

УДК 535.3+537.6

Владимир Станиславович Секержицкий¹, Алексей Игоревич Серый²
^{1,2}канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Vladimir Sekerzhitsky¹, Alexey Sery²

^{1,2}Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor
of the Department of General and Theoretical Physics
of the Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: ²alexey_sery@mail.ru

О БЕТА-РАВНОВЕСИИ ЭЛЕКТРОННО-НУКЛОННОГО ВЕЩЕСТВА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Исследовано влияние температуры электронейтрального электронно-протонного вещества на значение концентрации протонов и электронов, соответствующее порогу нейтронизации, а также влияние температуры электронейтрального электронно-нуклонного вещества на значения концентраций электронов, протонов и нейтронов, соответствующих бета-равновесию. Исследование выполнено в приближении идеальности электронного и нуклонных газов, а также в приближении низких температур, при которых отличная от нуля тепловая энергия намного меньше энергии Ферми. При этом для взаимосвязи между температурой, концентрациями и химическими потенциалами нуклонных газов использована известная нерелятивистская формула, для релятивистского электронного газа соответствующая формула получена в данной работе. Показано, что с ростом температуры значение концентрации электронов и протонов, соответствующее порогу нейтронизации, повышается. Также показано, что при одном и том же значении концентрации электронов и протонов с ростом температуры значение концентрации нейтронов, соответствующее бета-равновесию, уменьшается.

Ключевые слова: электронно-нуклонное вещество, бета-равновесие, порог нейтронизации, низкие температуры.

On Beta-Equilibrium of Electron-Nucleon Matter at Low Temperatures

The influence of the temperature of an electrically neutral electron-proton matter on the value of the concentration of protons and electrons corresponding to neutronization threshold and the influence of the temperature of an electrically neutral electron-nucleon matter on the value of the concentration of electrons, protons and neutrons corresponding to beta-equilibrium have been investigated. The research has been carried out in the approximation of ideality of electron and nucleon gases and in the approximation of low temperatures at which nonzero thermal energy is much less than Fermi energy. In this case, the well-known nonrelativistic formula has been applied for the relationship between the temperature, concentrations, and chemical potentials of nucleon gases, the corresponding formula for relativistic electron gas has been obtained in this work. It has been shown that as temperature increases, the value of the concentration of electrons and protons corresponding to the neutronization threshold increases. It has been shown also that as temperature increases at the same value of the concentration of electrons and protons, the value of the concentration of neutrons corresponding to the beta-equilibrium decreases.

Key words: electron-nucleon matter, beta equilibrium, neutronization threshold, low temperatures.

Введение

Расчет порога нейтронизации водорода и условий бета-равновесия электронно-нуклонного вещества имеет значение для различных задач астрофизики. Ранее подобные задачи рассматривались в приближении абсолютного нуля температуры и в пределах высоких температур, в т. ч. в присутствии квантующего магнитного поля [1, с. 88–92, 167–168], а также с учетом и без учета энергии взаимодействия между частицами и спиновой поляризации нуклонов [2, с. 549–555; 3, с. 30–37; 4, с. 30–43]. Для низких отличных от нуля температур задачи такого типа ранее не рассматривались, что можно объяснить следующими причинами.

Алгоритм расчета основных характеристик ферми-газа (в т. ч. химического потенциала) при низких, отличных от нуля температурах хорошо разработан для нерелятивистского приближения [5, с. 596–597; 6, с. 201–202], применение которого не всегда

корректно. В частности, нерелятивистское приближение нельзя считать корректным для вычисления химического потенциала электронного газа при нахождении порога нейтронизации и условий бета-равновесия, поскольку разница между массами нейтрона m_n и протона m_p превышает $2,5m_e$ (m_e – масса электрона). В связи с этим необходимо вывести некоторые основные формулы заново, что и предполагается сделать в данной работе. Кроме того, заслуживает обсуждения вопрос о возможности уточнения алгоритма для нерелятивистского газа (и выполнения аналогичного уточнения для релятивистского газа) при переходе от низких к не очень низким температурам.

Замечания о формулах, используемых для вычислений характеристик нерелятивистских ферми-газов

Следует отметить, что упомянутый выше алгоритм основан на приближенном вычислении интегралов следующего вида:

$$M = \int_0^{+\infty} \varphi(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad f(\varepsilon) = \left(\exp\left(\frac{\varepsilon - \lambda}{kT}\right) + 1 \right)^{-1}. \quad (1)$$

При этом выполняется замена переменной

$$\frac{\varepsilon - \lambda}{kT} = z, \quad (2)$$

после чего интеграл (1) можно преобразовать либо к виду [5, с. 596–597]

$$M = - \int_{-\lambda/(kT)}^{+\infty} F(\lambda + kTz) \tilde{f}(z) dz, \quad \tilde{f}(z) = (e^z + 1)^{-1}, \quad F(\chi) = \int_0^\chi \varphi(\xi) d\xi, \quad (3)$$

либо к виду [6, с. 201]

$$M = \int_0^\lambda \varphi(\varepsilon) d\varepsilon + kT \left(\int_0^{+\infty} \varphi(\lambda + kTz) \tilde{f}(z) dz - \int_0^{\lambda/(kT)} \varphi(\lambda - kTz) \tilde{f}(z) dz \right). \quad (4)$$

В обоих случаях дальнейшие рассуждения основаны на том, что при низких температурах, когда $\lambda > 0$ (эта величина имеет смысл химического потенциала) и $\lambda/(kT) \gg 1$, можно заменить нижний предел первого интеграла в (3) с $-\lambda/(kT)$ на $-\infty$, а верхний предел последнего интеграла в (4) – с $\lambda/(kT)$ на $+\infty$. Несмотря на замечания, перечисленные далее, получающаяся конечная формула

$$M = \int_0^\lambda \varphi(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{1}{6} (\pi kT)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=\lambda} + \frac{7}{360} (\pi kT)^4 \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \varepsilon^3} \right)_{\varepsilon=\lambda} + \dots \quad (5)$$

находит широкое применение в теоретической физике, а результаты вычислений с ее применением хорошо согласуются с экспериментом (прежде всего, в физике твердого тела). При этом условия, налагаемые на функцию φ , перечисленные, например, в [5, с. 596], как мы увидим в дальнейшем, в нашем случае выполняются, а все трудности физического и математического характера, присутствующие в промежуточных преобразованиях и отмеченные далее, в (5) отсутствуют.

Необходимо сделать следующие замечания:

1. При достаточно низких, но отличных от нуля температурах для достижения требуемой точности вычислений (при соответствующей точности исходных данных)

в правой части (5) достаточно ограничиться первым и вторым слагаемыми. С ростом же температуры для повышения точности, на первый взгляд, требуется учет последующих слагаемых в (5), но ценность таких усилий для достижения большей точности снижается из-за того, что замена $\lambda/(kT)$ на $+\infty$ с ростом температуры становится все более грубой.

2. Поскольку величина ε для нерелятивистского ферми-газа имеет смысл энергии отдельного фермиона, отсчитываемой от энергии покоя, в случае идеального газа эта энергия равна просто кинетической энергии, которая по физическому смыслу не может быть отрицательной. Но тогда из (2) следует, что нижнее предельно допустимое значение для переменной z равно $-\lambda/(kT)$, поэтому замена этого значения на $-\infty$ в первом интеграле в (3) неправомерна с физической точки зрения. Кроме того, поскольку функция φ , как будет показано ниже, по смыслу зависит от ε , то область ее определения – положительная полупрямая. Из этого следует, что:

а) в третьем интеграле в (4) при любом Z аргумент функции φ должен быть только положительным (что не выполняется при $\lambda/(kT) < z < +\infty$ в случае замены верхнего предела с $\lambda/(kT)$ на $+\infty$);

б) верхний предел второго интеграла в (3) также может быть только положительным, поэтому область определения функции F является положительной полупрямой, как и в случае функции φ (что не выполняется при $-\infty < z < -\lambda/(kT)$ в случае замены нижнего предела первого интеграла в (3) с $-\lambda/(kT)$ на $-\infty$).

3. При обобщении формулы (5) на релятивистский случай функции, стоящие на месте φ , будут зависеть от аргумента, который, как будет обосновано ниже, по смыслу может быть только положительным (что не выполняется при $\lambda/(kT) < z < +\infty$ в случае замены верхнего предела с $\lambda/(kT)$ на $+\infty$ в (4)). Кроме того, в релятивистском случае функции φ будут содержать, как будет показано ниже, множители, представляющие собой полуцелые степени аргумента, поэтому аргумент не может быть отрицательным и с чисто математической точки зрения.

4. При попытке повышения точности (о чем уже было упомянуто в замечании 1) путем представления упомянутых выше интегралов в виде

$$\int_{-\lambda/(kT)}^{+\infty} F(\lambda + kTz) \tilde{f}(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda + kTz) \tilde{f}(z) dz - \int_{-\infty}^{-\lambda/(kT)} F(\lambda + kTz) \tilde{f}(z) dz, \quad (6)$$

$$\int_0^{\lambda/(kT)} \varphi(\lambda - kTz) \tilde{f}(z) dz = \int_0^{+\infty} \varphi(\lambda - kTz) \tilde{f}(z) dz - \int_{\lambda/(kT)}^{+\infty} \varphi(\lambda - kTz) \tilde{f}(z) dz \quad (7)$$

вычисление вторых интегралов в правых частях (6) и (7) даже численными методами наталкивается на трудности, перечисленные в замечаниях 2 и 3.

В силу сказанного выше, в дальнейшем будем руководствоваться замечанием 1 и при выводе аналогичных соотношений для релятивистского электронного газа.

Вывод соотношения для химического потенциала релятивистского электронного газа

В соответствии с [5, с. 190–192; 6, с. 194] запишем выражение для концентрации n_e электронного газа при произвольной температуре T в отсутствие внешнего магнитного поля и спиновой поляризации:

$$n_e = 2 \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu_e}{kT}\right) + 1}, \quad (8)$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, p – импульс отдельного электрона, ε – его энергия, k – постоянная Больцмана, μ_e – химический потенциал. Для протонного и нейтронного газов соотношение между температурой, концентрацией и химическим потенциалом выглядит совершенно аналогично (8); различия (с точки зрения электронного и нуклонных газов) начинаются при переходе к интегрированию по ε , поскольку это происходит различным образом в случае нерелятивистских нуклонных газов и релятивистского электронного газа.

В нерелятивистском случае энергия отдельного нуклона и химический потенциал соответствующего газа (μ_p – для протонов, μ_n – для нейтронов) не содержат энергии покоя отдельного нуклона $m_i c^2$ (m_i – масса нуклона ($i = p, n$), c – скорость света в вакууме), поэтому взаимосвязь между ε и p такова, что при переходе к интегрированию по ε в (8) нижний предел интеграла остается равным нулю. Это и позволяет применять формулы приближенного вычисления (8) при $kT/\mu_i \ll 1$, приведенные в [5, с. 597; 6, с. 201]. Несмотря на широкие возможности современных систем компьютерной математики, непосредственное нахождение μ_i при известных n_i и T по (8) (с учетом перехода к интегрированию по ε) при низких температурах неудобно [7, с. 10–12], поэтому все равно необходимо выполнять предварительные преобразования, а при низких температурах еще удобнее перейти к упомянутым выше приближенным соотношениям, в которых отсутствуют интегралы.

В релятивистском же случае взаимосвязь между ε и p выражается формулой

$$\varepsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}, \quad (9)$$

а μ_e так же, как и ε , содержит $m_e c^2 \equiv A$. Тогда (8) перепишется в виде

$$n_e = \frac{1}{\pi^2 (\hbar c)^3} \int_A^{+\infty} \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - m_e^2 c^4} d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu_e}{kT}\right) + 1}. \quad (10)$$

Нижний предел интеграла в (10) не равен нулю, поэтому применение упомянутого выше алгоритма к (10) недопустимо. Для решения данной проблемы произведем замену

$$\varepsilon = x + m_e c^2, \quad \mu_e = \nu + m_e c^2. \quad (11)$$

Из (11) следует, что переменная x может быть только положительной, а для величины ν это требование выполняется при достаточно низких температурах (которые и учитываются в данной работе). Подставляя (11) в (10), после несложных преобразований можно получить:

$$n_e = \frac{1}{\pi^2 (\hbar c)^3} (I_{3/2} + m_e c^2 I_{1/2}), \quad (12)$$

$$I_j = \int_0^{+\infty} \frac{x^j \sqrt{x + 2m_e c^2} dx}{\exp\left(\frac{x - \nu}{kT}\right) + 1}. \quad (13)$$

Для возможности применения к интегралам (13) рассуждений, приведенных в [5, с. 596–597; 6, с. 201–202], но не при $kT/\mu_e \ll 1$, а при $kT/\nu \ll 1$, требуется, чтобы функции

$$\varphi_j(x) = x^j \sqrt{x + 2mc^2} \quad (14)$$

при $x \rightarrow \infty$ возрастали не быстрее, чем $e^{\frac{x}{kT}}$, а при $x \rightarrow 0$ не возрастали быстрее, чем x^{-1} . Легко видеть, что данные условия выполняются. Поэтому в соответствии с [5, с. 597; 6, с. 202] можно в общем виде приближенно записать:

$$I_j \approx \int_0^\nu \varphi_j(x) dx + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right)_{x=\nu}. \quad (15)$$

Подставляя (14) в (15) и возвращаясь от ν к μ_e в соответствии с (11), получаем:

$$I_{1/2} \approx \frac{\mu_e}{2} \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4} - \frac{m_e^2 c^4}{2} \ln \left| \frac{\mu_e + \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4}}{m_e c^2} \right| + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{\mu_e}{\sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4}}, \quad (16)$$

$$I_{3/2} \approx \frac{1}{3} (\mu_e^2 - m_e^2 c^4)^{3/2} - \frac{m_e c^2}{2} \left(\mu_e \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4} - m_e^2 c^4 \ln \left| \frac{\mu_e + \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4}}{m_e c^2} \right| \right) + \frac{\pi^2}{12} (kT)^2 \left(3\sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4} + \frac{(\mu_e - m_e c^2)^2}{\sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4}} \right). \quad (17)$$

Подставляя (16) и (17) в (12), получаем:

$$n_e \approx \frac{1}{\pi^2 (\hbar c)^3} \left(\frac{1}{3} (\mu_e^2 - m_e^2 c^4)^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{2\mu_e^2 - m_e^2 c^4}{\sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4}} \right). \quad (18)$$

Из (18) легко убедиться, что при $T = 0$ К получается значение химического потенциала вырожденного релятивистского электронного газа [1, с. 45]:

$$\mu_e = \mu_{0e} = \sqrt{m_e^2 c^4 + (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 c^2 n_e^{2/3}}. \quad (19)$$

Путем замены

$$y = \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4} \quad (20)$$

можно преобразовать (18) к уравнению четвертой степени относительно y :

$$y^4 + (\pi kT)^2 y^2 - 3n_e \pi^2 (\hbar c)^3 y + \frac{\pi^2}{2} (kT)^2 m_e^2 c^4 = 0. \quad (21)$$

Это уравнение можно решить аналитически при заданных n_e и T , а затем выразить μ_e на основе (20). Поскольку такой метод решения выглядит слишком громоздким, проще решать (18) численно относительно μ_e при заданных n_e и T .

С другой стороны, как будет показано ниже, для нахождения концентрации электронов (и протонов), соответствующей порогу нейтронизации, предварительно вычислять μ_e не обязательно.

Нахождение порога нейтронизации электронно-протонного вещества

Уравнение порога нейтронизации выглядит следующим образом [1, с. 88]:

$$\mu_e + \mu_p + m_p c^2 = m_n c^2, \quad (22)$$

где μ_e связано с заданными значениями n_e и T через (18), а μ_p при тех же значениях T и $n_e = n_p$ выражается по формуле [5, с. 281]

$$\mu_p \approx \mu_{0p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_{0p}} \right)^2 \right), \quad \mu_{0p} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p}. \quad (23)$$

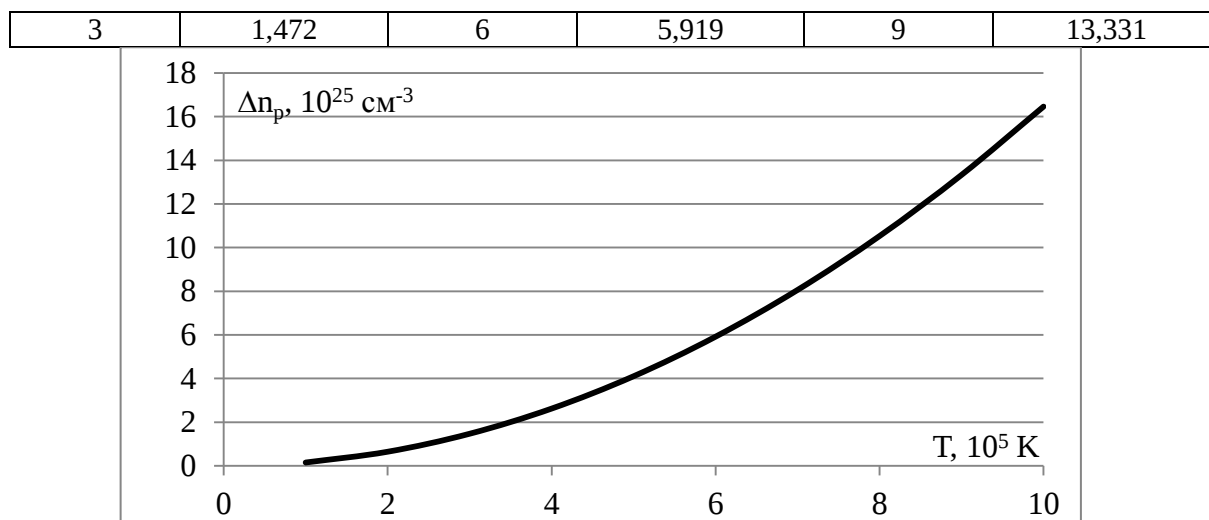
Тогда, выражая μ_e из (22) с учетом (23) и подставляя в (18), можно (с учетом $n_e = n_p$ для электронейтральной среды) после некоторых преобразований получить уравнение порога нейтронизации в виде

$$\begin{aligned} & 3n_e \pi^2 (\hbar c)^3 \sqrt{\left(m_n c^2 - m_p c^2 - \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2m_p kT}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}} \right)^2 \right) \right)^2} - m_e^2 c^4 - \\ & - \frac{\pi^2}{2} (kT)^2 \left(2 \left(m_n c^2 - m_p c^2 - \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2m_p kT}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}} \right)^2 \right) \right)^2 - m_e^2 c^4 \right) - \\ & - \left(\left(m_n c^2 - m_p c^2 - \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2m_p kT}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}} \right)^2 \right) \right)^2 - m_e^2 c^4 \right)^2 \approx 0. \quad (24) \end{aligned}$$

Результаты численных расчетов удобно представить в следующем виде. Для начала выберем значение концентрации протонов и электронов, соответствующее порогу нейтронизации при $T = 0$ К: $n_{0p} = 7,35586 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$. Затем для различных значений температуры будем указывать поправку Δn_p к значению n_{0p} . Численные результаты представлены в таблице 1 и на рисунке 1.

Таблица 1. – Значения порога нейтронизации при различных температурах

$T, 10^5 \text{ К}$	$\Delta n_p, 10^{25} \text{ см}^{-3}$	$T, 10^5 \text{ К}$	$\Delta n_p, 10^{25} \text{ см}^{-3}$	$T, 10^5 \text{ К}$	$\Delta n_p, 10^{25} \text{ см}^{-3}$
1	0,154	4	2,625	7	8,060
2	0,648	5	4,107	8	10,531



Рисунк 1. – Значение Δn_p , соответствующее порогу нейтронизации при различных температурах, согласно уравнению (24)

Таким образом, можно сделать вывод, что с ростом температуры значение $n_e = n_p$, соответствующее порогу нейтронизации, повышается. Более высокие значения температуры по сравнению с представленными в таблице 1 и на рисунке 1 приводят к нарушению условия применимости соотношений (18) и (23). Это замечание относится также к рисункам 2, 3 и таблице 2.

Уравнение бета-равновесия электронно-нуклонного вещества

Уравнение бета-равновесия в общем случае выглядит следующим образом [1, с. 88]:

$$\mu_e + \mu_p + m_p c^2 = \mu_n + m_n c^2, \quad (25)$$

где, как и в задаче о нахождении порога нейтронизации, μ_e связано с заданными значениями n_e и T через (18), μ_p при тех же значениях T и $n_e = n_p$ находится по формуле (23), а формула для μ_n (которая применяется при том же значении T) совершенно аналогична (23):

$$\mu_n \approx \mu_{0n} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_{0n}} \right)^2 \right), \quad \mu_{0n} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_n^{2/3}}{2m_n}. \quad (26)$$

Для удобства введем вспомогательную функцию

$$N(n_n, T) = m_n c^2 + \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_n^{2/3}}{2m_n} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2m_n kT}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_n^{2/3}} \right)^2 \right). \quad (27)$$

Тогда, выражая μ_e из (25) с учетом (23), (26), (27) и подставляя в (18), можно (с учетом $n_e = n_p$ для электронейтральной среды) после некоторых преобразований получить (по аналогии с (24)) уравнение бета-равновесия в виде

$$\begin{aligned}
 & 3n_e\pi^2(\hbar c)^3 \sqrt{\left(N(n_n, T) - m_p c^2 - \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2m_p kT}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}} \right)^2 \right) \right)^2 - m_e^2 c^4 -} \\
 & - \frac{\pi^2}{2} (kT)^2 \left(2 \left(N(n_n, T) - m_p c^2 - \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2m_p kT}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}} \right)^2 \right) \right)^2 - m_e^2 c^4 \right) - \\
 & - \left(\left(N(n_n, T) - m_p c^2 - \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2m_p kT}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}} \right)^2 \right) \right)^2 - m_e^2 c^4 \right)^2 \approx 0. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Уравнение (28) можно решать численно относительно n_n при заданных значениях T (в соответствии с замечанием после рисунка 1) и $n_p > n_{0p}$. Численные результаты решения уравнения (28) представлены в таблице 2 и на рисунках 2 и 3. В силу того, что графики уравнения бета-равновесия при $T = 1,00 \cdot 10^9$ К и $T = 9,00 \cdot 10^9$ К практически сливаются, на рисунке 2 в логарифмическом масштабе отображен график зависимости n_n от n_p для температуры $T = 1,00 \cdot 10^9$ К. При этом различие между графиками удобнее представить в виде разности значений концентрации нейтронов, соответствующих бета-равновесию при температурах $T = 1,00 \cdot 10^9$ К и $T = 9,00 \cdot 10^9$ К, в зависимости от значения n_p . Соответствующая зависимость отображена на рисунке 3. При этом на рисунках 2 и 3 для удобства введены вспомогательные величины $n_{01} = 10^{30} \text{ см}^{-3}$ и $n_{02} = 10^{33} \text{ см}^{-3}$.

Таблица 2. – Значения концентрации нейтронов, соответствующих бета-равновесию при температурах $T = 1,00 \cdot 10^9$ К и $T = 9,00 \cdot 10^9$ К, а также разность этих значений

$T, 10^9 \text{ К}$	1,00	9,00	$\Delta n_n = n_n^{(2)} - n_n^{(1)}, 10^{30} \text{ см}^{-3}$
$n_p, 10^{30} \text{ см}^{-3}$	$n_n^{(1)}, \text{ см}^{-3}$	$n_n^{(2)}, \text{ см}^{-3}$	
0,75	$2,1377 \cdot 10^{32}$	$2,1351 \cdot 10^{32}$	0,26
0,8	$1,95956 \cdot 10^{33}$	$1,95899 \cdot 10^{33}$	0,57
0,85	$4,50730 \cdot 10^{33}$	$4,50657 \cdot 10^{33}$	0,73
0,9	$7,55357 \cdot 10^{33}$	$7,55273 \cdot 10^{33}$	0,84
0,95	$1,095618 \cdot 10^{34}$	$1,095526 \cdot 10^{34}$	0,92
1	$1,462811 \cdot 10^{34}$	$1,462714 \cdot 10^{34}$	0,98
1,5	$5,81918 \cdot 10^{34}$	$5,81906 \cdot 10^{34}$	1,18
2	$1,052996 \cdot 10^{35}$	$1,052984 \cdot 10^{35}$	1,19
2,5	$1,521123 \cdot 10^{35}$	$1,521112 \cdot 10^{35}$	1,16
3	$1,977335 \cdot 10^{35}$	$1,977323 \cdot 10^{35}$	1,12
3,5	$2,4195405 \cdot 10^{35}$	$2,4195296 \cdot 10^{35}$	1,09

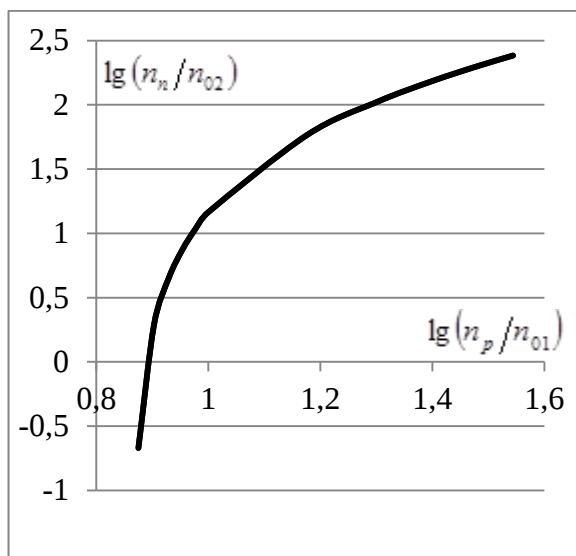


Рисунок 2. – Зависимость значения $\lg(n_n/n_{02})$, соответствующего бета-равновесию, от значения $\lg(n_p/n_{01})$ при $T = 1,00 \cdot 10^9$ К, согласно уравнению (28)

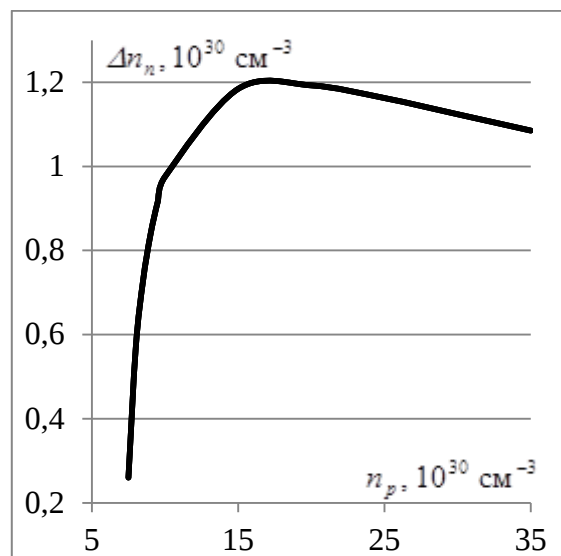


Рисунок 3. – Зависимость разности значений n_n , соответствующих бета-равновесию при $T = 1,00 \cdot 10^9$ К и $T = 9,00 \cdot 10^9$ К, согласно уравнению (28), от значения n_p

Таким образом, с ростом температуры при одном и том же значении $n_e = n_p$ значение n_n , соответствующее бета-равновесию, уменьшается. При этом для двух заданных значений температуры (в нашем случае это $T = 1,00 \cdot 10^9$ К и $T = 9,00 \cdot 10^9$ К) с ростом концентрации $n_e = n_p$ соответствующая разность между значениями концентрации нейтронов сначала возрастает, а затем, начиная приблизительно с $n_p \approx 2 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$, уменьшается.

Поиск значений n_n при $n_p < 7,5 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$ требует отдельных исследований, поскольку бета-равновесные значения n_n получаются настолько малыми, что формула (26) становится все более грубым приближением для нахождения химического потенциала, а вблизи порога нейтронизации она и вовсе неприменима, поскольку при очень малой концентрации нейтронный газ становится невырожденным даже при таких температурах, при которых электронный и протонный газы еще вполне можно считать вырожденными и применять к ним соотношения (18) и (23).

Заклучение. Основные результаты

В приближении низких, отличных от нуля температур и идеальности ферми-газов исследовано влияние температуры электронейтрального электронно-протонного вещества на значение концентрации протонов и электронов, соответствующее порогу нейтронизации, а также влияние температуры электронейтрального электронно-нуклонного вещества на значения концентраций электронов и нуклонов, соответствующих бета-равновесию. При этом для взаимосвязи между температурой, концентрациями и химическими потенциалами нуклонных газов использовано известное нерелятивистское соотношение, для релятивистского электронного газа соответствующее соотношение выведено по аналогичному алгоритму. Показано, что с ростом температуры значение концентрации электронов и протонов, соответствующее порогу нейтрониза-

ции, повышается. Также показано, что при одном и том же значении концентрации электронов и протонов с ростом температуры значение концентрации нейтронов, соответствующее бета-равновесию, уменьшается. Результаты могут представлять интерес для теоретического исследования сверхплотных астрофизических объектов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.
2. Sery, A. I. Spin Polarization of Nucleons: Limits of Low and High Temperatures / A. I. Sery // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. – 2015. – Vol. 79, nr 4. – P. 506–512.
3. Серый, А. И. О ферромагнетизме вырожденной нейтронно-протонной системы / А. И. Серый // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 30–37.
4. Серый, А. И. О некоторых поляризационных эффектах в астрофизической плазме / А. И. Серый // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2014. – № 1. – С. 30–43.
5. Румер, Ю. Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика : учеб. пособие / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 608 с.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. V : Статистическая физика. Ч. 1. – 616 с.
7. Секержицкий, В. С. Об использовании программы MathCAD для вычисления химического потенциала газа нерелятивистских фермионов / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : материалы респ. науч.-практ. конф., 24–25 апр. 2018 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест : БрГУ, 2018. – С. 12–14.

REFERENCES

1. Siekierzhyckij, V. S. Ravnoviesnyje sistiemy fiernionov i bozonov v magnitnykh poliakh : monografija / V. S. Siekierzhyckij ; Briest. gos. un-t im. A. S. Pushkina. – Briest : Izd-vo BrGU, 2008. – 198 s.
2. Sery, A. I. Spin Polarization of Nucleons: Limits of Low and High Temperatures / A. I. Sery // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. – 2015. – Vol. 79, nr 4. – P. 506–512.
3. Sieryj, A. I. O fierromagnietizmie vyrozhdiennoj nijtronno-protonnoj sistiemy / A. I. Sieryj // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2012. – № 1. – S. 30–37.
4. Sieryj, A. I. O niekotorykh poliarizacionnykh effiektakh v astrofizichieskoj plazmie / A. I. Sieryj // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2014. – № 1. – S. 30–43.
5. Rumer, Yu. B. Tiermodinamika, statistichieskaja fizika i kinetika : uchieb. posobije / Yu. B. Rumer, M. Sh. Ryvkin. – Novosibirsk : Izd-vo Novosib. un-ta, 2000. – 608 s.
6. Landau, L. D. Tieorietichieskaja fizika : ucheb. posobije dlia vuzov: v 10 t. / L. D. Landau, Ye. M. Lifshic. – 5-je izd., stier. – M. : FIZMATLIT, 2001. – T. V : Statistichieskaja fizika. Ch. 1. – 616 s.
7. Siekierzhyckij, V. S. Ob ispol'zovanii programmy MathCAD dlia vychislenija khimichieskogo potentsiala gaza nierielativistskikh fiernionov / V. S. Siekierzhyckij, A. I. Sieryj // Matiematichieskoje modelirovanije i novyje obrazovatel'nyje tekhnologii v matiematike : materialy riesp. nauch.-prakt. konf., 24–25 apr. 2018 g. / Briest, gos. un-t ; pod obshch. ried. A. I. Basika. – Briest : BrGU, 2018. – S. 12–14.

Рукапіс надіслано у редакцію 25.03.2021