathrm{B}(G) = 1$.

Вспомогательные результаты

Приведем известные результаты, которые неоднократно будут использоваться в доказательствах. Группа называется *сверхразрешимой*, если порядки ее главных факторов являются простыми числами. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется *p-замкнутой*, а группа с нормальной p'-холловой подгруппой называется *p-нильпотентной*.

Через G', $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в G p- и p'-подгруппы соответственно; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G; $[A]B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [1; 5; 6].

Напомним, что класс F называется *замкнутым относительно фактор-групп* или *гомоморфом*, когда выполняется требование: если $G \in \mathrm{F}$ и $N \lhd G$, то $G/N \in \mathrm{F}$. Класс F называется *замкнутым относительно подпрямых произведений*, когда выполняется требование: если $G/N_1 \in \mathrm{F}$ и $G/N_2 \in \mathrm{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathrm{F}$. *Формацией* называется класс, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений. Формация F называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathrm{F}$ следует, что $G \in \mathrm{F}$.

Пусть F – некоторая формация групп и G – группа. Тогда G^{F} – F-*корадикал* группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathrm{F}$. Произведение формаций F и H состоит из всех групп G, для которых $G^{\mathrm{H}} \in \mathrm{F}$, т. е. $\mathrm{FH} = \{G \in G | G^{\mathrm{H}} \in \mathrm{F}\}$. Будем считать, что $\mathrm{F}^2 = \mathrm{FF}$. Через U, N, N^2 обозначаются формации всех сверхразрешимых групп, нильпотентных и метанильпотентных групп соответственно.

Всякая функция $f{:}\,\mathbb{P} \to \{\text{формации}\}$ называется *локальным экраном*. Формация F называется *локальной*, если существует локальный экран f, такой, что F совпадает с классом групп G таких, что $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K группы G и $p \in \pi(H/K)$, и обозначается через $\mathrm{F} = LF(f)$. В [5, гл. I, § 4]) доказано утверждение: *пусть f – локальный экран формации* F. *Группа G принадлежит* F *тогда и только тогда, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.* Здесь $F_p(G)$ – наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G. По [6, теорема IV.3.7], для локальной формации F всегда существует локальный экран f, такой, что $\mathrm{F} = LF(f)$, $f(p) \subseteq \mathrm{F}$ и $f(p) = \mathrm{N}_p f(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Такой экран f называется *максимальным внутренним локальным экраном* формации F. По [6, теорема IV.4.6], всякая локальная формация является насыщенной формацией и наоборот.

Лемма 2.1 *Пусть F – насыщенная формация. Предположим, что группа G не принадлежит F, но $G/K \in \mathrm{F}$ для всех неединичных нормальных в G подгрупп K. Тогда G – примитивная группа.*

Доказательство. Если $\Phi(G) \neq 1$, то по условию $G/\Phi(G) \in \mathrm{F}$, а поскольку F – насыщенная формация, то $G \in \mathrm{F}$ – противоречие. Значит, $\Phi(G) = 1$. Если в группе G имеются две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2, то $N_1 \cap N_2 = 1$. По условию $G/N_1 \in \mathrm{F}$ и $G/N_2 \in \mathrm{F}$, а поскольку F – формация, то $G = G/(N_1 \cap N_2) \in \mathrm{F}$ – противоречие. Значит, группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N. Так как $\Phi(G) = 1$, то существует максимальная подгруппа M, не содержащая подгруппу N. Ясно, что $G = MN$. Если $Core_G M \neq 1$, то из единственности минимальной нормальной подгруппы N следует, что $N \subseteq Core_G M$ и $G = MN = M$ – противоречие. Поэтому $Core_G M = 1$ и G – примитивная группа с примитиватором M.

Лемма 2.2 ([7, теорема II.3.2]). *Пусть G – примитивная разрешимая группа и M – примитиватор группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\Phi(G) = 1$;

(2) *группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, причем $N = C_G(N)$ и $G = [N]M$;*

(3) $N = F(G) = O_p(G)$ *для некоторого* $p \in \pi(G)$ *и* $O_p(M) = 1$.

Лемма 2.3 ([8, лемма 7]). *Пусть F – формация, G – группа, A и B – подгруппы группы G такие, что A и B принадлежат F. Если $[A, B] = 1$, то $AB \in \mathrm{F}$.*

Лемма 2.4 ([9, лемма 2.16]). *Пусть F – насыщенная формация, содержащая U и G – группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathrm{F}$. Если E циклическая, то $G \in \mathrm{F}$.*

Лемма 2.5 ([1, лемма 5.8; теорема 5.11]). *Пусть F и H – формации, G – группа и K – нормальная в G подгруппа. Тогда:*

(1) $(G/K)^{\mathrm{F}} = G^{\mathrm{F}}K/K$;

(2) $G^{\mathrm{FH}} = (G^{\mathrm{H}})^{\mathrm{F}}$;

(3) *если* $Y \leq X$ и F *– наследственная формация*, то $Y^{\mathrm{F}} \leq X^{\mathrm{F}}$;

(4) *если* $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{F}$, *то* $G^{\mathrm{F}} \leq G^{\mathrm{H}}$.

Доказательство. Утверждения (1) – (2) следуют из [1, лемма 5.8; теорема 5.11]. Проверим утверждение (3). Так как X^{F} нормальна в X, то YX^{F} подгруппа группы X. Тогда

$$Y/Y \cap X^{\mathrm{F}} \simeq YX^{\mathrm{F}}/X^{\mathrm{F}} \in \mathrm{F},$$

т. к. F – наследственная формация. Поэтому $Y^{\mathrm{F}} \leq Y \cap X^{\mathrm{F}} \leq X^{\mathrm{F}}$. Утверждение (4) очевидно.

Лемма 2.6 ([2, следствие 3.6]). *Пусть H и K – подгруппы группы G и $G = HK$. Предположим, что H и K взаимно перестановочны. Тогда группа G имеет силовскую* *башню сверхразрешимого типа, если H и K имеют силовские башни сверхразрешимого типа.*

Лемма 2.7 ([10, следствие 3.1]). *Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты, то группа G сверхразрешима.*

Лемма 2.8. *Пусть A и B – взаимно перестановочные сверхразрешимые подгруппы группы G взаимно простых индексов. Если G метанильпотентна, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Поскольку $(|G:A|, |G:B|) = 1$, то $G = AB$. По лемме 2.6, группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, а значит, разрешима. Предположим противное, что $G \not\in \mathrm{U}$. Если N – неединичная нормальная в G подгруппа, то подгруппы AN/N и BN/N взаимно перестановочны по [3, лемма 4.1.10]. По индукции, G/N сверхразрешима. По лемме 2.1, G примитивна, а из леммы 2.2 получаем, что $G = [N]M$ – примитивная группа, где M – максимальная подгруппа группы G и $N = F(G) = G_p = C_G(N)$ – единственная минимальная нормальная в G подгруппа, p – наибольшее простое число из $\pi(G)$.

По [3, лемма 4.3.3(4)], $\{N \cap A, N \cap B\} = \{1, N\}$. Если $A \cap N = 1 = B \cap N$, то $(|G:A|, |G:B|) \neq 1$ – противоречие. Если $N \leq A$ и $B \cap N = 1$, то по [3, лемма 4.3.3(5)], N нециклическая и $N \leq C_G(B)$. Тогда $B \leq C_G(N) = N$ и $G = AB = AN = A$ – противоречие.

Пусть $N \leq A \cap B$. Так как G/N нильпотентна, то A и B субнормальны в G. Теперь группа $G = AB$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B взаимно простых индексов. Согласно лемме 2.7, группа G сверхразрешима.

Лемма 2.9. *Пусть A и B – взаимно перестановочные сверхразрешимые подгруппы группы G взаимно простых индексов. Если $|\pi(G)| \leq 2$, то G сверхразрешима.*

Доказательство. По лемме 2.6 группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. По условию $|\pi(G)| \leq 2$, поэтому G метанильпотентна. По лемме 2.8, группа G сверхразрешима.

Доказательство теоремы

1. Рассмотрим случай, когда коммутант G' нильпотентен. Тогда группа G разрешима. Предположим противное, что $G \not\in \mathrm{F}$. Если N – неединичная нормальная в G подгруппа, то подгруппы AN/N и BN/N взаимно перестановочны по [3, лемма 4.1.10] и принадлежат F ввиду того, что F – формация. Так как

$$(G/N)' = G'N/N \simeq G'/G' \cap N,$$

то коммутант $(G/N)'$ нильпотентен. Следовательно, по индукции $G/N \in \mathrm{F}$. Так как формация F насыщенная, то группа G примитивна по лемме 2.1. Поэтому $\Phi(G) = 1$, $N = C_G(N) = F(G) = O_p(G)$ – единственная минимальная нормальная в G подгруппа по лемме 2.2. Так как G' нильпотентен, то $N = G'$ и G/N абелева.

По [3, лемма 4.3.3(4)], $\{N \cap A, N \cap B\} = \{1, N\}$. Если $A \cap N = 1 = B \cap N$, то по [3, лемма 4.3.9], $|N| = p$ и группа $G \in \mathrm{F}$ по лемме 2.4. – противоречие. Если $N \leq A$ и $B \cap N = 1$, то по [3, лемма 4.3.3(5)], N нециклическая и $N \leq C_G(B)$. Тогда $B \leq C_G(N) = N$ и $G = AB = AN = A$ – противоречие.

Пусть $N \leq A \cap B$. Тогда A и B нормальны в G. Поэтому $F_p(A) = N = F_p(B)$. Так как F – насыщенная формация, то существует внутренний максимальный локальный экран f, такой, что $\mathrm{F} = LF(f)$, $f(p) \subseteq \mathrm{F}$ и $f(p) = \mathrm{N}_p f(p)$. Тогда по определению локального экрана $A/N \in f(p)$ и $B/N \in f(p)$. Поскольку $f(p)$ – формация, то по лемме 2.3 $G/N \in f(p)$. Так как $N \in \mathrm{N}_p$, то $G \in \mathrm{N}_p f(p) = f(p) \subseteq \mathrm{F}$. Значит, предположение неверно.

Пусть $(G')^{\mathrm{N}} \neq 1$. Покажем, что фактор-группа $G/(G')^{\mathrm{N}}$ принадлежит формации F. Так как

$$(G/(G')^{\mathrm{N}})' = G'(G')^{\mathrm{N}}/(G')^{\mathrm{N}} = G'/(G')^{\mathrm{N}},$$

то коммутант $(G/(G')^{\mathrm{N}})'$ нильпотентен. Фактор-группа

$$G/(G')^{\mathrm{N}} = (A(G')^{\mathrm{N}}/(G')^{\mathrm{N}})(B(G')^{\mathrm{N}}/(G')^{\mathrm{N}}),$$
$$A(G')^{\mathrm{N}}/(G')^{\mathrm{N}} \simeq A/A \cap (G')^{\mathrm{N}}, \qquad B(G')^{\mathrm{N}}/(G')^{\mathrm{N}} \simeq B/B \cap (G')^{\mathrm{N}},$$

поэтому подгруппы $A(G')^{\mathrm{N}}/(G')^{\mathrm{N}}$ и $B(G')^{\mathrm{N}}/(G')^{\mathrm{N}}$ принадлежат формации F и взаимно перестановочны по [3, лемма 4.1.10].

По доказанному выше, фактор-группа $G/(G')^{\mathfrak{N}}$ принадлежит формации F.

2. Сначала докажем, что $G^{\mathrm{U}} = G^{\mathrm{N}^2} \cap \mathrm{B}(G)$. Очевидно, что все фактор-группы наследуют условие теоремы. Так как $G/G^{\mathrm{N}^2} \in \mathrm{N}^2$, то G/G^{N^2} сверхразрешима по лемме 2.8, поэтому $G^{\mathrm{U}} \leq G^{\mathrm{N}^2}$. Поскольку $G/G^{\mathrm{S}\{p,q\}} \in \mathrm{S}_{\{p,q\}}$, то $G/G^{\mathrm{S}\{p,q\}}$ сверхразрешима по лемме 2.9. По лемме Ремака [1, лемма 2.33] фактор-группа $G/\mathrm{B}(G)$ изоморфна подгруппе прямого произведения

$$\prod_{\forall\{p,q\}\subseteq\pi(G)} G/G^{\mathrm{S}\{p,q\}}.$$

Поэтому $G/\mathrm{B}(G)$ сверхразрешима и $G^{\mathrm{U}} \leq G^{\mathrm{N}^2} \cap \mathrm{B}(G)$.

Покажем обратное включение. Так как каждая сверхразрешимая группа метанильпотентна, то $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{N}^2$ и $G^{\mathrm{N}^2} \leq G^{\mathrm{U}}$ по лемме 2.5 (4). Поэтому

$$G^{\mathrm{N}^2} \cap \mathrm{B}(G) \leq G^{\mathrm{N}^2} \leq G^{\mathrm{U}}.$$

Итак, равенство $G^{\mathrm{U}} = G^{\mathrm{N}^2} \cap \mathrm{B}(G)$ получено. Из [4, теорема 2.1] следует, что

$$G^{\mathrm{U}} = G^{\mathrm{N}^2} \cap \mathrm{B}(G) = (G')^{\mathrm{N}} = [A, B]^{\mathrm{N}}.$$

Теорема доказана.

Следствие 3.1 ([11, лемма 2]). *Пусть группа $G = AB$ – произведение попарно взаимно перестановочных подгрупп A, B и F – насыщенная формация, содержащая формацию U. Предположим, что коммутант G' нильпотентен. Если подгруппы A и B принадлежат F, то $G \in \mathrm{F}$.*

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.

2. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.

3. Ballester-Bolinches, A. Products finite groups / A. Ballester-Bolinches, R. Estaban-Romero, M. Asaad. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 2010. – 334 p.

4. Monakhov, V. S. On the supersoluble residual of mutually permutable products / V. S. Monakhov // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – Т. 34, № 1. – С. 69–70.
5. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
6. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. – 899 p.
7. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Heidelberg ; Berlin : Springer-Verlag GmbH, 1967. – 796 p.
8. Трофимук, А. А. Замечание о произведении двух tcc-подгрупп / А. А. Трофимук // Чебышевский сб. – 2020. – Т. 22, № 1. – С. 493–499.
9. Skiba, A. N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.
10. Монахов, В. С. О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп / В. С. Монахов, И. К. Чирик // Сиб. мат. журн. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 353–364.
11. Ballester-Bolinches, A. Mutually Permutable Products of Finite Groups II / A. Ballester-Bolinches, M. C. Pedraza-Aguilera // J. Algebra. – 1999. – Vol. 218. – P. 563–572.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 04.03.2021